

# 11 - Métodos Numéricos II

## Métodos Numéricos II – Alta frecuencia

### Introducción

En el Capítulo 7 estudiamos distintos métodos para el análisis de campos cuasi-estáticos. Para **alta frecuencia** y variación armónica en el tiempo las ecuaciones de Maxwell llevan a la **ecuación de ondas de Helmholtz** para los campos:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) + \gamma^2 \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{con} \quad \gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon - i \omega \mu \sigma$$

donde, en general, los parámetros del medio (permitividad  $\epsilon$ , permeabilidad  $\mu$  y conductividad  $\sigma$ ) adoptan valores complejos<sup>1</sup>.

El factor  $\gamma$  resulta así complejo:  $\gamma = \beta - i\alpha$ . La parte real  $\beta$  se asocia a un comportamiento de propagación ondulatoria y la parte imaginaria  $\alpha$  se asocia a un comportamiento de atenuación o difusión.

Como la ecuación de Helmholtz se resuelve numéricamente para una frecuencia dada, para determinar la respuesta en frecuencia o analizar la propagación de un pulso, se debe repetir la resolución para todas las frecuencias significativas del espectro. Esto hace necesario mucho tiempo de cálculo, aunque la posibilidad de usar procesamiento paralelo (las soluciones a distintas frecuencias son linealmente independientes) permite reducir estos requerimientos, a expensas del hardware más complejo. Otros métodos, como el FDTD, permiten partir de las ecuaciones de Maxwell y resuelven simultáneamente en el espacio y el tiempo.

Los métodos que hemos introducido para baja frecuencia se pueden usar en alta frecuencia, como vemos en las siguientes secciones. Luego introduciremos tres métodos de uso común en alta frecuencia: FDTD, el método de momentos (MOM) y el método de líneas de transmisión (TLM).

### Separación de variables

El método de separación de variables es básico en muchos campos. Por ejemplo, en un medio sin pérdidas la ecuación de Helmholtz surge de separar las variables espaciales del tiempo en la ecuación de D'Alembert:

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{si} \quad f(\mathbf{r}, t) = f_s(\mathbf{r})T(t) \quad \text{entonces:}$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow \frac{\nabla^2 f_s(\mathbf{r})}{f_s(\mathbf{r})} = -\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2$$

donde cada término de la primera igualdad debe ser constante porque las variables espaciales son independientes del tiempo. Nos quedan así las ecuaciones:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = \omega^2 T \Rightarrow T(t) = e^{\pm i\omega t} \quad (\text{solución armónica, con } \omega = kc)$$

$$\nabla^2 f_s(\mathbf{r}) + k^2 f_s(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{ecuación de Helmholtz})$$

Recordemos que habíamos llegado a la ecuación de Helmholtz a partir de la representación de Fourier de la señal original. Ambos esquemas son equivalentes, ya que se basan en el principio de superposición de soluciones independientes de ecuaciones diferenciales lineales.

Veremos las soluciones de la ecuación de Helmholtz por separación de variables en los tres sistemas coordenados básicos.

<sup>1</sup> En general se trata de tensores complejos.

**Coordenadas cartesianas**

En coordenadas cartesianas:  $f_s(\mathbf{r}) = f_s(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$  y entonces:

$$\nabla^2 f_s + k^2 f_s = 0 \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \\ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \end{cases}$$

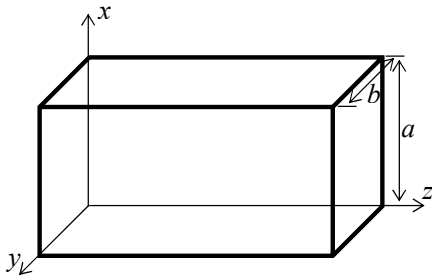
Estas ecuaciones tienen soluciones trigonométricas, hiperbólicas o exponenciales complejas según el tipo de comportamiento que se quiere describir, teniendo en cuenta que en general el parámetro  $k$  es complejo.

Por ejemplo, si elegimos las soluciones:  $X(x) = e^{-ik_x x}$   $Y(y) = e^{-ik_y y}$   $Z(z) = e^{-ik_z z}$

tenemos:  $f_s(\mathbf{r}) = e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Rightarrow f(\mathbf{r}, t) = f_s(\mathbf{r})T(t) = e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$

que representa una onda plana que viaja oblicuamente a la terna de referencia en la dirección y sentido del vector  $\mathbf{k}$ .

**Ejemplo 11-1:** Halle los campos dentro de la guía de ondas de paredes conductoras ideales, interior de aire y sección rectangular de la figura para un modo **TM**.



En el modo **TM** existe solamente campo eléctrico en la dirección de propagación, que tomamos sobre el eje z. En el Capítulo 8 vimos que los campos transversales dentro de una guía se pueden expresar en términos de las componentes longitudinales. Por lo tanto vamos a resolver la ecuación de Helmholtz para  $E_z$  por separación de variables en coordenadas cartesianas.

Elegimos una dependencia funcional de propagación en

la dirección  $z$ :  $Z(z) = e^{-ik_z z}$

Sobre las otras direcciones, la presencia de las paredes conductoras se debe traducir en ondas estacionarias, así que elegimos soluciones trigonométricas:

$$f_s(\mathbf{r}) = [A \text{sen}(k_x x) + B \text{cos}(k_x x)] [C \text{sen}(k_y y) + D \text{cos}(k_y y)] e^{-ik_z z}$$

Aplicamos ahora las condiciones de contorno sobre las paredes de la guía.  $E_z$  es tangencial a todas las paredes y entonces debe anularse sobre ellas porque las consideramos de conductor perfecto. Tenemos así:

$$\begin{cases} x=0: & f_s = 0 \Rightarrow B = 0 \\ x=a: & f_s = 0 \Rightarrow k_x = n\pi/a \end{cases} \quad \begin{cases} y=0: & f_s = 0 \Rightarrow D = 0 \\ y=b: & f_s = 0 \Rightarrow k_y = m\pi/b \end{cases}$$

donde  $n$  y  $m$  son enteros. La componente longitudinal del campo eléctrico queda:

$$\mathbf{TM}_{nm} \quad E_z(\mathbf{r}, t) = E_{0z} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

Se observa que el modo **TM** está ahora definido por dos números enteros, debido a que tenemos condiciones de borde en dos direcciones<sup>2</sup>. Observamos además que:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{n\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi y}{b}\right)^2 + k_z^2 \Rightarrow k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi x}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi y}{b}\right)^2}$$

<sup>2</sup> Si colocamos “tapas” a esta guía transformándola en un paralelepípedo cerrado de paredes conductoras, habrá un tercer número porque también se forman ondas estacionarias en la dirección z. Hablamos entonces de un modo  $\mathbf{TM}_{nml}$ . Sólo frecuencias  $\omega_{nml} = c k_{nml}$  satisfacen las condiciones de borde y pueden existir dentro del paralelepípedo. Este es un dispositivo que selecciona frecuencias, es decir, un dispositivo sintonizado o resonante, que se conoce como cavidad resonante o resonador de cavidad.

y es real sólo si la frecuencia es igual o mayor que la frecuencia de corte:  $\omega \geq \omega_c$

$$\omega_c = c \sqrt{\left(\frac{n\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi y}{b}\right)^2}$$

y entonces no hay propagación para frecuencias menores a la frecuencia de corte. Se ve que hay una frecuencia de corte para cada modo  $\mathbf{TM}_{nm}$ .

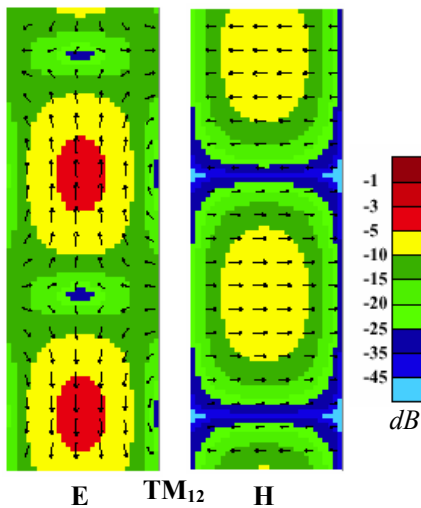
Las otras componentes (transversales) del campo dentro de la guía se obtienen a partir de las ecuaciones de la pág. 401:

$$E_x = -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{ik_z k_x}{k_t^2} E_{0z} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

$$E_y = -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{ik_z k_y}{k_t^2} E_{0z} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

$$H_x = \frac{i\omega\epsilon}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{i\omega\epsilon k_y}{k_t^2} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

$$H_y = -\frac{i\omega\epsilon}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{i\omega\epsilon k_x}{k_t^2} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{i(\omega t - k_z z)}$$



Se observa que las componentes tangenciales a las paredes del campo eléctrico se anulan mientras que las componentes tangenciales del campo magnético son máximas sobre las paredes. Se puede demostrar también que sólo hay flujo medio de potencia en la dirección de propagación  $z$  para  $\omega \geq \omega_c$ .

En la figura se ve un esquema de las líneas de campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  sobre una sección horizontal  $xz$  para un modo  $\mathbf{TM}_{12}$ . La dirección de propagación es vertical. Las líneas de campo  $\mathbf{H}$  son uniformes en la dirección  $x$ , normal a la propagación. Las líneas de campo  $\mathbf{E}$  son abiertas y de geometría similar a las halladas en la propagación entre planos paralelos.

Este mismo análisis puede hacerse para un modo  $\mathbf{TE}$ , donde se resuelve la ecuación de Helmholtz por separación de variables para el campo longitudinal  $E_z$ . En este caso el campo longitudinal debe ser máximo sobre las

paredes. La frecuencia de corte tiene la misma expresión que en el modo  $\mathbf{TM}$ .

La gráfica de los campos en el interior de la guía se obtuvo con el programa "Waveguides and Cavities", WGC, versión 2.2, desarrollado por A.Z. Elsherbeni y C.D. Taylor Jr., de la Universidad de Mississippi. (WGCALC.ZIP, en el ftp de la materia).

### Coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas la ecuación de Helmholtz resulta:

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0$$

y separamos variables en la forma:

$$f(\rho, \phi, z) = R(\rho) \Psi(\phi) Z(z) \Rightarrow \frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2$$

Multiplicamos por  $\rho^2$  y reagrupamos:  $\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{\rho^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = \lambda^2$

Dado que el primer miembro de la igualdad depende de  $\rho$  y de  $z$ , mientras que el segundo depende solamente de  $\phi$ .

Tenemos: 
$$\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} + \lambda^2\Psi = 0 \Rightarrow \Psi(\phi) = e^{\pm i\lambda\phi}$$

Ya que debe ser:  $\Psi(\phi + 2\pi) = \Psi(\phi) \Rightarrow \lambda = n \Rightarrow \Psi(\phi) = e^{\pm in\phi}$  con  $n$  entero.

Queda así: 
$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{\rho^2}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 \rho^2 = n^2$$
 y dividiendo nuevamente por  $\rho^2$  y re-

agrupando: 
$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 - \frac{n^2}{\rho^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = k_z^2$$

Tenemos: 
$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \Rightarrow Z(z) = e^{\pm ik_z z}$$

y la última ecuación en  $\rho$ : 
$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 - k_z^2 - \frac{n^2}{\rho^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left( k_t^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

con:  $k_t^2 = k^2 - k_z^2$ , que es nuevamente la **ecuación de Bessel**, que tiene soluciones:

$k_t$  real :

$$R(\rho) = A J_n(k_t \rho) + B Y_n(k_t \rho)$$

$$R(\rho) = A H_n^{(1)}(k_t \rho) + B H_n^{(2)}(k_t \rho)$$

$k_t$  imaginario :

$$R(\rho) = A I_n(k_t \rho) + B K_n(k_t \rho)$$

$$R(\rho) = A H_n^{(3)}(k_t \rho) + B H_n^{(4)}(k_t \rho)$$

Para  $k_t$  real soluciones independientes son las funciones de Bessel y Neumann, por una parte, y las funciones de Hankel (soluciones ondulatorias) de primera y segunda especie, por otra.

Para  $k_t$  imaginario soluciones independientes son las funciones modificadas de Bessel y Neumann, por una parte, y las funciones de Hankel modificadas (soluciones ondulatorias) de primera y segunda especie, por otra.

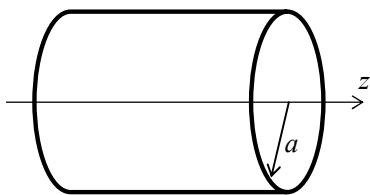
La solución obtenida en esta sección generaliza la obtenida como onda cilíndrica elemental en la pág. 8-12, que se obtiene tomando  $n = 0$  y  $k_z = 0$ .

Por superposición, nos queda la siguiente solución:

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_{N=0}^{\infty} [A_n f_n(k_t \rho) + B_n g_n(k_t \rho)] [C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi)] e^{i(\omega t - k_z z)}$$

donde  $f_n$  y  $g_n$  son cada par de funciones de Bessel linealmente independientes definidas en lo precedente.

**Ejemplo 11-2:** Halle los campos dentro de la guía de ondas de paredes conductoras ideales, interior de aire y sección circular de la figura para un modo **TM**.



La solución respecto de  $z$  es una onda viajera, por lo que  $k_z$  debe ser real. Como además:  $k_z = \sqrt{k^2 - k_t^2} = \sqrt{\omega^2/c^2 - k_t^2}$  surge que la frecuencia de la onda debe ser:  $\omega > \omega_c = ck_t$  y que además  $k_t$  debe ser real.

Con estas condiciones tenemos para la expresión del campo longitudinal (en este caso  $E_z$  para un modo **TM**):

$$E_z(\mathbf{r}, t) = \sum_{N=0}^{\infty} [A_n J_n(k_t \rho) + B_n Y_n(k_t \rho)] [C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi)] e^{i(\omega t - k_z z)}$$

Podemos reducir el número de C observando que podemos escribir:

$$C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi) = E_n \cos(n\phi + \psi) = E_n \cos(n\phi) \cos(\psi) - E_n \sin(n\phi) \sin(\psi)$$

$$\begin{aligned} C_n &= E_n \cos(\psi) \\ D_n &= -E_n \sin(\psi) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} E_n &= \sqrt{C_n^2 + D_n^2} \\ \psi &= -\tan^{-1}(D_n/C_n) \end{aligned}$$

y girando el sistema de coordenadas de modo de tener  $\psi = 0$ . Entonces:

$$E_z(\mathbf{r},t) = \sum_{N=0}^{\infty} [A_n J_n(k_t \rho) + B_n Y_n(k_t \rho)] \cos(n\phi) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

Además, todos los coeficientes  $B_n$  deben anularse porque las funciones de Neumann son

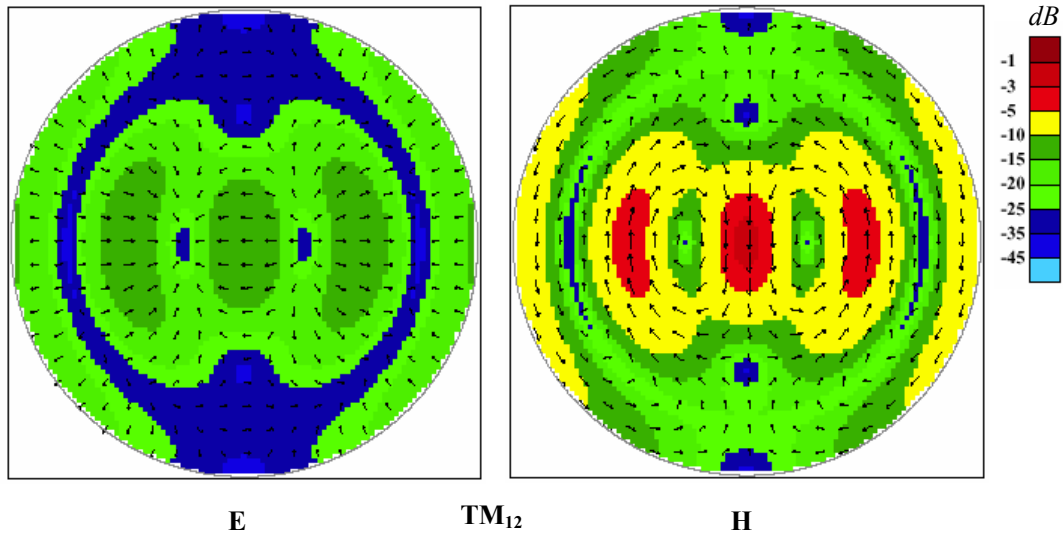
singulares para  $\rho = 0$ :  $E_z(\mathbf{r},t) = \sum_{N=0}^{\infty} A_n J_n(k_t \rho) \cos(n\phi) e^{i(\omega t - k_z z)}$

El campo  $E_z$  debe anularse sobre la pared de la guía:  $J_n(k_t a) = 0$  y entonces el argumento debe ser un cero de la correspondiente función de Bessel. Obsérvese que para cada orden  $n$  hay muchos ceros, pero para valores discretos del argumento, lo que limita los valores de  $k_t$  a un conjunto discreto de modos normales. En la siguiente tabla presentamos los primeros cinco ceros de las primeras funciones de Bessel:  $J_n(x_{nm}) = 0$

$n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	$x_{n3}$	$x_{n4}$	$x_{n5}$
<b>0</b>	2.40483	5.52008	8.65373	11.7915	14.9309
<b>1</b>	3.83171	7.01559	10.1735	13.3237	16.4706
<b>2</b>	5.13562	8.41724	11.6198	14.7960	17.9598
<b>3</b>	6.38016	9.76102	13.0152	16.2235	19.4094
<b>4</b>	7.58834	11.0647	14.3725	17.6160	20.8269

De estos valores surgen los valores permitidos de  $k_t$  y de éstos las frecuencias de corte para cada modo. Finalmente los coeficientes restantes pueden calcularse si se conoce la forma de excitación de la guía en una representación en desarrollo en funciones ortogonales de esa función de excitación, usando las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel.

En las figuras se muestran las líneas de campo en la sección transversal de una guía cilíndrica en el modo  $\mathbf{TM}_{12}$ , obtenidas con el programa WGC antes mencionado.



**Coordenadas esféricas**

En coordenadas esféricas la ecuación de Helmholtz puede escribirse:

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + k^2 f = 0$$

Planteamos la separación de variables:  $f(\mathbf{r}) = f(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

y tenemos: 
$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -k^2$$

Multiplicamos por  $r^2 \sin^2 \theta$  :

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + k^2 r^2 \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = m^2$$

Elegimos como constante de separación un entero al cuadrado por la unicidad de la función  $\Phi(\phi)$  al girar  $2\pi$ , como vimos en la sección precedente. Nos queda:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\phi) = A_m \cos(m\phi) + B_m \sin(m\phi)$$

Volvemos a separar variables:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = \lambda$$

y tenemos para la ecuación en  $\theta$ : 
$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \left( \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \lambda \right) \Theta = 0$$

Cambiamos de variable con  $\beta = \cos \theta \Rightarrow (1 - \beta^2) \frac{d^2 \Theta}{d\beta^2} - 2\beta \frac{d\Theta}{d\beta} + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - \beta^2} \right) \Theta = 0$

Esta ecuación tiene polos en  $\beta = \pm 1$  ( $\theta = 0, \pi$ ) y admite un desarrollo en serie con singularidades en esos puntos. Esto no es admisible ya que la solución buscada representa campos que no pueden ser singulares. Sin embargo, si se toma  $\lambda = n(n+1)$ , con  $n$  entero, el desarrollo se convierte en un polinomio en  $\beta$  que es regular para todo el intervalo  $|\beta| \leq 1$ . Estos polinomios se denominan **polinomios asociados de Legendre**  $P_m^n(\beta)$ . Para  $m = 0$  estas funciones se convierten en los polinomios de Legendre que vimos en el Capítulo 5.

Entonces: 
$$\Theta(\theta) = P_m^n(\cos \theta)$$

Finalmente, la ecuación radial resulta: 
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0$$

Si llamamos  $R(r) = r^{-1/2} Z(r)$  nos queda la ecuación:

$$\frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dZ}{dr} + \left( k^2 - \frac{(n+1/2)^2}{r^2} \right) Z = 0$$

Esta es una ecuación de Bessel pero de orden semientero. Por lo tanto la solución será:

$$Z(r) = F_{n+1/2}(kr) \Rightarrow R(r) = r^{-1/2} F_{n+1/2}(kr) \quad \text{donde } F_\nu \text{ es cualquiera de las funciones de Bessel que hemos visto de orden semientero.}$$

Se definen las **funciones esféricas de Bessel**:

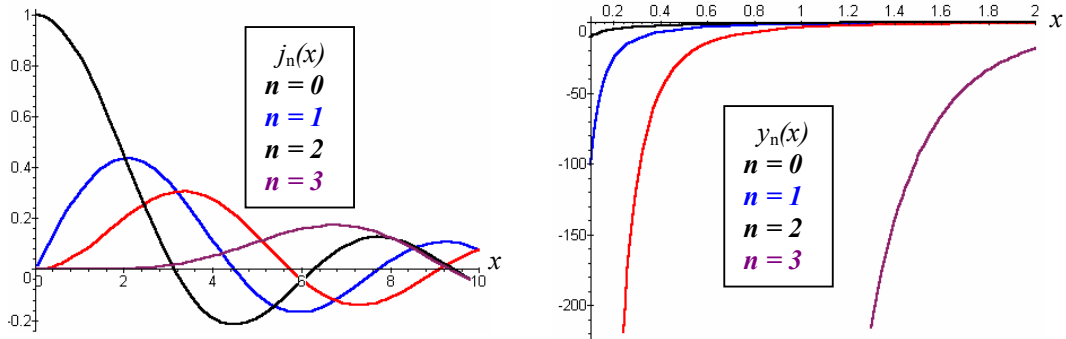
$$f_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} F_{n+1/2}(x)$$

donde nuevamente  $F_\nu$  es cualquiera de las funciones de Bessel semienteras. En particular, las funciones más comunes:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) \quad h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_n^{(1)}(x) \quad h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_n^{(2)}(x)$$

Las primeras funciones esféricas de Bessel admiten expresiones sencillas:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad y_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \quad h_0^{(1),(2)}(x) = \frac{e^{\pm ix}}{x}$$



**Comportamiento en los extremos**

Para pequeños argumentos, es posible desarrollar las funciones de Bessel esféricas en serie de Taylor. Resultan los primeros términos:

$$x \rightarrow 0: \quad j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \approx \frac{\sqrt{\pi} x^n}{2^{n+1} \Gamma(n+3/2)} \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) \approx -\frac{2^n \Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi} x^{n+1}}$$

Para grandes argumentos, podemos usar las formas asintóticas de las funciones de Bessel:

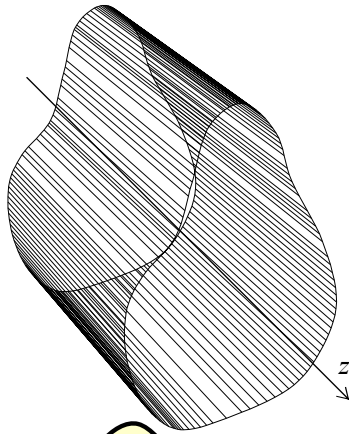
$$x \rightarrow \infty: \quad j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \approx \frac{1}{x} \cos\left[x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right] \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) \approx \frac{1}{x} \sin\left[x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

Finalmente, la solución de la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas es:

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n f_n(kr) + B_n g_n(kr)] P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi)$$

donde  $\{f_n, g_n\}$  es cualquiera de los pares de funciones esféricas de Bessel linealmente independientes y hemos elegido el sistema de coordenadas para eliminar los términos en  $\sin(m\phi)$ , como en el Ejemplo precedente.

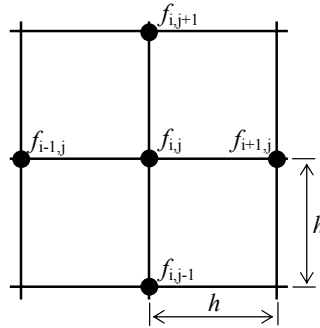
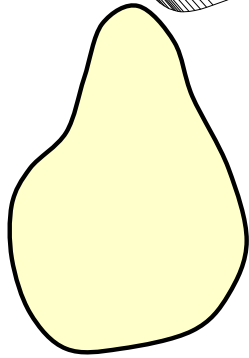
**Método de diferencias finitas 1 – Relajación**



El procedimiento de diferencias finitas que se utilizó para resolver numéricamente la ecuación de Poisson en el Capítulo 5 se puede extender a la resolución de la ecuación de Helmholtz para estructuras cilíndricas de guiado de ondas como la de la figura. Si se acepta que existe propagación a lo largo de  $z$ , la ecuación de Helmholtz se reduce a una ecuación de Helmholtz transversal:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) &= 0 \\ f(\mathbf{r}) &= f_t(x, y) e^{-ik_z z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla_t^2 f_t(x, y) + k_t^2 f_t(x, y) = 0$$

donde:  $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  ,  $k_t^2 = k^2 - k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$



La ecuación transversal de Helmholtz se debe resolver sobre una sección recta ( $xy$ ) cualquiera de la guía. Dentro de esta sección construimos una malla que, para nuestros propósitos, consideraremos cuadrada, de paso  $h$ .

Entonces, con las mismas aproximaciones del Capítulo 5, la ecuación de Helmholtz transversal se puede aproximar a la ecuación de diferencias:

$$\nabla_t^2 f + k_t^2 f = 0 \Rightarrow \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{h^2} + \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{h^2} + k_t^2 f_{i,j} \approx 0$$

donde hemos suprimido por claridad el subíndice de la función  $f_t$ . De esta ecuación se obtiene la ecuación de relajación:

$$f_{i,j}^{(n)} = \frac{f_{i-1,j}^{(n-1)} + f_{i+1,j}^{(n-1)} + f_{i,j-1}^{(n-1)} + f_{i,j+1}^{(n-1)}}{4 - h^2 k_t^2}$$

o las ecuaciones de sobrerrelajación:  $f_{i,j}^{(n)} = f_{i,j}^{(n-1)} + \omega^{(n)} \delta_{i,j}^{(n)}$

donde:  $\delta_{i,j}^{(n)} = f_{i,j}^{(n)} - f_{i,j}^{(n-1)} = \frac{f_{i-1,j}^{(n-1)} + f_{i+1,j}^{(n-1)} + f_{i,j-1}^{(n-1)} + f_{i,j+1}^{(n-1)}}{4 - h^2 k_t^2} - f_{i,j}^{(n-1)}$

y:  $\omega^{(0)} = 1$        $\omega^{(n)} = \frac{1}{1 - \rho_J^2 \omega^{(n-1)} / 4}$        $\rho_J = \cos(N\pi)$

siendo  $N+1$  el número de nodos en la malla sobre cada dirección.

En estas ecuaciones existe otra incógnita además del valor de  $f_{i,j}$ : el número de onda transversal  $k_t = \sqrt{\omega^2/c^2 - k_z^2}$ , que depende de la frecuencia pero también del modo de propagación. Se puede estimar el valor de  $k_t$  usando el siguiente razonamiento. De la ecuación de Helmholtz transversal:  $\nabla_t^2 f + k_t^2 f = 0 \Rightarrow f \nabla_t^2 f + k_t^2 f^2 = 0$

e integrando sobre toda la sección nos queda:

$$k_t^2 = \frac{\int_S f \nabla_t^2 f \, dS}{\int_S f^2 \, dS}$$

que se conoce como **fórmula de Raleigh**. En el esquema de diferencias, las integrales sobre la sección se convierten en sumas sobre todos los nodos. En particular:



$$\int_S f^2 dS \approx \sum_{i=1}^N (f_{i,j}^{(n)})^2 \quad \int_S f \nabla_t^2 f dS = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N f_{i,j}^{(n)} (f_{i-1,j}^{(n)} + f_{i+1,j}^{(n)} + f_{i,j-1}^{(n)} + f_{i,j+1}^{(n)} - 4f_{i,j}^{(n)})$$

y entonces:

$$k_t^2 = \frac{\int_S f \nabla_t^2 f dS}{\int_S f^2 dS} = \frac{\sum_{i=1}^N f_{i,j}^{(n)} (f_{i-1,j}^{(n)} + f_{i+1,j}^{(n)} + f_{i,j-1}^{(n)} + f_{i,j+1}^{(n)} - 4f_{i,j}^{(n)})}{h^2 \sum_{i=1}^N (f_{i,j}^{(n)})^2}$$

Por lo tanto, en cada iteración se calcula el correspondiente valor de  $k_t$  usando los valores de las funciones calculados en la iteración previa.

### Método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD)

En la sección precedente hemos presentado el método de diferencias finitas para una ecuación de Helmholtz bidimensional, un procedimiento desarrollado fundamentalmente para analizar guías de ondas. Para otros problemas, como por ejemplo la propagación en estructuras o la dispersión (scattering) se requiere utilizar un esquema en el dominio del tiempo que describa la evolución de las ondas. Un esquema de este tipo se puede expresar en diferencias finitas.

Recordamos que en un recinto sin fuentes de campo las ecuaciones de Maxwell de la divergencia:  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  describen la transversabilidad de la propagación, mientras que las ecuaciones del rotor:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu \partial \mathbf{H} / \partial t = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E} - \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t = 0 = 0$$

establecen las relaciones de autosostenimiento de los campos en la propagación.

### Ecuaciones de Yee

Las ecuaciones del rotor se pueden escribir por componentes en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \end{aligned} \quad \text{De}$$

finamos una grilla tridimensional cúbica tal que el punto  $(i,j,k)$  está definido por:

$x_i = ih \quad y_j = jh \quad z_k = kh$  y sea  $f^n(i,j,k)$  el valor de una cualquiera de las componentes del campo en ese punto y en el instante  $n\Delta t$ . Las derivadas espaciales y temporales se pueden escribir por diferencias en la forma:

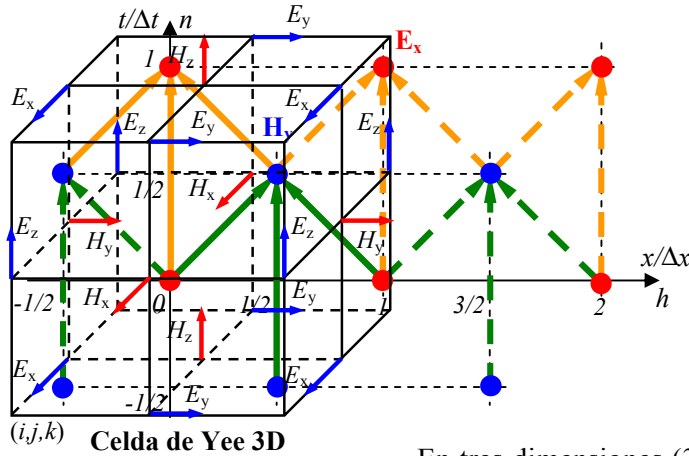
$$\frac{\partial f^n(i,j,k)}{\partial x} \approx \frac{f^n(i+1/2,j,k) - f^n(i-1/2,j,k)}{h} \quad \frac{\partial f^n(i,j,k)}{\partial t} \approx \frac{f^{n+1/2}(i,j,k) - f^{n-1/2}(i,j,k)}{\Delta t}$$

Yee define una celda de cálculo de modo que las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son calculadas en posiciones interlacedas y en pasos alternados de tiempo. Podemos ilustrar el algoritmo en una dimensión, por simplicidad. Supongamos un campo TEM que se propaga en la dirección  $z$ , con campo  $\mathbf{E}$  sobre  $x$  y campo  $\mathbf{H}$  sobre  $y$ . Las ecuaciones del rotor son entonces:

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} + \sigma E_x \right) \quad \text{que en diferencias finitas se pueden escri-$$

bir:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_y}{\partial t} \right|_{i+1/2,n} &= -\frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial E_x}{\partial z} \right|_{i+1/2,n} \Rightarrow H_y^{n+1/2}(k+1/2) = H_y^{n-1/2}(k+1/2) + \frac{\Delta t}{\mu h} [E_x^n(k) - E_x^n(k+1)] \\ \left. \frac{\partial E_x}{\partial t} \right|_{k,n+1/2} &= -\frac{1}{\varepsilon} \left( \left. \frac{\partial H_y}{\partial z} + \sigma E_x \right) \right|_{k,n+1/2} \Rightarrow E_x^{n+1}(k) = \left( 1 - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} \right) E_x^n(k) + \frac{\Delta t}{\varepsilon h} [H_y^{n+1/2}(k-1/2) - H_y^{n+1/2}(k+1/2)] \end{aligned}$$



En la figura de la izquierda se muestra el proceso de cálculo alternativo, en la forma de un "salto de rana". En los nodos rojos se calcula el campo eléctrico y en los nodos azules el campo magnético. Las flechas verdes ilustran la ecuación para el campo magnético y las flechas naranjas la ecuación para el campo eléctrico. Las flechas en trazo lleno corresponden a la iteración de las ecuaciones precedentes. El esquema se repite en ambas direcciones del plano de cálculo.

En tres dimensiones (3D) se tiene la **celda de Yee** de la figura en la página siguiente. Se observa que todas las componentes están presentes en cada cuarto de celda.

En 3D las seis ecuaciones diferenciales en las componentes, que surgen de las ecuaciones del rotor, llevan a las siguientes ecuaciones de diferencias:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \Rightarrow H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) = H_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\mu h} [E_y^n(i, j+1/2, k+1) - E_y^n(i, j+1/2, k) + E_z^n(i, j, k+1/2) - E_z^n(i, j+1, k+1/2)] \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \Rightarrow H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) = H_y^{n-1/2}(i+1/2, j, k+1/2) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\mu h} [E_z^n(i+1, j, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2) + E_x^n(i+1/2, j, k) - E_x^n(i+1/2, j, k+1)] \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \Rightarrow H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) = H_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2, k) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\mu h} [E_x^n(i+1/2, j+1, k) - E_x^n(i+1/2, j, k) + E_y^n(i, j+1/2, k) - E_y^n(i+1, j+1/2, k)] \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \Rightarrow E_x^{n+1}(i+1/2, j, k) = \left( 1 - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} \right) E_x^n(i+1/2, j, k) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\varepsilon h} [H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j-1/2, k) + H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2)] \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \Rightarrow E_y^{n+1}(i, j+1/2, k) = \left( 1 - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} \right) E_y^n(i, j+1/2, k) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\varepsilon h} [H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k-1/2) + H_z^{n+1/2}(i-1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k)] \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \Rightarrow E_z^{n+1}(i, j, k+1/2) = \left( 1 - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} \right) E_z^n(i, j, k+1/2) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\varepsilon h} [H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i-1/2, j, k+1/2) + H_x^{n+1/2}(i, j-1/2, k+1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2)] \end{aligned}$$

Para asegurar la **precisión** de los resultados del método, el incremento espacial  $h$  debe ser pequeño respecto de la longitud de onda ( $< \lambda/10$ ) o la mínima dimensión del objeto dispersor. Para

asegurar la **estabilidad** del procedimiento iterativo se requiere que se cumpla la siguiente condición:

$$\frac{h}{v_M \Delta t} \geq \sqrt{N}$$

donde  $v_M$  es la velocidad máxima de las ondas en el recinto de integración y  $N$  el número de dimensiones espaciales.

El método FDTD se aplica habitualmente a problemas de propagación y dispersión (scattering) de ondas. Los dos problemas básicos son:

- determinar las condiciones de frontera de los campos en los bordes del recinto de integración,
- determinar la inclusión de las fuentes que dan origen al campo dentro del recinto de integración.

Dado que en la práctica no es posible trabajar con recintos infinitos, aún cuando el problema físico requiera una solución en un recinto ilimitado, se requiere introducir algún tipo de frontera artificial. Las fronteras deben colocarse lejos de las estructuras cuyo comportamiento se desea analizar. Las condiciones de frontera usadas para simular un recinto indefinido son las condiciones de **no reflexión** o **absorción**. Estas condiciones simulan ondas que se propagan más allá de la frontera sin reflexión.

En cuanto a las "condiciones iniciales" el método usualmente simula una onda plana incidente, en forma de pulso o monocromática.

Hay numerosas implementaciones de FDTD en uso actualmente, ya que se trata del método más popular para la simulación de ondas que se propagan en guías, microstrips, y para cálculo de efectos de compatibilidad electromagnética (EMC), especialmente en circuitos impresos (PCB).

Sin embargo, la mayoría son programas comerciales de alto costo. Hay una implementación gratuita, llamada **WINFDTD**<sup>3</sup>, que está disponible en el ftp de la materia.

---

<sup>3</sup> Desarrollada por Fabian Kung Wai Lee, Faculty of Engineering, Multimedia University, 63100 Cyberjaya, Selangor, MALAYSIA

## Método de momentos (MoM)

Este método de cálculo es uno de los más usados en la actualidad para determinar los campos emitidos o recibidos por estructuras radiantes. En el primer caso se supone que una fuente externa establece corrientes variables en el tiempo en los conductores de la antena, y se calculan los campos generados por ellas (**antena emisora**), mientras que en el segundo se supone que una onda (habitualmente plana) incide sobre la estructura induciendo corrientes variables en el tiempo sobre ella. Este último caso puede analizarse desde el punto de vista de la fem útil inducida sobre los conductores (**antena receptora**) o con el objetivo de calcular los campos re-irradiados por la estructura para analizar sus propiedades de **dispersión (scattering)** de ondas electromagnéticas.

### Operadores lineales

El corazón del método reside en la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, que desde el punto de vista matemático se puede representar mediante operadores lineales aplicados a funciones de las coordenadas espaciales y el tiempo. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales vectoriales de la radiación llevan a ecuaciones diferenciales escalares del tipo:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = g \quad \Rightarrow \quad \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = g \quad \Rightarrow \quad \square f = g$$

donde aparece el operador lineal llamado **dalembertiano**:  $\square = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2}$ .

En esta ecuación  $g(\mathbf{r}, t)$  es la **excitación** o **fuerza** (función conocida) y  $f(\mathbf{r}, t)$  es el campo o respuesta (incógnita a ser determinada). El problema se dice **determinístico** cuando la solución es única, es decir, hay una sola  $f(\mathbf{r}, t)$  para cada  $g(\mathbf{r}, t)$ .

Este es un caso particular de la ecuación lineal:  $L(f) = g$

donde  $L$  es un operador lineal.

Existen dos problemas básicos:

- El problema del **análisis** involucra hallar  $f(\mathbf{r}, t)$  dados  $L$  y  $g(\mathbf{r}, t)$ . En este caso se conoce el sistema y la excitación, y se desea hallar la respuesta, mientras que
- el problema de la **síntesis** involucra determinar  $L$  cuando se dan  $f(\mathbf{r}, t)$  y  $g(\mathbf{r}, t)$ . En este caso dadas la excitación y la respuesta deseada, se pide hallar el sistema que la produce.

Las funciones  $f(\mathbf{r}, t)$  satisfacen determinadas condiciones. Por una parte, es necesario poder definir un **producto interno**  $\langle f_1, f_2 \rangle$ , que es un escalar definido por:

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \langle f_2, f_1 \rangle \\ \langle \alpha f_1 + \beta f_2, f_3 \rangle &= \alpha \langle f_1, f_3 \rangle + \beta \langle f_2, f_3 \rangle \\ \langle f, f^* \rangle &> 0 \quad \text{si } f \neq 0 \\ \langle f, f^* \rangle &= 0 \quad \text{si } f = 0 \end{aligned}$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares y el símbolo  $(^*)$  denota el complejo conjugado.

La **norma** de una función se define como:  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f^* \rangle}$  y corresponde al concepto euclidiano de longitud.

La **métrica** de dos funciones es:  $d(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|$  y corresponde al concepto euclidiano de distancia.

Se define el **operador adjunto**  $L^a$  como:  $\langle L(f_1), f_2 \rangle = \langle f_1, L^a(f_2) \rangle$

Si la solución de la ecuación operacional  $L(f) = g$  existe, entonces existe el **operador inverso**  $L^{-1}$  definido por:  $f = L^{-1}(g)$ .

El **método de momentos**<sup>4</sup> es un procedimiento general de resolución de ecuaciones operacionales lineales. Las funciones solución se representan como un desarrollo en serie de **funciones base**  $f_1, f_2, \dots$ :

$$f = \sum_n \alpha_n f_n$$

donde los factores  $\alpha_n$  son coeficientes constantes. Generalmente las series son infinitas, y las funciones base forman un conjunto completo, aunque en los casos prácticos se obtienen series finitas que dan una solución aproximada al problema.

Definido el conjunto de funciones base, se tiene:

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g$$

Definimos ahora un conjunto de **funciones peso** o **funciones de testeo**  $w_1, w_2, \dots$  con lo que nos queda:

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, L(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Esto representa un conjunto de  $n$  ecuaciones lineales en los coeficientes  $\alpha_n$ , que pueden escribirse en forma matricial como:

$$[L_{mn}][\alpha_n] = [g_m]$$

donde:

$$[L_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, L(f_1) \rangle & \langle w_1, L(f_2) \rangle & \dots \\ \langle w_2, L(f_1) \rangle & \langle w_2, L(f_2) \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad [\alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \end{bmatrix} \quad [g_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \dots \end{bmatrix}$$

Si la matriz  $[L_{mn}]$  es no singular, existe su inversa y podemos calcular los coeficientes  $\alpha_n$ :

$$[\alpha_n] = [L_{mn}]^{-1} [g_m]$$

Esta solución se conoce como el **método de Galerkin** cuando se toma  $w_n = f_n$ .

La elección del conjunto de funciones base es la clave para el adecuado comportamiento del método. Existen al menos dos formas básicas de elegir este conjunto:

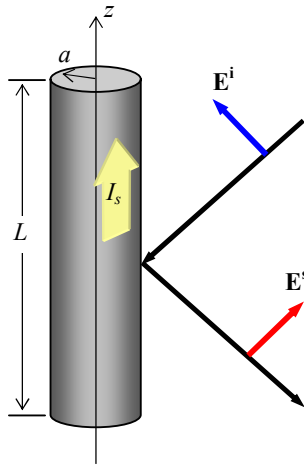
- Ajuste por puntos (point-matching)**: La integración involucrada en el cálculo de los elementos  $\langle w_n, L(f_n) \rangle$  de la matriz  $[L_{mn}]$  puede ser de difícil evaluación en términos prácticos. Una forma de obtener soluciones aproximadas es requerir que la condición  $L(f) = g$  se cumpla solamente en un conjunto discreto de puntos de la región de interés. Este método de ajuste por puntos corresponde a usar deltas de Dirac como funciones de testeo.
- Bases subseccionales**: En muchos casos se definen funciones base cada una de las cuales existe sólo en subsecciones de la región de interés. Entonces cada coeficiente  $\alpha_n$  afecta la aproximación a la solución  $f$  sólo sobre una subsección, lo que lleva a matrices más despoladas y de más sencilla inversión numérica

<sup>4</sup> R.F. Harrington, "Matriz Methods for Field Problems", Proc.IEEE, 55 ,pp.136-149, 1967, y "Field Computations by Moment Methods", Mc Millan, New York (1968).

**Aplicación a antenas**

Consideremos una estructura formada por material conductor. Sobre esta estructura incide una onda electromagnética, que induce la circulación de corrientes variables en el tiempo. Estas corrientes, a su vez, generan una onda electromagnética radiada. Por lo tanto, en cualquier punto del espacio el campo total es la superposición del campo incidente  $\mathbf{E}^i$  y el radiado o dispersado por la estructura  $\mathbf{E}^s$ :  $\mathbf{E}^t = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$ .

En el problema se conoce el campo incidente (para antenas el campo "incidente" se concentra en los sitios de alimentación de la antena y en un problema de dispersión habitualmente se supone que el campo incidente es una onda plana) y se desea calcular el campo radiado o dispersado. El método de momentos se usa para calcular la distribución de corriente sobre la estructura radiante.



Cualquier estructura conductora se puede representar como una superposición de alambres rectos. Consideramos entonces un alambre conductor cilíndrico recto de radio mucho menor que su longitud (esto no es necesario, pero simplifica el tratamiento). Si suponemos que el conductor se comporta aproximadamente como un conductor perfecto, las condiciones de contorno impuestas sobre su superficie anulan el campo eléctrico total e imponen la circulación de una corriente superficial  $I_s$  para la conservación del campo magnético. Es esta corriente la responsable de generar el campo radiado o dispersado. Entonces, para  $\rho = a$ :

$$\mathbf{E}^t|_{\rho=a} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0 \Rightarrow E_z^t|_{\rho=a} = E_z^i|_{\rho=a} + E_z^s|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow E_z^s|_{\rho=a} = -E_z^i|_{\rho=a}$$

El campo dispersado, a su vez, se puede expresar en términos del potencial vectorial electrodinámico generado por la corriente que circula por el alambre conductor:

$$\mathbf{E}^s = -\nabla\Phi + i\omega\mathbf{A} = \frac{i}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + i\omega\mathbf{A} = \frac{i}{\omega\mu\epsilon} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + k^2\mathbf{A}]$$

donde se ha usado la condición de Lorentz:  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{i}{\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{A}$

para expresar  $\Phi$  en función de  $\mathbf{A}$ . El fasor  $\mathbf{A}$  puede calcularse con:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} I_s(\mathbf{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} \hat{\mathbf{z}} dz' \Rightarrow A_z(\mathbf{r}) = \mu \int_{-L/2}^{L/2} I_s(z') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dz'$$

donde  $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R}$  es la llamada **función de Green** de la dispersión y

hemos supuesto que la distribución de corriente es uniforme sobre la sección del alambre. Como  $\mathbf{A}$  sólo tiene componente  $z$ , el campo dispersado resulta:

$$\mathbf{E}^s = \frac{i}{\omega\mu\epsilon} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + k^2\mathbf{A}] = \frac{i}{\omega\mu\epsilon} \left[ \nabla \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + k^2\mathbf{A} \right]$$

y sobre la superficie del conductor ( $\rho = a$ ):

$$E_z^s|_{\rho=a} = -E_z^i|_{\rho=a} = \frac{i}{\omega\mu\epsilon} \left[ \nabla_z \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + k^2 A_z \right] = \frac{i}{\omega\mu\epsilon} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right)$$

Reemplazamos  $A_z$  por su expresión en términos de la función de Green:

$$\frac{i}{\omega\mu\epsilon} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right) \Big|_{\rho=a} = -E_z^i|_{\rho=a} \Rightarrow \frac{i}{\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-L/2}^{L/2} I_s(z') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\rho=a} dz' = -E_z^i|_{\rho=a}$$

y finalmente obtenemos la **ecuación integral de Pocklington** (1897):

$$\frac{i}{\omega\mu\epsilon} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right) \Big|_{\rho=a} = -E_z^i \Big|_{\rho=a} \Rightarrow \int_{-L/2}^{L/2} I_s(z') \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\rho=a} dz' = i\omega\epsilon E_z^i \Big|_{\rho=a}$$

Todas las expresiones en las ecuaciones anteriores corresponden a funciones armónicas. El método de momentos debe resolverse **cada vez** para cada frecuencia de interés. Se dice que es un método en el dominio de las frecuencias.

Esta ecuación es del tipo lineal analizado  $L(f) = g$  donde  $f$  es la distribución de corrientes en el alambre (desconocida),  $g$  es el campo tangencial exterior incidente, supuesto dato y  $L$  es el operador integro-diferencial que opera sobre la distribución de corrientes.

El método de momentos permite describir esta ecuación como una ecuación matricial usando un adecuado conjunto de funciones base para expresar la corriente dentro del alambre y un conjunto de funciones de peso. Aquí distintas implementaciones del método realizan distintas elecciones. En todas ellas se divide el alambre en pequeños tramos dentro de los cuales la corriente se supone como un desarrollo de funciones base. Habitualmente se usa la técnica de elegir funciones base que son no nulas dentro o alrededor de un dado segmento y se anulan en todo otro punto. Esto lleva a matrices cuasi-diagonales cuya inversión numérica es más sencilla.

Escribimos entonces:

$$I(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^N I_n F_n(\mathbf{r}')$$

donde los coeficientes  $I_n$  son las incógnitas y las  $F_n(\mathbf{r}')$  son las funciones base. Suponemos en lo que sigue que el conjunto de funciones de peso coincide con las funciones base (no todas las implementaciones hacen esto, pero es el caso matemáticamente más sencillo) Sustituimos las corrientes dentro de la integral, multiplicamos todo por  $F_m(\mathbf{r}')$  e integramos de nuevo para obtener:

$$\int_{C(\mathbf{r})} E^i(\mathbf{r}) F_m(\mathbf{r}) dz = \sum_{n=1}^N I_n \int_{C(\mathbf{r})} \int_{C(\mathbf{r}')} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F_n(\mathbf{r}') dz' F_m(\mathbf{r}) dz$$

O sea:

$$V_m = \sum_{n=1}^N Z_{nm} I_n$$

donde:  $V_m = \int_{C(\mathbf{r})} E^i(\mathbf{r}) F_m(\mathbf{r}) dz$        $Z_{nm} = \int_{C(\mathbf{r})} \int_{C(\mathbf{r}')} F_n(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F_m(\mathbf{r}) dz' dz$

En las implementaciones usuales con funciones base subseccionales, las integrales del primer miembro ( $V_m$ ) representan la circulación del campo exterior sobre cada elemento o subsección en que se ha dividido al alambre conductor, es decir, la "tensión" sobre cada segmento. Por ello es que usamos esta notación donde los coeficientes del desarrollo  $Z_{nm}$  tienen dimensiones de impedancia. Este enfoque además permite calcular la **impedancia de entrada** de la antena, que es la impedancia que presenta a la línea de alimentación y se calcula con la relación entre el valor de la tensión y el valor de la corriente en el segmento de conexión de entrada.

Esto nos permite extender la aplicación de este método aún cuando no exista una onda "incidente" sobre el alambre: en el caso de una antena, se coloca la tensión provista por la "fuente" de energía en uno o varios segmentos, de acuerdo a la forma en que está alimentada la antena.

En cualquier caso de excitación, una vez resuelto el sistema lineal y conocida la distribución de corriente en la estructura radiante, se calcula el potencial vectorial generado por esa corriente variable en el tiempo mediante la versión numérica de la ecuación:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C(\mathbf{r}')} I(\mathbf{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} \hat{\mathbf{l}} dl'$$

y se determinan los campos usando las expresiones clásicas:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad E = \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{i\omega\epsilon}$$

El esquema que hemos desarrollado, basado en la conservación del campo tangencial dentro y fuera de los alambres de la estructura, se conoce como **EFIE (Electric Field Integral Equation)**. Este esquema es válido sobre líneas y superficies abiertas y cerradas. Para superficies cerradas puede utilizarse también un esquema equivalente que impone la conservación de la componente tangencial del campo magnético sobre la superficie de la estructura radiante. Este esquema se conoce como **MFIE (Magnetic Field Integral Equation)**. Para tratar dieléctricos y estructuras (como esferas) difíciles de modelizar con alambres, se suele usar la idea de corrientes equivalentes, que introducimos en el capítulo de radiación,

Muchos programas permiten rescatar los términos de inducción (campos “cercaos”) y los términos de radiación (campos “lejanos”) por separado, y dibujar el diagrama de radiación.

También la mayoría de los programas permite colocar la estructura radiante cerca de tierra y calcular los campos teniendo en cuenta las propiedades (permitividad y conductividad) del terreno. Para ello se usan habitualmente ecuaciones derivadas originalmente por Sommerfeld en 1909 y aproximadas por Norton y otros desde 1963. Estas ecuaciones se basan en suponer que las ondas esféricas emitidas por cada elemento de la antena se reflejan y refractan sobre la interfase aire-tierra. Para describir este proceso en forma matemáticamente más conveniente, en 1919 Weyl reescribió las ondas esféricas como una superposición de ondas planas, lo que le permitió usar para cada onda plana parcial de la representación los coeficientes de Fresnel para la incidencia oblicua sobre la interfase tierra-aire. De esta forma llegó a las mismas ecuaciones que Sommerfeld había hallado desde un punto de vista más matemático. El punto más importante en estas derivaciones es la existencia de una **onda de superficie** que es guiada por la interfase. Esta onda superficial es de mucho interés porque la mayoría de las antenas transmiten cerca de tierra y los receptores también están cerca de tierra. En 1936, Norton publicó una aproximación “sencilla” a las integrales de Sommerfeld-Weyl que hizo relativamente factible el uso del método para cálculos prácticos. La mayoría de los paquetes computacionales actuales implementan el método de Sommerfeld-Norton para calcular los efectos de tierra en los diagramas de radiación de antenas. De todas formas, este método requiere mucho cálculo, por lo que existe un método alternativo, menos exacto, pero más rápido, que calcula el efecto del suelo usando los coeficientes de Fresnel para la incidencia oblicua de las ondas emitidas por la antena sobre la interfase aire-suelo. Este método de cálculo da errores considerables para antenas horizontales que estén a menos de  $\lambda/4$  (aproximadamente) de altura sobre el suelo.

### Implementaciones del método de momentos

Existen actualmente muchas implementaciones del método de momentos, algunas de ellas comerciales bajo diversas plataformas y otras de uso público. De estas últimas son relativamente accesibles y están razonablemente documentadas tres versiones:

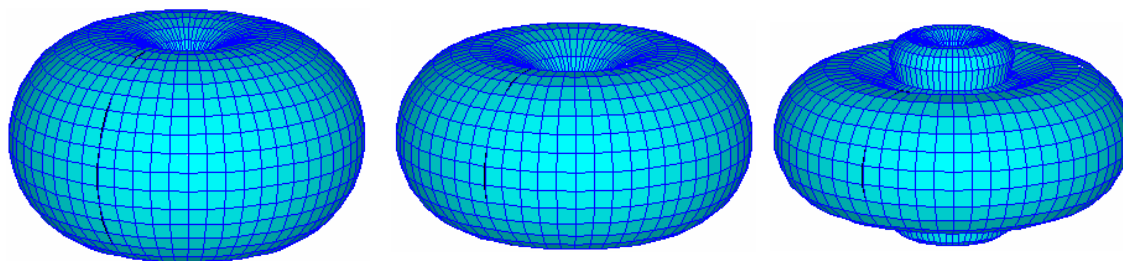
**NEC-2 – (Numerical Electromagnetic Code)** Esta es una implementación desarrollada en la década de los 70 en el laboratorio Lawrence Livermore. Está restringido a antenas formadas por alambres de un único diámetro o superficies radiantes que pueden modelarse mediante arreglos de alambres. Tiene incorporado el método de Sommerfeld-Norton para calcular con precisión el efecto de tierra cercana. Este programa existe en versiones para Unix, PC y Mackintosh, amplia documentación y gran cantidad de programas satélite para el pre- y post-procesamiento de los cálculos. Dada la fecha de origen, está orientado hacia el uso de tarjetas perforadas y Fortran, lo que crea algunas dificultades para usuarios novatos. No tiene interfase gráfica (es un programa en DOS) y todo el proceso de visualización de resultados debe hacerse en el post-procesamiento. También debe recurrirse a programas externos para visualizar la geometría de la antena dato. Sin embargo, es el programa más flexible y completo dentro de los de uso libre. Usando el núcleo computacional se han desarrollado diversas interfaces de usuario de mayor sencillez de uso que,



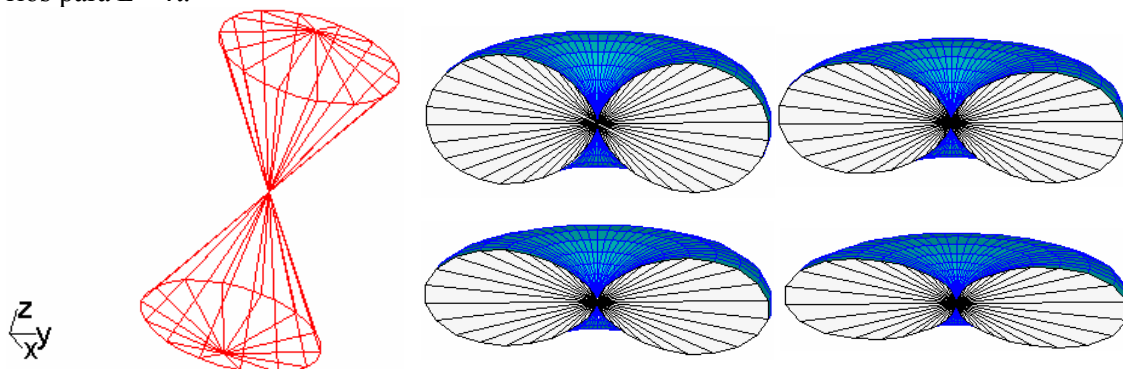
desafortunadamente, son comerciales. Existe una implementación en Excel (**XLNEC.ZIP**) que permite ingresar los datos de la antena en forma “sencilla” y que llama automáticamente al núcleo o “motor” de NEC para realizar los cálculos. Oportunas hojas de graficación permiten ver la geometría de la antena y los diagramas de radiación asociados a los campos calculados.

Estos programas permiten analizar los campos radiados cercanos y lejanos creados por conjuntos de alambres delgados ya sea como dispersores frente a la incidencia de una onda electromagnética plana o excitados con fuentes de tensión y/o corriente conectados a los alambres. Esto permite tratar antenas con elementos activos y pasivos como las de tipo Yagi-Uda. También permiten considerar que los alambres están conectados a cargas para el análisis de antenas no resonantes. Estos programas trabajan a una dada frecuencia, lo que implica corridas múltiples para hacer un análisis de respuesta en frecuencia. Permiten calcular la ganancia, impedancia de entrada, la eficiencia, dentro de las características globales de la antena, y la distribución de corrientes en los alambres (que puede cambiar al cambiar los puntos de conexión a las líneas de alimentación) y los diagramas de radiación en distintas formas. NEC-2 incorpora las posibilidades de hacer un barrido de frecuencia y de conectar líneas de transmisión como fuentes de las antenas, para la conexión entre elementos para producir desfasajes o como stubs o elementos circuitales para modificar la impedancia de conexión de partes de la antena. El programa permite incorporar estas características con sencillez.

**WIPL-D** - Este programa implementa un método EFIE y, a diferencia de los anteriores, no requiere un archivo de datos ASCII ("script") para leer la geometría, excitaciones, materiales, etc., sino que dispone de un ingreso más intuitivo, que facilita su uso. Se puede establecer una lista de frecuencias a las que se repiten los cálculos, permitiendo así un estudio de la respuesta en fre-



cuencia de la estructura. También dispone de herramientas de graficación de las corrientes sobre los alambres, el campo cercano y diagramas de radiación de campo lejano. En la figura se muestran los diagramas de radiación de una antena dipolar eléctrica de  $L = 2m$  de largo, a 125, 150 y 175 MHz (150 MHz es la frecuencia en que  $L = \lambda$ ). Se observa la aparición de lóbulos secundarios para  $L > \lambda$ .



En la figura se muestra la simulación de una antena bicónica con una estructura de alambre y los diagramas de radiación para  $f = 50, 150, 250, 350$  y  $500$  MHz. Se observa la poca dependencia del diagrama de radiación con la frecuencia en esta antena de banda ancha.

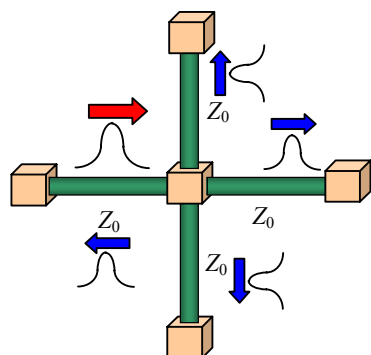
Estos tres programas (**NEC-2.ZIP**, **XLNEC.ZIP** y **WIPL-DEMO.ZIP**) están disponibles en el ftp de la materia.

### Método de la matriz de líneas de transmisión (TLM)

El método TLM se desarrolló en la década de 1970 para analizar problemas de propagación de ondas acústicas y electromagnéticas. Se trata de un método simple, intuitivo y incondicionalmente estable para la modelización de la propagación de ondas, debido a que el modelo está fuertemente relacionado con el proceso físico de la propagación.

El espacio a modelizar se representa mediante una grilla cartesiana cuyos nodos se conectan mediante líneas de transmisión eléctricas. Cada nodo de la grilla representa un nodo eléctrico, donde deben cumplirse las ecuaciones circuitales. Como en las líneas de transmisión, el campo eléctrico está ligado a la "tensión" y el campo magnético a la "corriente" sobre cada nodo.

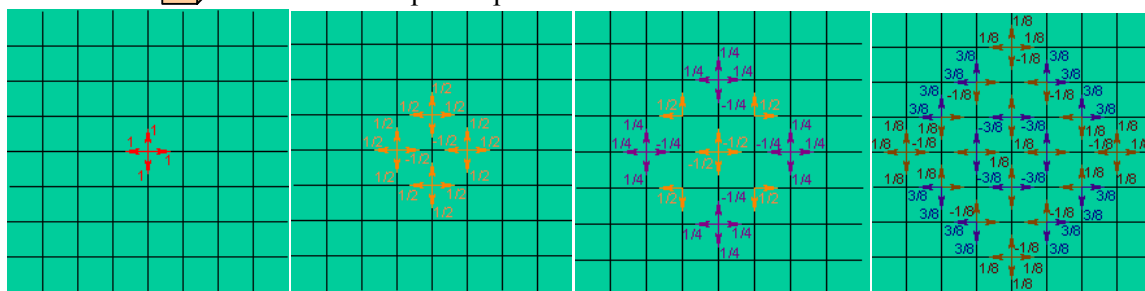
El modelo de propagación es exacto, porque se trata de una red pasiva. La única aproximación consiste en la discretización de las propiedades del medio continuo para definir la grilla. En la medida que la separación entre nodos  $h$  es pequeña frente a la longitud de onda de la propagación (digamos  $h < \lambda/10$ ), los errores de cálculo son despreciables. La propagación ondulatoria se modeliza inyectando pulsos de tipo impulsivo en los nodos apropiados a las condiciones de contorno de la señal inicial. En sucesivos intervalos de tiempo, estos impulsos se propagan a lo largo de las líneas llegando a los nodos adyacentes, donde, en general, encuentran una desadaptación de impedancias que da lugar a ondas reflejadas que se propagan a los otros nodos adyacentes en la grilla. Por ejemplo, si el medio es homogéneo, un pulso que se propaga desde un nodo a otro (nodo de incidencia) a lo largo de una "línea" de impedancia característica  $Z_0$  "ve" al llegar al



nodo adyacente una impedancia  $Z_0/3$  resultado del paralelo de las tres líneas que convergen al nodo. Desde la teoría de las líneas de transmisión, esto implica coeficientes de reflexión y transmisión:

$$\rho = \frac{Z_0/3 - Z_0}{Z_0/3 + Z_0} = -1/2 \quad \tau = 1 + \rho = 1/2$$

y entonces en el siguiente intervalo de tiempo pulsos de la mitad de amplitud del pulso incidente se propagan desde el nodo de incidencia. Estos pulsos llegan a los cuatro nodos vecinos y se repite el procedimiento.

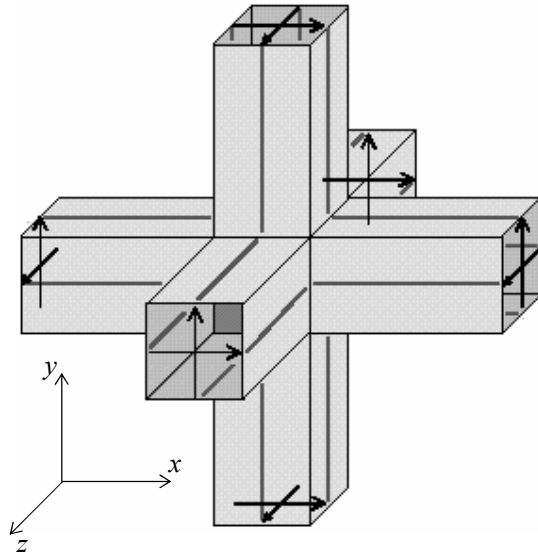


Se obtiene así el esquema que se muestra en la figura de tres intervalos de propagación sucesivos para una grilla 2D y un único nodo iniciador de la propagación. En la práctica habrá más nodos donde se inicie la propagación y el esquema se complica, pero su construcción es sencilla.

Las fronteras se modelizan colocando adecuadas impedancias de carga en los nodos. Así un cortocircuito indica una condición de anulación del campo eléctrico, creada por un conductor (**pared eléctrica**) que lleva a reflexión total. Un circuito abierto indica una condición de anulación del campo magnético (**pared magnética**), que también lleva a reflexión total. La integración debe realizarse sobre un recinto finito. Para modelizar recintos infinitos, se definen fronteras ideales donde la propagación continúa sin reflexión, lo que implica colocar impedancias de carga

adaptadas (**pared absorbente**). Otras variantes de cargas permiten modelizar otras condiciones de contorno.

Como se trata de ondas de campos, hay que tener en cuenta que en general las propiedades de propagación dependerán de la polarización, de manera que se colocan dos líneas independientes en cada rama de la grilla, una vinculada con la propagación del campo polarizado verticalmente



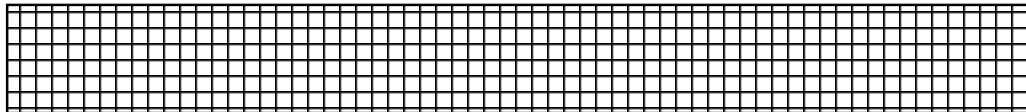
y otra vinculada con la propagación del campo polarizado horizontalmente. Para tener en cuenta todas las posibilidades en 3D, se utiliza habitualmente el **nodo condensado simétrico**<sup>5</sup> (SCN - figura), donde cada nodo está definido por 12 magnitudes, 2 por cada sentido y dirección del espacio, para acomodar la propagación de ambas polarizaciones. Las propiedades de reflexión/transmisión (**dispersión**) del nodo se describen con una matriz de dispersión de 12x12. En el paper original de Johns citado se modelizaban inhomogeneidades en el medio de propagación usando stubs conectados a los nodos involucrados, lo que llevaba a matrices de dispersión de 18x18. Las pérdidas se modelizaban con stubs con carga adaptada (stubs absorbentes) que agregan 3 condiciones más (una por dimensión) llevando a matrices

de 21x18 en el caso general.

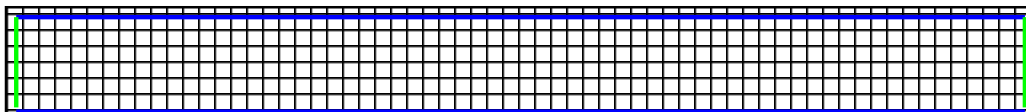
Hay muchas implementaciones comerciales de este método. Una de las más conocidas es el programa **MEFISTO**, de la empresa Faustus Scientific Corp. Se puede descargar una versión 2D gratis del sitio: <http://FaustCorp.com>.

**Ejemplo 11-3:** Simular la propagación de una onda senoidal en una estructura TEM de planos conductores paralelos.

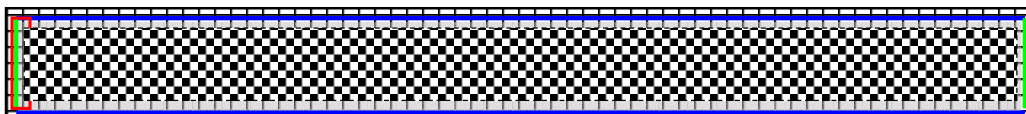
En MEFISTO-2D, se dibuja la estructura a analizar en la grilla TLM:



Los planos conductores perfectos se simbolizan con paredes magnéticas ( $\rho = +1$ , en azul) y los extremos de la guía con paredes de reflexión (en verde), donde se define el coeficiente de reflexión para ondas incidentes:

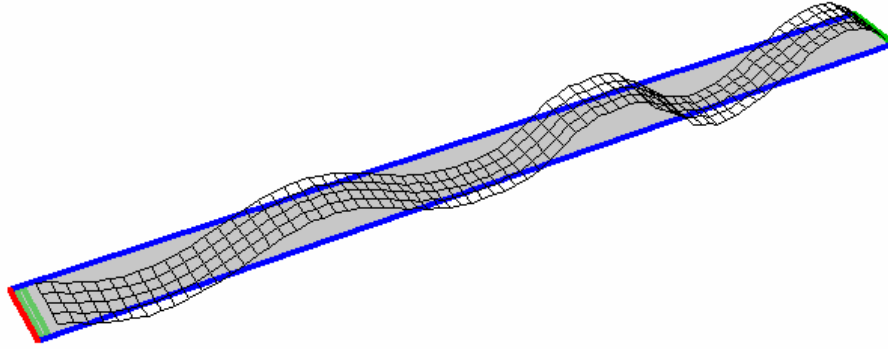


Se agrega la región de computación (donde se realiza la simulación - en gris), la región fuente, donde se coloca la fuente de las ondas (senoidal en nuestro caso - en rojo) y la región de animación, donde se mostrarán los resultados (cuadrículado):

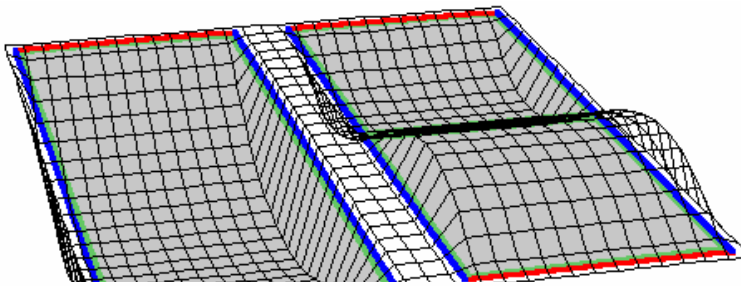


Se definen las características de visualización de los resultados y se lanza la simulación. Un estadio intermedio se presenta en la siguiente figura:

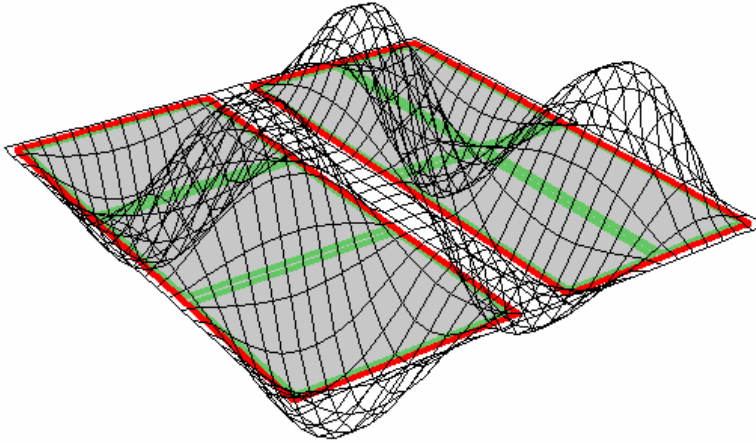
<sup>5</sup> P. B. Johns and R. L. Beurle, "Numerical solution of two-dimensional scattering problems using TLM", Proc. IEE, vol. 118, pp. 1203-1208, 1971



El programa permite estudiar los efectos de la forma de onda, las propiedades eléctricas de la guía, las condiciones de carga y la dispersión por discontinuidades de impedancia en la propagación de campos.



En la figura de la izquierda se simula el campo eléctrico en el interior de una guía rectangular (se ve la sección transversal) para los modos  $TE_{10}$  y  $TE_{20}$ . Las paredes en rojo son paredes eléctricas, donde el campo eléctrico se anula siempre.



En la figura de la izquierda se simula el campo eléctrico en el interior de una guía rectangular (se ve la sección transversal) para los modos  $TM_{31}$  y  $TE_{22}$ .

**RESUMEN**

- *Analizamos primero las soluciones analíticas, por separación de variables, de la ecuación de Helmholtz, en los tres sistemas de coordenadas clásicos: cartesiano, cilíndrico, esférico.*
- *Presentamos la adaptación del método de diferencias finitas por sobrerrelajación a la ecuación de Helmholtz en 2D.*
- *Un método de diferencias finitas muy usado en el análisis de la propagación de ondas es el FDTD (Finite Differences Time Domain), que utiliza una grilla en el espacio y el tiempo (celda de Yee) para resolver las ecuaciones de Maxwell. Este método es el más utilizado en cálculos de EMC y EMF.*
- *Un esquema de cálculo que no parte de las ecuaciones diferenciales del electromagnetismo sino de ecuaciones integrales equivalentes es el MoM (Método de Momentos), que se aplica fundamentalmente a analizar problemas de radiación, fundamentalmente por hilos de corriente. Se deriva la ecuación de Pocklington y se delinea el esquema de cálculo elemental.*
- *Finalmente una presentación alternativa es analizar la propagación de ondas modelizando el espacio por una red de líneas de transmisión y usando las propiedades de las líneas. Este método, llamado TLM (Transmission Line Matrix) es también muy usado para EMC y EMF.*

**APENDICE 10**

Debido a la mayor flexibilidad que ofrece, la disponibilidad para distintas plataformas de hardware y su importancia histórica, analizaremos brevemente en este Apéndice el uso de NEC-2 (versión para PC-DOS) en el análisis de una antena.

NEC-2 lee sus datos desde un archivo texto (ASCII) formado por líneas, cada una de las cuales representa un dato del problema a resolver. Este formato viene desde el tiempo de las tarjetas perforadas y, aunque tiene sus inconvenientes, parece una forma fácil de ingresar y de revisar los datos de una estructura radiante. Como ejemplo, vamos a considerar el archivo <sup>6</sup>:

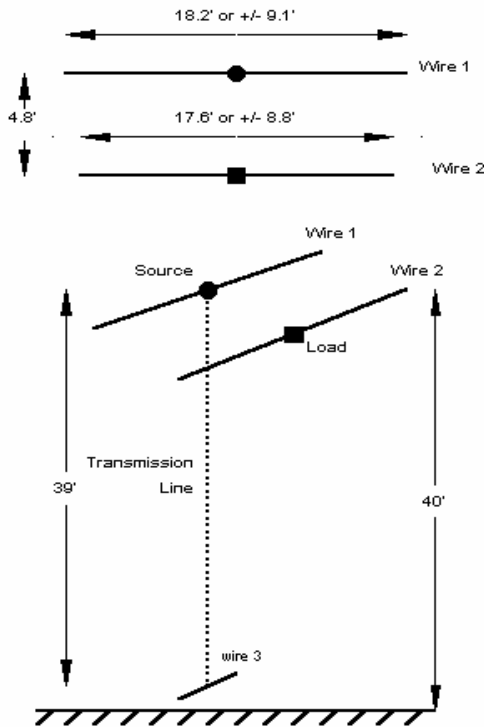


Figure 1. Antenna used as a NEC deck sample.

```

CM 2el Yagi 12M
CM Tomado de L.B.Cebik,
http://www.cebik.com/necdeck.html
CE
GW 1 11 -9.1 0. 40. 9.1 0.
40. .04165
GW 2 11 -8.8 -4.8 40. 8.8 -4.8
40. .04165
GW 3 1 -0.2 0. 1. 0.2 0.
1. 2.6706E-03
GS 0 0 0.3048
GE 1
EK
GN 2 0 0 0 13 0.005 0 0 0 0
EX 0 3 1 0 1 0.
LD 4 2 6 6 1 100.0
LD 5 1 1 11 2.4938E7
LD 5 2 1 11 2.4938E7
LD 5 3 1 11 2.4938E7
TL 1 6 3 1 50 18.01 0 0 0 0
FR 0 1 0 0 24.95 0
RP 0 1 361 1000 76 0 1 1
EN
    
```

Este archivo describe una antena Yagi de dos elementos, el elemento activo (Wire 1) y un reflector (Wire 2) con una carga. La antena se alimenta desde un elemento fuente (Wire 3) mediante una línea de transmisión. Esto se agrega simplemente para analizar las posibilidades de NEC-2.

La figura muestra la geometría de esta (muy improbable) antena.

Cada línea del archivo consiste de un campo de dos caracteres, en las posiciones 1 y 2, que define el tipo de dato que da la línea y una serie de campos con valores numéricos, algunos datos propiamente dichos y otros que codifican opciones. Analicemos cada línea del ejemplo por separado.

**CM** – Este código indica una línea de comentarios (“COMMENT”). Se puede tener tantas líneas de comentarios como se desee y en cualquier parte del archivo. Se usan para poner título/s en el archivo o para documentar líneas de datos.

**CE** – Este código indica que esta es la última línea de comentarios (“COMMENT END”) y lo que sigue son datos.

<sup>6</sup> Tomado de "So you want to read a NEC deck?", L.B.Cebik, W4RNL, <http://www.cebik.com/necdeck.html>

**GW** – Este código indica que se trata de la geometría de los alambres (“GEOMETRY OF WIRES”). Esta línea da los datos geométricos para uno de los alambres del conjunto. En la siguiente tabla se ve la estructura de campos de la línea:

1-2	3-5	6-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
<b>GW</b>	TAG	NSEGS	X1	Y1	Z1	X2	Y2	Z2	RAD

El campo de tres posiciones TAG contiene un número entero de identificación del alambre (en el ejemplo, 1). Cada alambre debe tener un TAG propio no repetido.

El campo de 5 posiciones NSEGS da el número de segmentos (o subsecciones) en que se divide el alambre para la representación en sumas de las integrales (en el ejemplo, 11 en los dos primeros alambres y 1 en el tercero. *Debe ser un número impar*). Como regla general, cada segmento debe ser menor que  $0.1\lambda$  a la frecuencia de operación. Segmentos más cortos darán mayor precisión, pero hacen el cálculo más lento. La implementación distribuida por la Web tiene distintos ejecutables que dan varias capacidades de manejo de segmentos:

Ejecutable	No. Máximo de segmentos	Memoria necesaria (Mb)
NEC2D.EXE	256	1.5
NEC2D512.EXE	512	5
NEC2D960.EXE	960	16
NEC2D960.EXE	1392	32

El programa **NEC2D.EXE** debe estar siempre presente, ya que es referido por los otros para usar el manejador de memoria extendida de DOS que tiene incorporado.

Los seis campos de diez posiciones cada uno que siguen dan las coordenadas (x,y,z) de cada extremo del alambre. El primero es el “extremo 1” y el segundo el “extremo 2” El programa asume que la corriente desde el extremo 1 al extremo 2. Las unidades de las coordenadas son metros (pulgadas o pies en otras implementaciones) a menos de que se use una línea de escala de dimensiones (código **GS**), como en este ejemplo, para pasar de los números de las coordenadas a metros. El programa trabaja en el SI.

Finalmente, el último campo de 10 posiciones da el radio del alambre, también en las unidades elegidas. Los radios de distintos alambres en la estructura pueden ser diferentes.

Habrán tantas líneas GW como alambre en la estructura, cada uno con un TAG diferente y con los datos que hemos descripto.

**GS** – Factor de escala para pasar de las dimensiones utilizadas a metros. La estructura de la línea es:

1-2	3-5	6-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
<b>GS</b>			FACTOR						

Todos los campos, salvo la cabecera y el cuarto, que da el factor de escala, están en blanco.

**GE** – Fin de las líneas de geometría de alambres.

1-2	3-5	6-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
<b>GE</b>	GFLG								

El segundo campo es un dígito que señala la existencia de un plano de tierra:

0 - No hay plano de tierra

1 - Hay plano de tierra. Se generan corrientes imagen bajo el plano.

-1 - Hay plano de tierra, pero no se generan corrientes imagen. Si un segmento toca el plano de tierra ( $z = 0$ ), su corriente se tomará cero.

**EK** – Línea de kernel extendida. Esta línea define la distribución de corriente en cada segmento. Si no está esta línea, se usa el llamado "standard thin-wire kernel", que considera que la corriente en cada segmento se reduce a un hilo de corriente en el eje del segmento. Si el segundo campo de tres posiciones (3-5) en blanco o cero, se usa el "extended thin-wire kernel", que considera que la corriente en cada segmento está distribuida uniformemente sobre la superficie del segmento. El campo de la corriente se aproxima a los dos primeros términos de su desarrollo en  $a^2$  ( $a$  = radio del segmento). El primer término corresponde al kernel standard. Si el campo tiene el número -1, esto implica pasar del extended kernel (supuestamente usado hasta ese momento) al standard kernel para el cálculo en lo que sigue. Una posterior línea EK con nada o 0 vuelve a usar el extended kernel.

**GN** – Parámetros del suelo. Define propiedades del suelo y tipo de cálculo. La línea tiene la forma:

1-2	3-5	6-10	11-15	16-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
<b>GN</b>	TIPO	NRAD			EPS	SIGM	F3	F4	F5	F6

Hay cuatro tipos posibles de suelo, definidos por el segundo campo:

-1 : vacío (no hay interfase)

0 : Conductividad finita, permitividad finita. Cálculo "rápido" a partir de los coeficientes de Fresnel para la incidencia oblicua.

1 : Conductor perfecto.

2 : Conductividad finita, permitividad finita. Cálculo "exacto" a partir de las expresiones de Sommerfeld-Norton.

Los tipos 0 y 2 requieren además dos parámetros: la permitividad relativa (adimensional - posiciones 21-30) y la conductividad (siemens/m – posiciones 31-40)

Los otros campos no vacíos en la línea se usan para modelizar estructura de base de antenas que no nos competen en este curso.

**EX** – Línea que identifica la excitación a la estructura. La línea tiene la forma:

1-2	3-5	6-10	11-15	16-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
<b>EX</b>	TIPO	I2	I3	I4	F1	F2	F3	F4	F5	F6

donde:

TIPO – Tipo de excitación:

0 : fuente de tensión

1 : onda plana incidente, polarización lineal

2 : onda plana incidente, polarización elíptica derecha

3 : onda plana incidente, polarización elíptica izquierda

4 : fuente de corriente

Generalmente los tipos más usados son 0 (antena transmisora) y 1-3 (antena receptora). De acuerdo al tipo los demás campos tienen interpretaciones diferentes. Veamos el caso de la fuentes de tensión (TIPO = 0):

I2 : Tag (identificador) del alambre donde está la fuente.

I3 : Número de segmento (dentro del alambre identificado previamente) donde está la fuente.

F1 : Parte real del voltaje de la fuente en V.

F2 : Parte imaginaria del voltaje de la fuente en V.

F4 – F6 : en blanco.

En nuestro caso hay una fuente de tensión en el elemento fuente (Wire 3), en el único segmento, de valor 1V.

**LD** – Esta línea define las cargas, si existen, que están conectadas a los alambres. La forma es:



1-2	3-5	6-10	11-15	16-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
LD	TIPO	TAG	SEG1	SEG2	ZLR	ZLI	ZLC			

Hay dos tipos de cargas a considerar, concentradas o distribuidas. Además pueden ser resistivas o reactivas, en serie o paralelo. El segundo campo (TIPO : posiciones 3-5) indica de qué tipo de carga circuital se trata:

- 0 : RLC serie concentradas ( $\Omega$ , Hy, F)
- 1 : RLC paralelo concentradas ( $\Omega$ , Hy, F)
- 2 : RLC serie distribuidas ( $\Omega/m$ , Hy/m, F/m)
- 3 : RLC paralelo distribuidas ( $\Omega/m$ , Hy/m, F/m)
- 4 : Impedancia concentrada (R en  $\Omega$ , X en  $\Omega$ )
- 5 : Conductividad del alambre ( $\Omega^{-1}m^{-1}$ )
- 1 : Anular previas cargas. El resto de la línea queda en blanco.

El tercer campo (TAG : posiciones 6-10) define el identificador del alambre al que se conecta la carga. Los campos cuarto y quinto (SEG1 y SEG2 : posiciones 11-15 y 16-20) identifican el/los segmentos donde están conectada/s la/s carga/s. Si estos dos campos son nulos, todo el alambre se cargará con la/s carga/s especificadas por los otros campos.

Los campos en punto flotante que siguen definen los valores de la/s carga/s, y su interpretación depende del tipo de carga que se haya definido:

TIPO = 0 (RLC serie) o TIPO = 1 (RLC paralelo). Carga concentrada:

- ZLR : Resistencia en  $\Omega$ . Si no existe, dejar en blanco.
- ZLI : Inductancia en Hy. Si no existe, dejar en blanco.
- ZLC : Capacitancia en F. Si no existe, dejar en blanco.

TIPO = 2 (RLC serie) o TIPO = 3 (RLC paralelo). Carga distribuida:

- ZLR : Resistencia en  $\Omega/m$ . Si no existe, dejar en blanco.
- ZLI : Inductancia en Hy/m. Si no existe, dejar en blanco.
- ZLC : Capacitancia en F/m. Si no existe, dejar en blanco.

TIPO = 4 (Impedancia):

- ZLR : Resistencia en  $\Omega$ .
- ZLI : Reactancia en  $\Omega$ .

TIPO = 5 (Conductividad del alambre):

- ZLR : Conductividad en  $(\Omega m)^{-1}$ .

Cuando se coloca una carga definida por su impedancia, ésta no cambia con la frecuencia. Se pueden agregar tantas líneas de carga como sea necesario. Por ejemplo, puede haber cargas conectadas a los alambres y además tener en cuenta la conductividad de ellos. En nuestro ejemplo hay una impedancia  $(1 + i100) \Omega$  conectada al segmento 6 (central) del elemento pasivo (TAG 2) y se da la conductividad en todos los segmentos de los tres alambres, que son de aluminio. Aunque no es este caso, es posible tener alambres de diferentes conductividades.

```
TL 1 6 3 1 50 18.01 0 0 0 0
FR 0 1 0 0 24.95 0
```

**TL** – Línea que define la existencia de líneas de transmisión conectadas a los alambres de la antena. Esta es una característica de NEC-2 que no se da en otras implementaciones. Las líneas de transmisión no se consideran estructuras físicas (no crean campo no son influenciadas por los campos de la antena) sino como estructuras matemáticas que sirven de esquemas de alimentación e introducen desfases entre los puntos que conectan. Aunque hay muchas posibilidades en los parámetros de esta línea, incluyendo stubs y adaptadores, nos concentraremos en el caso más simple, el del ejemplo, donde hay un coaxil entre el

alambre 3, que se usa simplemente para terminar la línea adecuadamente y el alambre 1, el elemento activo.

1-2	3-5	6-10	11-15	16-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
<b>TL</b>	TAG1	SEG1	TAG2	SEG2	Z0	LEN	F3	F4	F5	F6

Los primeros cuatro campos (posiciones 3-5, 6-10, 11-15 y 16-20) indican el TAG (alambre) y segmento de ambos extremos de la línea. En nuestro caso, 1-6 (centro del alambre del elemento activo) y 3-1 (único segmento del alambre del elemento 3). El campo siguiente (Z0 – posiciones 21-30) es la impedancia característica (real) de la línea, y el siguiente (LEN – posiciones 31-40) la longitud en metros. Si este campo se deja en blanco, el programa usa la distancia entre los extremos de la línea para calcular su longitud. Los últimos cuatro campos se usan para colocar stubs en cada extremo, pero no los consideraremos aquí.

**FR** – Frecuencia/s de cálculo en MHz. Esta línea permite definir la frecuencia o rango de frecuencias a las que se realiza el cálculo. La estructura de la línea es:

1-2	3-5	6-10	11-15	16-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
<b>FR</b>	IFRQ	NFRQ			F1	DELF				

donde:

IFRQ – Código que define el tipo de cambio de frecuencia.

0 : las sucesivas frecuencias se obtienen sumando al valor previo un valor constante (escala lineal).

1 : las sucesivas frecuencias de cálculo se obtienen multiplicando el valor previo por una constante (escala logarítmica).

NFRQ – Número de frecuencias de cálculo. En el ejemplo, una sola.

F1 – Valor inicial de frecuencia

DELF – intervalo entre dos valores sucesivos de frecuencia (escala lineal) o constante multiplicativa entre dos valores sucesivos de frecuencia (escala logarítmica).

Si no existe una línea FR, el cálculo se realizará a la frecuencia estándar de 299.8 MHz, correspondiente a una longitud de onda de 1m.

**RP** – Línea que define qué tipo de resultados (diagrama de radiación – Radiation Pattern) se desea tener a la salida del programa. La forma de la línea es:

1-2	3-5	6-10	11-15	16-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
<b>RP</b>	MOD	NTH	NPH	XND A	THE1	PHI1	DTH	DPH	RFLD	GNOR

El primer campo define el MODO. El modo más común es 0 (modo normal). En este caso se calculan los campos en el espacio. Si existe una línea **GN** se incluye una interfase plana con un suelo definido en esa línea. Si no, se considera la antena en el vacío. En este modo los campos de salida se tabulan en coordenadas esféricas ( $r, \theta, \phi$ ). El modo 1 agrega a los campos en el espacio el cálculo de la onda de superficie. Debe haber una línea **GN** que defina las características del suelo. En esta opción los campos de salida se tabulan en coordenadas cilíndricas ( $\rho, \phi, z$ ). Las otras opciones son aplicables a casos más sofisticados que no son de interés en este curso, así que no los consideraremos.

El segundo campo (NTH) señala el número de valores de  $\theta$  (modo 0) o de  $z$  (modo 1) para los que se desea calcular. El tercer campo (NPH) señala el número de valores de  $\phi$  para los que se desea calcular. El siguiente campo opcional (XNDA) permite controlar el formato de impresión de salida (pensado para la época en que las computadoras sólo mostraban resultados a través de impresoras de caracteres). Los siguientes cuatro campos dan los valores iniciales de  $\theta$  (modo 0) o de  $z$  (modo 1) (THE1) y de  $\phi$  (PHI1) y los intervalos de cálculo DTH ( $\theta$  o  $z$ ) y

DPH ( $\phi$ ) para las tablas de salida. RFLD es la distancia del origen de coordenadas a las que se calculan los campos lejanos o de radiación. Si este campo se omite, el factor  $e^{-ikr} / r$  se omite del cálculo. El valor de este campo debe ser mayor que  $\lambda$ . GNOR (opcional de acuerdo a lo ingresado en XNDA) es un factor de normalización.

La línea **RP** inicia la ejecución del programa, por lo que no puede haber parámetros de entrada después de ella porque serán ignorados. Se pueden usar varias líneas para tener, por ejemplo, salidas con distintas grillas de cálculo en distintas regiones del espacio. Hay otros detalles de cálculo que no vamos a tratar aquí y que se pueden consultar en la Guía oficial de uso de NEC-2 disponible en el ftp de la materia (archivo autoextraíble NEC2DOC.EXE).

**EN** – Fin del lote de instrucciones de entrada.