EL TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Y SUS APLICACIONES

En lo que sigue, se pone a disposición un primer borrador de lo que se piensa como una obra más extensa, que cubra todos los tópicos del programa de Estabilidad IA, tal como se enseña en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

Primer Revisión
Febrero de 2006

CAPÍTULO 5
TEOREMAS ENERGÉTICOS

Hasta ahora hemos analizado algunos problemas que plantea la Ciencia de la Construcción sobre la base de los Principios de la Estática. Es posible un estudio paralelo basado en consideraciones energéticas, el que resulta sumamente interesante, formativo y de indudable interés práctico en muchos casos. Fuera del alcance de este libro, en problemas relativos a la estabilidad de cuerpos deformables, a veces es ésta la única aproximación que permite una solución.

No se hará un tratamiento completo de los llamados Teoremas Energéticos, sólo una aproximación al tema, planteando las bases conceptuales para la solución de cierto tipo de problemas, en el marco de la hipótesis simplificativa de los "cuerpos indeformables" seguida en este libro.

Es importante, aunque no siempre imprescindible, pero conveniente para una mejor formación del ingeniero estructural, introducir el concepto de trabajo virtual, demostrar el Teorema de los Trabajos Virtuales (TTV) en el marco de la indeformabilidad de los cuerpos y desarrollar algunas de sus aplicaciones para la solución de diversos problemas. Esto resulta además, un paso introductorio para la generalización y uso en el caso de los cuerpos deformables.

El Teorema de los Trabajos Virtuales tiene particular interés para la Ciencia de la Construcción, por su virtud unificadora ya que, todos los demás denominados teoremas energéticos pueden demostrarse a partir del mismo[1].

Como se verá más adelante, bajo la hipótesis de los "cuerpos indeformables", existe total equivalencia entre el TTV y los tres primeros principios de la Estática.

TRABAJO DE UNA FUERZA

En forma clásica se define como trabajo de una fuerza en un desplazamiento al producto escalar $dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, siendo **F** la fuerza en cada punto de la trayectoria, y d**s** el vector desplazamiento elemental, tangente a la trayectoria en ese punto. En algunos casos **F** podría representar un campo vectorial (el gravitatorio) y *s* la trayectoria de una partícula en ese campo.

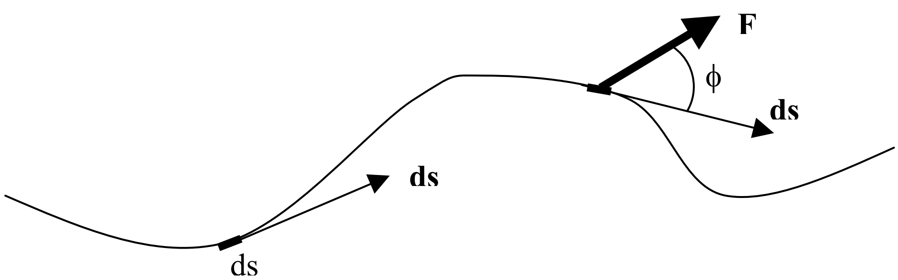

Figura 1

[1] Puppo, Alberto H., Los Teoremas de energía en la Mecánica del Sólido, Anales de la Sociedad Científica Argentina, Nov/Dic 1972. Si bien muchos autores adoptan el Principo de los Trabajos Virtuales como tal, Puppo demuestra con originalidad el Teorema de los Trabajos Virtuales, basándose en un principio más general, el primer principio de la termodinámica o de conservación de la energía.

Vale entonces: $dT = F \cdot ds \cdot \cos \phi$ (1)

TRABAJO DE UN PAR

Consideremos un cuerpo plano (x,y) sobre el que actúan dos fuerzas **F** paralelas, iguales y de sentido contrario, una aplicada en el punto A y la otra en el punto B, entre los que media la distancia d. Ambas generan un momento que puede representarse como un vector perpendicular al plano, de intensidad M:

$$\mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{F} = M \cdot \mathbf{k} \qquad (\mathbf{k}\text{: versor})$$

Cualquier traslación que se aplique al cuerpo implicará trabajo nulo del par, ya que ambos puntos de aplicación de las fuerzas componentes sufrirán el mismo desplazamiento y siendo ambas de sentido contrario el trabajo de una será igual y de signo contrario al que desarrolle la otra.

Si se imprime un giro al cuerpo, alrededor de un punto O en el plano x,y, de intensidad θ (su vector representativo será $\boldsymbol{\theta} = \theta \cdot \mathbf{k}$), tan pequeño que sea aplicable la cinemática lineal, los puntos A y B experimentarán desplazamientos perpendiculares a los segmentos OA Y OB respectivamente:

$$\mathbf{a}_A = \theta \times \mathbf{OA} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a}_B = \theta \times \mathbf{OB}$$

El trabajo total será la suma del trabajo de ambas fuerzas:

$$T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_A + (-\mathbf{F}) \cdot \mathbf{a}_B = \mathbf{F} \cdot \theta \times (\mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B) = \mathbf{F} \cdot \theta \times \mathbf{d} = \theta \cdot \mathbf{d} \times \mathbf{F} = \theta \cdot \mathbf{M} = \theta \cdot M \qquad (2)$$

En conclusión, el trabajo de un par es proporcional a su intensidad, proporcional a la intensidad del giro aplicado e independiente de la dirección de las fuerzas, de sus puntos de aplicación y de la ubicación del centro de giro.

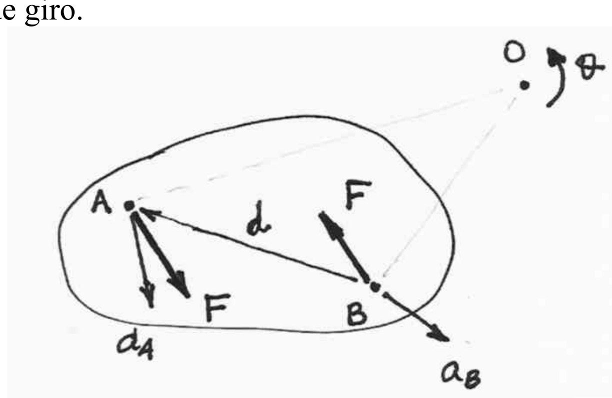

Figura 2

COORDENADAS GENERALIZADAS – MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Existen coordenadas para la localización de un punto en el plano o en el espacio. Así se habla de latitud y longitud geográfica, o de coordenadas cartesianas ortogonales que en un espacio tridimensional permiten definir un vector posición.

Aquí, en cambio, lo que se pretende es establecer un sistema de versores de diferente índole, que permitan definir magnitudes diferentes. Así, por ejemplo, un vector con punto de aplicación en A establece una dirección y un sentido positivo, y sobre el es posible definir una fuerza, un desplazamiento, una velocidad, una aceleración, etc. De ese versor decimos que define una coordenada en sentido generalizado.

Cuando sobre una coordenada generalizada es posible definir magnitudes que a través de su producto escalar den como resultado trabajo, decimos que estas magnitudes son complementarias o correspondientes. Por ejemplo una fuerza y un desplazamiento, o, como acabamos de ver un giro y un par. Más adelante se verá la posibilidad de definir otras magnitudes complementarias relacionadas con esfuerzos internos en los sistemas formados por barras.

DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

Virtual se opone en este caso a real. Un desplazamiento virtual es aquél que, por ejemplo, ateniéndose a la restricción que puede implicar la existencia de un vínculo no se podría producir realmente, en cambio sí en el campo virtual.

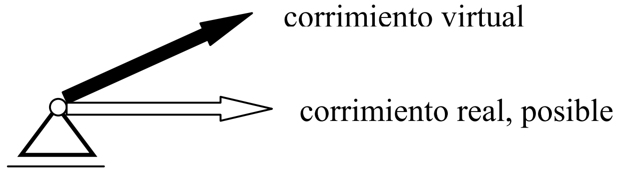

Figura 3

Inicialmente, como desplazamiento virtual (DV) entenderemos al conjunto de parámetros que definen unívocamente un movimiento independientemente de las restricciones reales que puedan existir. En el caso de un punto en el plano son dos componentes independientes de corrimiento, en el caso de un cuerpo son dos componentes de traslación y un giro, por ejemplo.

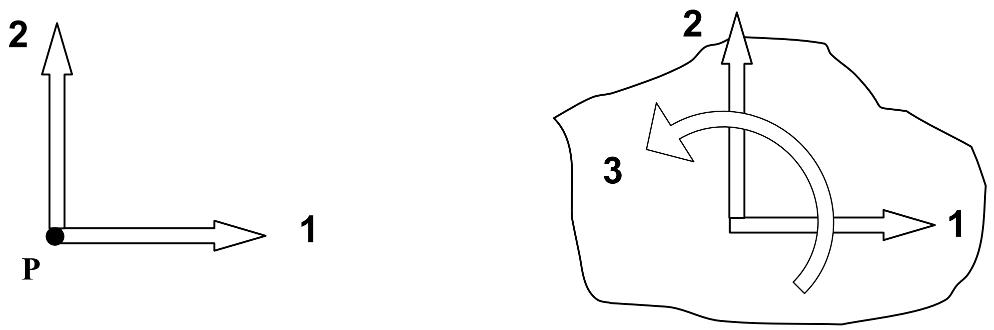

Figura 4

La única limitación que introduciremos a los desplazamientos virtuales es que los corrimientos que surjan de un DV sean suficientemente pequeños como para que sea válida la cinemática lineal, es decir que los desplazamiento o los corrimientos de cualquier punto sean función lineal de las coordenadas cartesianas ortogonales que permiten definir su posición.

Con respecto a los corrimientos originados en traslaciones no habrá entonces limitación, en cambio en el caso de corrimientos originados en giros de un cuerpo –indeformable- si bien no es necesario que sean infinitésimos, los giros deberán ser menores que 10^{-3}.

Utilizaremos la notación variacional para señalar los desplazamientos virtuales ya que estos, matemáticamente, pueden ser considerados como variaciones, que se originan generalmente en el cambio de una posición preestablecida de los cuerpos.

TRABAJOS VIRTUALES

Definimos como trabajo virtual de una fuerza **F** al trabajo que ella desarrolla en un desplazamiento virtual $\delta\mathbf{a}$. De acuerdo con la definición clásica del producto escalar, resulta:

$$TV = \delta T = \delta\mathbf{a} \,.\, \mathbf{F}$$

TEOREMA 1

El trabajo de la resultante de un conjunto de fuerzas concurrentes, en un desplazamiento virtual, es igual a la suma de los trabajos virtuales de cada una de las fuerzas componentes, en el mismo desplazamiento.

Sea el conjunto de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... , $\mathbf{F}_n$, concurrentes en el punto A, dado el desplazamiento virtual $\delta\mathbf{a}$, la suma del trabajo de todas las fuerzas será:

$$\Sigma TV_i = \delta\mathbf{a} \,.\, \mathbf{F}_1 + \delta\mathbf{a} \,.\, \mathbf{F}_2 + ... + \delta\mathbf{a} \,.\, \mathbf{F}_n = \delta\mathbf{a} \,.\, (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n) = \delta\mathbf{a} \,.\, \mathbf{R} \qquad (3)$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Corolario

Si el conjunto de fuerzas concurrentes está en equilibrio la resultante es nula, $\mathbf{R} = 0$, con lo que su trabajo virtual y la suma de los trabajos virtuales de todas las componentes también serán nulos, y viceversa, si la suma de los trabajos virtuales de todas las componentes es nula, $\Sigma TV_i = 0$, dado que el desplazamiento virtual no es nulo, deberá serlo la resultante y por lo tanto existirá equilibrio. Esto permite establecer que:

Dado un conjunto de fuerzas concurrentes es condición necesaria y suficiente para que exista equilibrio, que la suma de los trabajos virtuales de todas las fuerzas sea nulo para cualquier desplazamiento virtual.

De lo anterior resulta claro, además, la equivalencia entre el Principio del Paralelogramo y este teorema, que podríamos denominar "Teorema de los Trabajos Virtuales para fuerzas concurrentes". Es decir que, postulado el Principio del Paralelogramo se puede demostrar este Teorema, o tomando el enunciado del Teorema como postulado podría demostrarse el "Teorema del Paralelogramo".

TEOREMA 2

El trabajo de la resultante de un conjunto de fuerzas, que actúan sobre un cuerpo, en un desplazamiento virtual es igual a la suma de los trabajos virtuales de cada una de las fuerzas actuantes, en el mismo desplazamiento.

Como resultante se entiende no necesariamente una fuerza sino el efecto total resultante de un conjunto de fuerzas cualesquiera que, como se sabe, puede ser reducido a una fuerza y un par.

Se demostrará en el espacio bidimensional, pudiéndose ampliar la demostración sin mayor dificultad al espacio tridimensional.

El corrimiento virtual $\delta\mathbf{a}$ de un punto A_i cualquiera de un cuerpo indeformable, que sufre un desplazamiento virtual constituido por una traslación de intensidad $\delta\mathbf{T}$ en el plano y una rotación de intensidad $\delta\theta$ alrededor de un punto O cualquiera, puede ser expresada como:

$$\delta\mathbf{a} = \delta\mathbf{T} + \delta\theta \times \mathbf{d} \qquad \text{siendo } \mathbf{d} \text{ la distancia del punto O hasta A} \qquad (4)$$

La anterior es válida en el ámbito de la cinemática lineal, esto es derivadas pequeñas de los desplazamientos o, en términos prácticos, desplazamientos pequeños de los puntos del cuerpo en relación con sus dimensiones, por lo tanto el desplazamiento virtual deberá mantenerse en ese ámbito.

Teniendo en cuenta que:

$$\delta\mathbf{T} = \delta U\,\mathbf{i} + \delta V\,\mathbf{j} \qquad \delta\theta = \delta\theta\,\mathbf{k} \qquad \text{siendo } \mathbf{i}\,;\ \mathbf{j};\ \mathbf{k} \text{ versores}$$

y que:

$$\delta\theta \times \mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \delta\theta\,(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})$$

resulta:

$$\delta\mathbf{a} = (\delta U - \delta\theta\,.\,y)\,\mathbf{i} + (\delta V + \delta\theta\,.\,x)\,\mathbf{j} \qquad (5)$$

Si sobre el cuerpo indeformable actúa un sistema de fuerzas, representando $\mathbf{F}_i$ cada una de las fuerzas aplicadas en cada punto genérico A_i, el trabajo virtual será:

$$TV = \sum_i \mathbf{F}_i\,.\,\delta\mathbf{a_i} = \sum_i F_x\,.\,(\delta U - \delta\theta\,.\,y) + \sum_i F_y\,.\,(\delta V + \delta\theta\,.\,x)$$

$$TV = \sum_i F_x\,.\,\delta U + \sum_i F_y\,.\,\delta V + \sum_i (-F_x.\,\delta\theta\,.\,y + F_y.\,\delta\theta\,.\,x)$$

$$TV = \delta U \sum_i F_x + \delta V \sum_i F_y + \delta\theta \sum_i (-F_x\,.\,y + F_y\,.\,x) \qquad (6)$$

Si se tiene en cuenta que ΣF_x es igual a la componente en x de la resultante del sistema de fuerzas, que ΣF_y es igual a la componente en y de la resultante del sistema de fuerzas, y que $\Sigma (-F_x\,.\,y + F_y\,.\,x)$ es igual a la sumatoria de los momentos de todas las fuerzas del sistema respecto al punto O, se puede deducir que:

$$TV = \delta U\,.\,R_x + \delta V\,.\,R_y + \delta\theta\,.\,M^o{}_R \qquad (7)$$

que es el trabajo virtual de la resultante (R y M) y por lo tanto lo que se quería demostrar.

Corolario 1

Si el sistema está en equilibrio, o sea que se cumple:

$$R_x = \sum_i F_x = 0 \quad ; \quad R_y = \sum_i F_y = 0 \quad ; \quad M^o{}_R = \sum_i (-F_x.\,y + F_y.x) = 0 \qquad (8)$$

resulta el trabajo virtual nulo (TV = 0) para cualquier desplazamiento virtual DV (δU; δV; $\delta\theta$).

Corolario 2

Cada uno de los sumandos de la ecuación (7) igualados a cero son una expresión de equilibrio, que conducen a las (8) ya que en general las componentes del desplazamiento virtual (δU; δV; $\delta\theta$) serán parámetros elegidos arbitrariamente y no nulos; al menos no todos simultáneamente deberán serlo sino no habrá desplazamiento virtual.

Entonces, si el trabajo virtual es nulo la (7) resulta ser una combinación lineal de ecuaciones de equilibrio y por lo tanto ella misma una ecuación de equilibrio.

Como para asegurar el equilibrio de un cuerpo en el plano son necesarias tres ecuaciones independientes, para garantizarlo aplicando el método de los trabajos virtuales será necesario plantear tres ecuaciones de trabajo virtual que conduzcan a ecuaciones de equilibrio independientes.

Una alternativa, pero no la única sería a adoptar tres desplazamientos virtuales en los que sucesivamente cada parámetro (δU; δV; $\delta\theta$) sea unitario mientras los otros dos son nulos, esto es una traslación pura en la dirección x, $\delta U=1$, luego una traslación pura en la dirección y $\delta V=1$, y finalmente una rotación alrededor de O, $\delta\theta=1$. Ello conduciría a las (8).

Otra posibilidad sería plantear las tres ecuaciones de trabajos virtuales para tres giros respecto de tres puntos no alineados A, B y C:

$$DV_1 = \delta\theta^A \quad ; \quad DV_2 = \delta\theta^B \quad ; \quad DV_3 = \delta\theta^C \tag{9}$$

Lo que conduciría a tres ecuaciones de momentos respecto de los tres puntos (no alineados), y por lo tanto independientes.

APLICACIÓN

Analizaremos un cuerpo vinculado isostáticamente, con el propósito de determinar el valor de las fuerzas en los vínculos por aplicación del TTV. Se trata entonces de calcular tres valores por lo que será necesario establecer tres ecuaciones de trabajos virtuales.

Una opción es plantear la ecuación básica (7) sucesivamente para cada parámetro δU, δV y $\delta\theta$ unitario mientras los otros dos son nulos.

Es posible otra alternativa de manera tal que las ecuaciones sean independientes entre sí, es decir que cada una de las reacciones desconocidas aparezca sólo en una de las ecuaciones planteadas. Para ello bastará elegir desplazamientos virtuales que anulen sucesivamente dos de los desplazamientos correspondientes con las reacciones de vínculo (las que no aparecerán en la ecuación de trabajos) y que implique un corrimiento no nulo en correspondencia con la tercera reacción.

Esto implica que cada DV (de los tres a plantear) será equivalente a un giro, según las (9), en la que los centros de giro (en el caso de la figura los puntos R y S) se encontrarán sucesivamente en la intersección de las direcciones de los desplazamientos que se pretende anular. Puede ocurrir que estas direcciones resulten paralelas, implicando un centro de giro impropio (en el ejemplo T) y por lo tanto un DV equivalente a una traslación perpendicular a esas direcciones:

$$TV_1 = \delta\theta^R \,.\, (R_C \,.\, a + P_x \,.\, h - P_y \,.\, b) = 0 \;;$$

$$TV_2 = \delta\theta^S \,.\, (- R_B \,.\, a + P_x \,.\, h + P_y \,.\, (a-b)\,) = 0 \quad ;$$

$$TV_3 = \delta U \,.\, (R_A - P_x\,) = 0$$

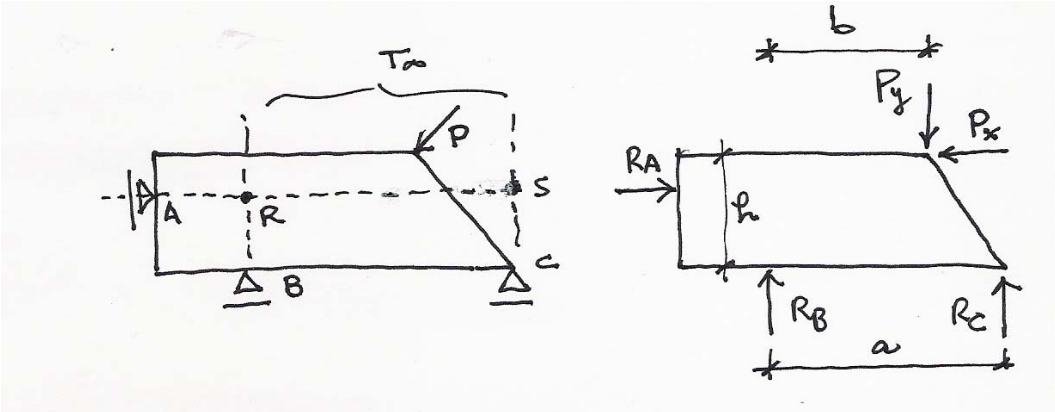

Figura 5

El sistema de ecuaciones resultante conduce a ecuaciones de nulidad de momentos si los centros de giro son propios, con alguna ecuación de nulidad de componentes de fuerzas si algún punto es impropio.

De lo estudiado se concluye que el sistema de fuerzas es único, quedando por decidir el DV más conveniente según el objetivo que se persiga.

TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

De lo anterior surge el enunciado del Teorema de los Trabajos Virtuales, que dice: *Es condición necesaria y suficiente para que un cuerpo se encuentre en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas cualesquiera, que el trabajo desarrollado por las mismas, para todo desplazamiento virtual a partir de la posición de equilibrio, sea nulo.*

El primero en plantearlo como un axioma bajo el título de ***Principio de los Desplazamientos Virtuales*** fue el matemático suizo de origen holandés Juan Bernoulli (1667-1748) en 1717.

Es de mucha utilidad tratarlo como un teorema y no como un principio ya que su demostración permite comprender mejor su alcance y la razón de sus limitaciones.

Del Teorema 2 y sus corolarios ha quedado demostrado que TV = 0 conduce a una ecuación de equilibrio, pero que para garantizar el equilibrio de un cuerpo plano son necesarias tres ecuaciones de equilibrio independientes.

Sabemos que un conjunto plano de fuerzas que actúa sobre un cuerpo puede reducirse a una única resultante. Si de la reducción del conjunto a un punto O surge una resultante **R**, de componentes R_x y R_y, y un par resultante de intensidad $\mathbf{M^o_R}$; quiere decir que se podría haber reducido a una resultante única (que pasa por un punto A, por ejemplo) tal que sea:

$$d = M^o_R / R \qquad \text{ó} \qquad x_A = M^o_R / R_y \qquad (10)$$

Aunque es obvio que siendo ambos sistemas equivalentes, por el Teorema 2 el trabajo virtual de ambos será el mismo, lo demostraremos seguidamente.

Al trabajo virtual del sistema reducido a O: **R,** $\mathbf{M}^o_R$ lo denominaremos TV_O, que será equivalente al trabajo virtual de la resultante **R** en A, que denominaremos TV_A, para el mismo desplazamiento virtual. En este caso elegiremos como DV una traslación y un giro alrededor de O.

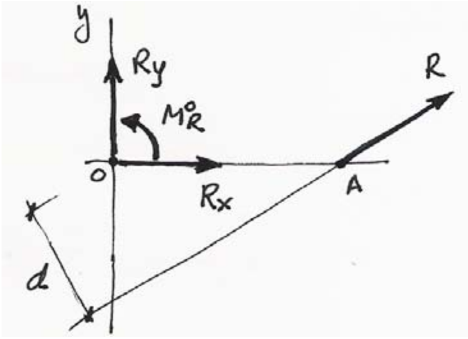

Figura 6

De la (7):

$$TV_O = \delta U \,.\, R_x + \delta V \,.\, R_y + \delta\theta^o \,.\, M^o{}_R \qquad (11)$$

para el mismo DV resulta:

$$TV_A = \delta U \,.\, R_x + \delta V \,.\, R_y + \delta\theta^o \,.\, x_A \,.\, R_y \qquad (12)$$

Si se tiene en cuenta la (10), la (11) y la (12) resulta que son $TV_O = TV_A$, que es lo que se quería demostrar.

TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES para un sistema de cuerpos

Es posible aplicar el TTV a un conjunto isostático de cuerpos vinculados entre sí, con diferentes objetivos:

a) determinar la fuerza de reacción en algún vínculo externo
b) determinar las fuerzas de interacción en algún vínculo interno

El interés principal se centra en determinar sólo uno de los valores sin necesidad de hacer un planteo completo de todo el sistema de ecuaciones de equilibrio o de trabajos virtuales equivalente. En cualquier caso, la cuestión central es la definición del DV del conjunto que permita obtener los resultados deseados.

Una vez definidas las condiciones o restricciones que debe cumplir el DV del sistema para la obtención de los resultados buscados, en primer lugar se debe conocer el desplazamiento de cada cuerpo.

Se ha visto que cualquier desplazamiento de un cuerpo puede reducirse a un único giro (respecto un punto propio o eventualmente impropio si se tratara de una traslación pura). Por ello, el primer problema se reduce a determinar el centro de giro de cada uno de los cuerpos que corresponde al DV definido.

Previamente resultan de interés algunos conceptos y definiciones.

SISTEMA ESTÁTICO y DESPLAZAMIENTO VIRTUAL

En las expresiones de trabajos virtuales aparecen dos grupos claramente diferenciados, uno formado por las magnitudes asimilables a fuerzas, es decir estáticas, entre las que se encuentran las acciones exteriores que actúan sobre los cuerpos, y todas las fuerzas que aparecen como efecto de su acción. Por ejemplo las fuerzas en los vínculos (reacciones de vínculo), las fuerzas de interacción en los vínculos internos cuando se trata de sistemas de varios cuerpos y otros efectos estáticos que dependen del tipo estructural que se considere que podríamos denominar esfuerzos o tensiones internas. A este conjunto lo denominaremos *sistema estático* (SE).

Por otra parte, en *correspondencia* con cada magnitud estática (en la dirección del mismo versor que permite definir cualquier magnitud estática) se puede definir una magnitud geométrica, *complementaria* de la estática en una expresión de trabajo. Al conjunto de éstas y de cualquier otra magnitud que pueda analizarse como consecuencia de los parámetros que definen un movimiento virtual, lo denominaremos *desplazamiento virtual* (DV) generalizando el concepto que enunciáramos inicialmente. Quedarán comprendidos en este grupo los corrimientos de cualquier punto, los giros de los cuerpos, los giros y desplazamientos relativos, etc..

Cada uno de los sumandos de una expresión de trabajos virtuales está formado por el producto de una magnitud estática del SE multiplicada por la magnitud complementaria del DV.

CASO a) – reacciones de vínculo externo

Tratándose de *n* cuerpos en una cadena cinemática abierta, cerrada o mixta, según se ha demostrado sería necesario plantear *3n* ecuaciones de trabajos virtuales (3 para cada cuerpo) para asegurar el equilibrio del conjunto, que serían del tipo

$$TV_i = Te_i + Tve_i + Tvi_i = 0 \qquad (13)$$

en las que Te_i es el trabajo virtual de las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo *i*, Tve_i es el trabajo virtual de las reacciones de los vínculos externos aplicados al cuerpo *i* y Tvi_i es el trabajo virtual de las fuerzas de interacción en los vínculos internos entre el cuerpo *i* y los otros cuerpos a él conectados; todos estos trabajos consecuencia del mismo desplazamiento virtual para cada ecuación.

La resolución del sistema de 3n ecuaciones (13) permitiría conocer todas las fuerzas en todos los vínculos pero significa una tarea equivalente al planteo y resolución de la misma cantidad de ecuaciones de equilibrio según el método estático clásico, sin ninguna ventaja respecto a éste.

Se puede simplificar el método si lo que se desea es determinar el valor de sólo una reacción de vínculo externo, transformando el sistema (13) por suma de todas las ecuaciones, en una única ecuación de trabajos virtuales del sistema, según las indicaciones que se señalaremos a continuación.

Se trata de encontrar un DV tal que sólo realice trabajo la reacción de vínculo que se desea calcular y por lo tanto que las fuerzas de interacción en los vínculos internos entre los cuerpos realicen un trabajo nulo y que las reacciones de los vínculos externos cuyos valores no se deseen calcular no realicen trabajo.

Este DV es el desplazamiento real que tendría un sistema derivado del original, al cual se le ha liberado el vínculo cuya reacción se desea calcular.

Manteniendo las condiciones de vínculo internas se evita que las fuerzas de interacción realicen trabajo en cualquier DV, ya que las fuerzas de vínculo interno -o de interacción entre los cuerpos-, como son conjuntos de fuerzas iguales y de sentido contrario, desarrollarán trabajo virtual nulo mientras se mantenga el vínculo en la concepción del DV. Será entonces $\Sigma\ Tvi_i = 0$ extendiendo la suma a todos lo *n* cuerpos.

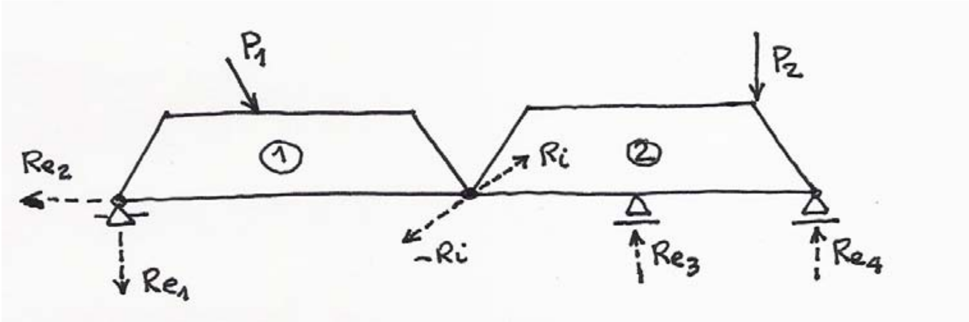

Figura 7

En el ejemplo de la figura, mientras exista el vínculo en B, cualquier DV implicará trabajos virtuales iguales y de signo contrario para Ri y –Ri.

Si se desea que sólo una de las reacciones de vínculo externo realice trabajo en el DV, el sistema en el cual se aplique deberá mantener todos los vínculos salvo aquél en correspondencia con la reacción cuyo valor quiere determinarse. De esta forma el sistema que se deriva del inicial, isostático, tendrá un grado de libertad.

Si se designa con V_e la única reacción que realizará trabajo y con δa la componente del desplazamiento correspondiente con V_e para ese DV, resulta que:

$$\sum_{i=1}^{m} Tve_i = V_e \, . \, \delta a$$

y por lo tanto la ecuación de trabajos virtuales que implica la reducción por suma del sistema (13), será:

$$TV = Te + V_e \, . \, \delta a = 0 \qquad \text{siendo} \qquad Te = \sum_{i=1}^{m} Te_i$$

y entonces:

$$V_e = - 1/\delta a \, . \, Te$$

En conclusión, el problema se reduce a calcular los desplazamiento virtuales correspondientes con las fuerzas exteriores y correspondiente con la reacción que desea calcularse, todos para un mismo DV que anula los corrimientos correspondientes con las restantes reacciones de vínculo. Se transforma así un problema inicialmente estático en uno cinemático, donde toda la complejidad reside en la dificultad de determinar la ubicación del centro de giro de cada cuerpo y la intensidad de su rotación virtual.

CASO b) – fuerzas de interacción en vínculo interno

Este caso es similar al anterior. Para definir el DV hay que quitar una condición de vínculo interno, correspondiente con la componente cuyo valor se desea calcular V_i.

Tendremos:

$$\sum_{i=1}^{s} Tvi_i = V_i \, . \, \delta r$$

siendo δr la variación de distancia entre los puntos de aplicación de la fuerza de interacción V_i. Además:

$$\sum_{i=1}^{v} Tve_i = 0 \quad \text{porque cada uno de sus términos es nulo,}$$

resultando entonces:

$$TV = Te + V_i \cdot \delta r = 0 \qquad \text{o bien,}$$

$$V_i = - 1/\delta r \cdot Te$$

En los sistemas formados por barras, para generar el sistema (DV) con un grado de libertad que permita determinar un esfuerzo característico mediante la aplicación del trabajo virtual, será necesario liberar un grado de libertad interno del esquema estructural de partida en correspondencia con el esfuerzo característico que se desea determinar.

Para ello se puede recurrir a la introducción de un mecanismo típico que depende del esfuerzo interno que se desea hallar. En la figura 8 se muestran los mecanismos, los esfuerzos que permiten poner en evidencia cada uno de ellos, y los desplazamientos correspondientes. Estos, como se ve, resultan ser desplazamientos relativos.

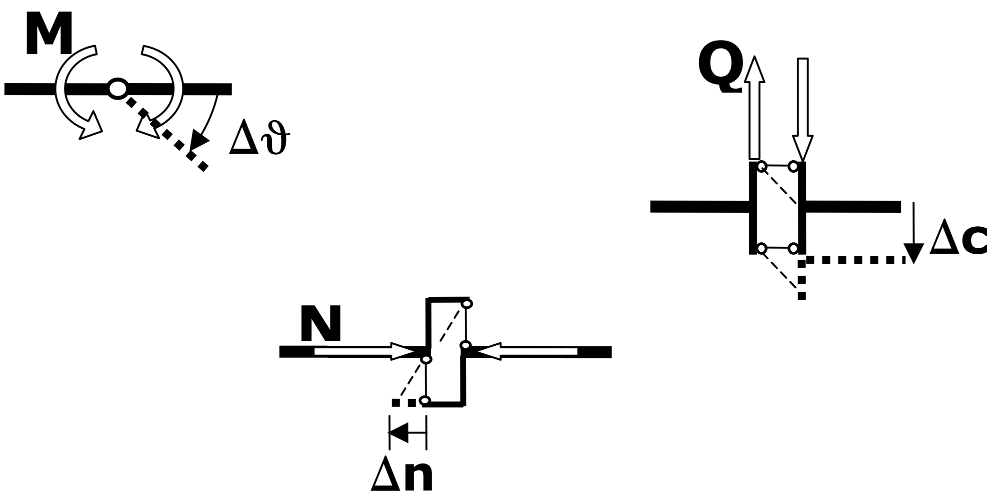

Figura 8