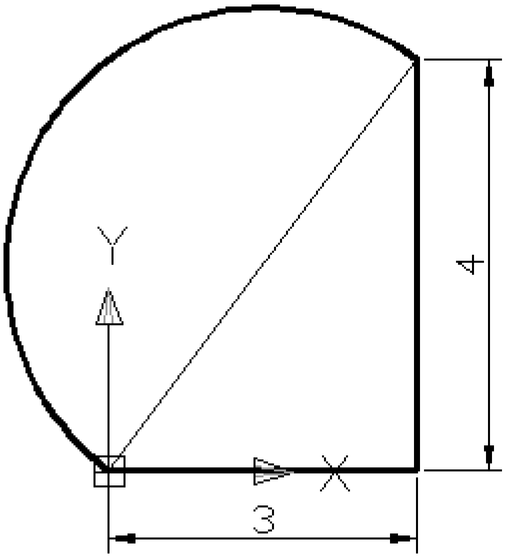
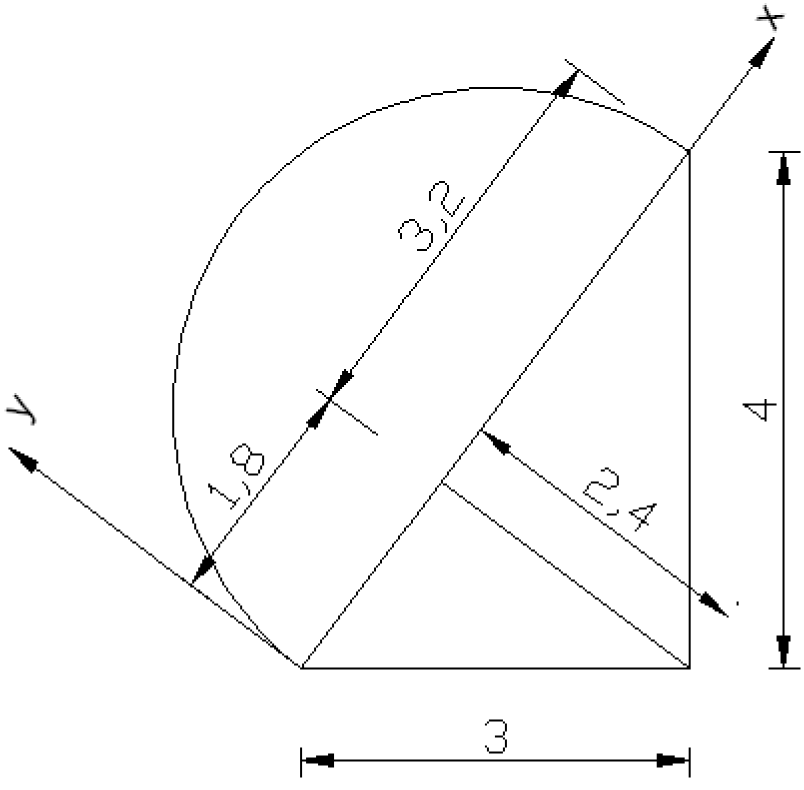
**Para la siguiente figura se pide:**
**Determinar el valor de los momentos principales de inercia baricéntricos**.




Elegimos un sistema de ejes rotado un ángulo $\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{4}{3}\right)$ con el objeto de poder utilizar las tablas de propiedades geométricas.
Dividimos la figura en un área semicircular y dos triangulares y, por semejanza de triángulos obtenemos las dimensiones necesarias para entrar en la tabla.



$\pi := 2\,\mathrm{asin}(1)$ $\qquad \pi = 3.142$

Figura 1 (Semicírculo):

$D := 5 \qquad R := \dfrac{D}{2}$

$J_{x1} := \pi\,\dfrac{D^4}{128} \qquad J_{y1} := 5\pi\,\dfrac{D^4}{128} \qquad J_{xy1} := \dfrac{2}{3}\cdot R^4 \qquad x_{G1} := R \qquad y_{G1} := \dfrac{4R}{3\pi} \qquad A_1 := \dfrac{\pi R^2}{2}$

$J_{x1} = 15.34 \qquad J_{y1} = 76.699 \qquad J_{xy1} = 26.042 \qquad x_{G1} = 2.5 \qquad y_{G1} = 1.061 \qquad A_1 = 9.817$

Figura 2 (Triángulo) $\qquad b_2 := 1.8 \qquad h_2 := 2.4$

$J_{xG2} := \dfrac{b_2\cdot h_2^{\,3}}{36} \quad J_{yG2} := \dfrac{b_2^{\,3}\cdot h_2}{36} \qquad J_{xGyG2} := \dfrac{-b_2^{\,2}\cdot h_2^{\,2}}{72} \qquad x_{G2} := \dfrac{2}{3}\cdot b_2 \quad y_{G2} := \dfrac{-h_2}{3} \qquad A_2 := \dfrac{b_2\cdot h_2}{2}$

$J_{xG2} = 0.691 \qquad J_{yG2} = 0.389 \qquad J_{xGyG2} = -0.259 \qquad x_{G2} = 1.2 \qquad y_{G2} = -0.8 \qquad A_2 = 2.16$

Figura 3 (Triángulo) $\qquad b_3 := 3.2 \qquad h_3 := 2.4$

$J_{xG3} := \dfrac{b_3\cdot h_3^{\,3}}{36} \quad J_{yG3} := \dfrac{b_3^{\,3}\cdot h_3}{36} \quad J_{xGyG3} := \dfrac{b_3^{\,2}\cdot h_3^{\,2}}{72} \quad x_{G3} := \dfrac{b_3}{3} + b_2 \quad y_{G3} := \dfrac{-h_3}{3} \quad A_3 := \dfrac{b_3\cdot h_3}{2}$

$J_{xG3} = 1.229 \qquad J_{yG3} = 2.185 \qquad J_{xGyG3} = 0.819 \qquad x_{G3} = 2.867 \qquad y_{G3} = -0.8 \qquad A_3 = 3.84$

$$x_G := \frac{A_1\cdot x_{G1} + A_2\cdot x_{G2} + A_3\cdot x_{G3}}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad \boxed{x_G = 2.411}$$

$$y_G := \frac{A_1\cdot y_{G1} + A_2\cdot y_{G2} + A_3\cdot y_{G3}}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad \boxed{y_G = 0.355}$$

$$J_{xG} := J_{x1} - A_1 \cdot y_G^{\,2} + J_{xG2} + A_2 \cdot \left(y_{G2}^{\,2} - y_G^{\,2}\right) + J_{xG3} + A_3 \cdot \left(y_{G3}^{\,2} - y_G^{\,2}\right) \qquad J_{xG} = 19.105$$

$$J_{yG} := J_{y1} - A_1 \cdot x_G^{\,2} + J_{yG2} + A_2 \cdot \left(x_{G2}^{\,2} - x_G^{\,2}\right) + J_{yG3} + A_3 \cdot \left(x_{G3}^{\,2} - x_G^{\,2}\right) \qquad J_{yG} = 21.956$$

$$J_{xGyG} := J_{xy1} - A_1 \cdot x_G \cdot y_G + J_{xGyG2} + A_2 \cdot \left(x_{G2} \cdot y_{G2} - x_G \cdot y_G\right) + J_{xGyG3} + A_3 \cdot \left(x_{G3} \cdot y_{G3} - x_G \cdot y_G\right)$$

$$J_{xGyG} = 2.177$$

$$J_I := \frac{J_{xG} + J_{yG}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(J_{yG} - J_{xG}\right)^2 + 4 \cdot J_{xGyG}^{\,2}} \qquad \boxed{J_I = 23.133}$$

$$J_{II} := \frac{J_{xG} + J_{yG}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(J_{yG} - J_{xG}\right)^2 + 4 \cdot J_{xGyG}^{\,2}} \qquad \boxed{J_{II} = 17.928}$$

Para hallar las coordenadas del baricentro en un par de ejes horizontal y vertical resolvemos las ecuaciones de rotación de ejes

$h := 0 \qquad v := 0$

Given

$$2.411 = h \cdot \cos(\alpha) + v \cdot \sin(\alpha)$$

$$0.355 = v \cdot \cos(\alpha) - h \cdot \sin(\alpha)$$

$$\mathrm{Find}(h, v) = \begin{pmatrix} 1.163 \\ 2.142 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del baricentro en un par de ejes horizontal (h) y vertical (v) son:

h = 1.163 v = 2.142

Ing. Pablo H. Szaingurten