

9 - Ondas electromagnéticas guiadas

Introducción

En el Capítulo 1 observamos que en sistemas cuyas dimensiones son pequeñas frente a la mínima longitud de onda del espectro de Fourier de los campos se puede usar la aproximación cuasi-estática o cuasi-estacionaria en la descripción del comportamiento electromagnético. Otras estructuras, como las líneas de transmisión, donde sólo una única dimensión lineal no satisface el criterio de cuasi-estaticidad se pueden describir con la técnicas de los circuitos de constantes distribuidas, que implican la propagación de ondas que transportan energía e información.

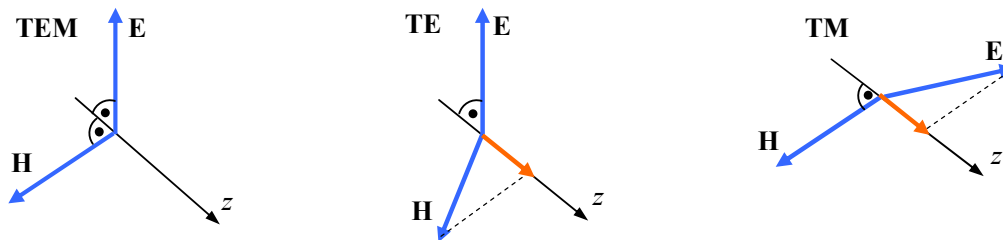
Finalmente, existen estructuras donde sólo es posible realizar una descripción "completa" usando la descripción de campos de las ecuaciones de Maxwell. Este es el caso de la propagación de ondas en sistemas de guiado donde las dimensiones de los contornos en cualquier sentido sean comparables o mayores que la mínima longitud de onda involucrada, o cuando no hay contornos, como en la propagación en medios infinitos o semi-infinitos.

Modos de Propagación

En el vacío y en **medios ilimitados**, las soluciones de las ecuaciones de Maxwell son ondas electromagnéticas **transversales**, es decir, ambos campos **E** y **H** son perpendiculares a la dirección de propagación (y perpendiculares entre sí). Esta situación es una consecuencia matemática de las ecuaciones de la divergencia nula ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$) para campos que dependen de una **única** coordenada (ondas elementales).

En la propagación en recintos limitados no es posible describir los campos como funciones de una única coordenada por la existencia de condiciones de contorno que imponen las fronteras del recinto y entonces existen otras posibilidades, en las cuales uno (o los dos) campos tienen componentes en la dirección de propagación.

Convencionalmente se llama **modo TEM** (Transversal ElectroMagnético) a la situación donde los campos son ambos transversales a la dirección de propagación, **modo TE** (Transversal Eléctrico) cuando sólo el campo eléctrico es transversal y **modo TM** (Transversal Magnético) cuando sólo el campo magnético es transversal. Se puede demostrar que cualquier tipo de propagación se puede resolver como la superposición de un modo TE y un modo TM.



Ecuaciones generales de las ondas guiadas

Consideraremos campos que se propagan a lo largo del eje z de un sistema de referencia. También supondremos campos armónicos, de manera que las expresiones de los campos deben incorporar el factor: $e^{i(\omega t - \gamma_z z)}$. La "constante" de propagación a lo largo de z , γ_z , dará información sobre el tipo de propagación (si hay o no atenuación, las velocidades de fase y de grupo, etc.).

Los campos pueden escribirse así:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(x, y)e^{i(\omega t - \gamma_z z)} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(x, y)e^{i(\omega t - \gamma_z z)}$$

Dentro del sistema de guiado supondremos que no existen fuentes de campo (cargas y corrientes, independientes o inducidas por el campo eléctrico presente - por lo que suponemos $\sigma = 0$). Las ecuaciones de Maxwell llevan en tal caso a ecuaciones de onda y éstas, en la hipótesis de campos armónicos, a ecuaciones de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{H} + \gamma^2 \mathbf{H} = 0 \quad \text{con} \quad \gamma = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

donde, en general, μ y ϵ pueden ser complejos para medios con pérdidas.

Dado que suponemos conocido el comportamiento de los campos según z , nos conviene separar el operador laplaciano en una parte transversal y otra longitudinal a la propagación:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla_t^2 \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \nabla_t^2 \mathbf{E} - \gamma_z^2 \mathbf{E} = -\gamma^2 \mathbf{E} \Rightarrow \nabla_t^2 \mathbf{E} = -(\gamma^2 - \gamma_z^2) \mathbf{E} = -\gamma_t^2 \mathbf{E}$$

Por otra parte, de las ecuaciones de Maxwell del rotor:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i\omega\mu(H_x \hat{\mathbf{x}} + H_y \hat{\mathbf{y}} + H_z \hat{\mathbf{z}}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\gamma_z E_y = -i\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\gamma_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = i\omega\epsilon(E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\gamma_z H_y = i\omega\epsilon E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\gamma_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\epsilon E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\epsilon E_z \end{cases}$$

Debe recordarse que las componentes de los campos son funciones solamente de las variables espaciales x e y , ya que z y t aparecen en el factor de propagación.

De las ecuaciones precedentes es posible despejar las componentes transversales del campo en función de las longitudinales:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i}{\gamma_t^2} \left(\gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) & H_x &= \frac{i}{\gamma_t^2} \left(\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ E_y &= \frac{i}{\gamma_t^2} \left(-\gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) & H_y &= -\frac{i}{\gamma_t^2} \left(\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

y de estas expresiones surge un método de cálculo de los campos dentro de una guía de ondas :

- Resolver la ecuación de Helmholtz $\nabla^2 f_z + \gamma^2 f_z = \nabla_t^2 f_z + \gamma_t^2 f_z = 0$ para la componente longitudinal, sabiendo que la dependencia respecto de z (coordenada de propagación) y del tiempo es $e^{i(\omega t - \gamma_z z)}$.
- Usar las condiciones de contorno sobre las paredes de la guía para hallar las constantes de la solución de la ecuación de Helmholtz.
- Calcular las otras componentes del campo.

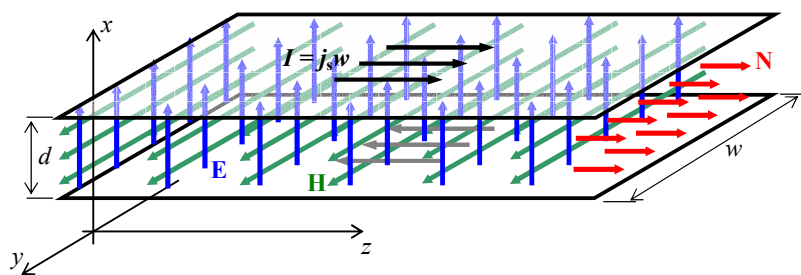
Este esquema es válido para estructuras cilíndricas (no necesariamente de sección circular), que son las de uso común en las guías de ondas. Veremos al final del capítulo los métodos a aplicar en el caso de las guías dieléctricas.

Guía de planos conductores paralelos

El método más sencillo de guiar una onda electromagnética es mediante un par de planos conductores paralelos. Por simplicidad matemática en esta etapa consideraremos que se trata de conductores perfectos ($\sigma \rightarrow \infty$) y que el medio entre ellos sea sin pérdidas ($\gamma = k$).

Modo TEM

Existe en esta configuración la posibilidad de ondas transversales como en un medio ilimitado. En el modo **TEM** las componentes longitudinales de los campos son nulas. Para que las componentes transversales no sean también nulas, de las ecuaciones halladas en la sección precedente surge que $k_t = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ debe ser también nulo, o sea: $k = k_z$. En tal caso queda: $\nabla^2 \mathbf{E}_t = 0$ y $\nabla^2 \mathbf{H}_t = 0$ de manera que los campos transversales (los únicos en este modo) **satisfacen la ecuación de Laplace de la (cuasi)-estática**. Eligiendo un sistema coordenado como el de la figura la ecuación vectorial para el campo eléctrico se desdobra en dos ecuaciones escalares:



Eligiendo un sistema coordenado como el de la figura la ecuación vectorial para el campo eléctrico se desdobra en dos ecuaciones escalares:

$$\nabla^2 E_x = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 E_y = 0.$$

Las soluciones de estas ecuaciones de Laplace escalares deben satisfacer el teorema de Earnshaw, de manera que no deben presentar extremos entre los planos. En particular, E_y es tangente a los planos conductores y se debe anular sobre ellos (conservación de la componente tangencial del campo). Por lo tanto debe ser nulo para todo y , pues de lo contrario presentaría al menos un extremo dentro del recinto de integración. E_x es normal a los planos, de modo que no se anula, y además coincide con el campo **E** cuasiestático entre dos conductores paralelos infinitos es uniforme y perpendicular a los planos, de manera que podemos escribir:

$$\text{TEM} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)}$$

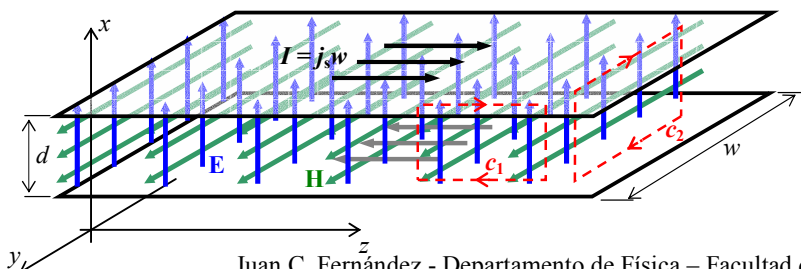
El mismo razonamiento se aplica a la componente H_x , que es normal a los planos y debe anularse sobre ellos por la conservación de la componente normal de **B**. La componente no nula del campo magnético se puede calcular a partir del campo eléctrico por la ley de Faraday:

$$-ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y \quad \Rightarrow \quad H_y = \frac{k_z}{\omega\mu} E_x = \frac{E_x}{\eta}$$

Y finalmente:

$$\text{TEM} \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned}$$

que coincide con la ecuación de una onda plana transversal en un medio ilimitado.



El campo eléctrico no es conservativo, porque su rotor no es nulo. Por ejemplo, la circulación a lo largo del circuito c_1 de la figura no es cero porque hay un flujo magnético concatenado dependiente

del tiempo. Sin embargo, la circulación sobre c_2 es cero, así como sobre cualquier circuito sobre **planos de z constante**. Podemos definir entonces un voltaje¹ entre los electrodos circulando a z constante, un voltaje entre electrodos dependiente de z (y del tiempo):

$$v(z, t) = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_x(z, t) d$$

donde C es una curva de z constante que va de un plano al otro.

Además las condiciones de borde para el campo tangencial magnético sobre los planos conductores perfectos llevan a que exista una densidad de corriente superficial $\mathbf{j}_s = j_s \hat{\mathbf{z}}$, de manera que habrá una "corriente"² a lo largo de los electrodos $i(z, t) = j_s w = H_y w$ en la dirección z.

Podemos entonces escribir los campos en función de $v(z, t)$ e $i(z, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} &\Rightarrow \frac{1}{d} \frac{\partial v}{\partial z} = -\mu \frac{1}{w} \frac{\partial i}{\partial t} &\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} &\text{con } L = \frac{\mu d}{w} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} &\Rightarrow \frac{1}{w} \frac{\partial i}{\partial z} = -\epsilon \frac{1}{d} \frac{\partial v}{\partial t} &\Rightarrow \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} &\text{con } C = \frac{\epsilon w}{d} \end{aligned}$$

donde L y C son la inductancia y capacidad por unidad de longitud (en la dirección z) del sistema, que pueden calcularse mediante sus definiciones (cuasi-)estáticas.

Estas son las **ecuaciones del telegrafista** y constituyen un modelo de parámetros distribuidos asociado al modelo de campos previamente analizado. Ambos modelos describen en forma equivalente el comportamiento electromagnético de la guía de planos paralelos en el modo TEM.

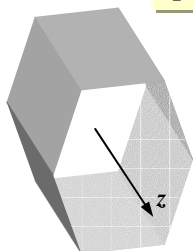
La velocidad de propagación de las ondas de tensión y corriente es: $v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ que coincide con la velocidad de los campos en el medio de propagación, y la impedancia característica de la línea es: $Z_0 = \sqrt{L/C} = \sqrt{\mu/\epsilon} = \eta$ que es la impedancia intrínseca del medio de propagación.

Podemos así relacionar la descripción a partir de los campos y la descripción de constantes distribuidas a partir de tensiones y corrientes mediante las ecuaciones:

- $i(z, t) = \int_S \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ (integral sobre una curva C de $z = cte.$ entre ambos conductores)
- $v(z, t) = \int_{C1 \rightarrow 2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ (flujo a través de una superficie S de $z = cte.$ cuyo contorno encierra a sólo uno de los dos conductores)

Con esta representación las ecuaciones de Maxwell llevan naturalmente a las ecuaciones del telegrafista para el modelo circuital de constantes distribuidas.

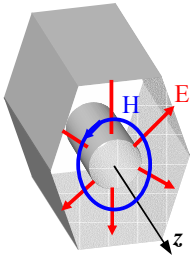
Esto ocurre cuando es posible circular los campos en forma conservativa por caminos de $z = cte.$, donde z es la dirección de propagación.



Una guía de sección cilíndrica (no necesariamente circular) de interior dieléctrico no puede sustentar un modo TEM. En tal caso los campos deben satisfacer la ecuación de Laplace vectorial, y cada componente en un sistema cartesiano la correspondiente ecuación escalar. Por el teorema de Earnshaw las soluciones de la ecuación de Laplace escalar no pueden tener extremos dentro del recinto de integración. cada componente debe anularse para adecuarse a las

¹ Sólo es correcto hablar de diferencia de potencial en el caso de la circulación de campos conservativos, por lo que se prefiere usar el término técnico voltaje o tensión para referirse a esta circulación.

² Se trata de una corriente superficial.



condiciones de contorno sobre las paredes.

Puede existir propagación TEM en un recinto donde haya conductores internos que permitan líneas transversales de campo eléctrico entre dos conductores, como en la configuración coaxial de la figura. Las líneas de campo eléctrico variable en el tiempo llevan a líneas de campo magnético también transversales.

Otros sistemas donde se puede tener propagación TEM son las líneas abiertas, como las bifilares y las de microcinta³.

En resumen, en la propagación TEM se puede describir la situación de dos formas equivalentes:

- El modelo de campos, de estructura equivalente a las ondas elementales en recintos ilimitados (campos transversales, impedancia de onda igual a la impedancia intrínseca del medio de propagación, sin frecuencia de corte).
- El modelo de constantes distribuidas, a partir de ondas de corriente y de tensión dependientes de la coordenada de propagación y del tiempo.

Las dos descripciones están ligadas entre sí a partir de las relaciones:

$$v(z,t) = \int_{C1 \rightarrow 2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad i(z,t) = \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS$$

donde la integral de circulación del campo eléctrico se realiza a lo largo de una curva C de $\zeta = cte.$ entre ambos conductores, y el flujo del campo magnético se calcula a través de una superficie S de $\zeta = cte.$ cuyo contorno encierra a sólo uno de los dos conductores, siendo ζ la dirección de propagación.

La velocidad de propagación de las ondas coincide en ambos modelos y la impedancia de onda del modelo de campos coincide con la impedancia característica del modelo de constantes distribuidas.

Esta analogía permite el uso de herramientas como la carta de Smith para el diseño de sistemas de guiado de ondas en alta frecuencia. En particular es el modelo estándar en el diseño de redes de microondas.

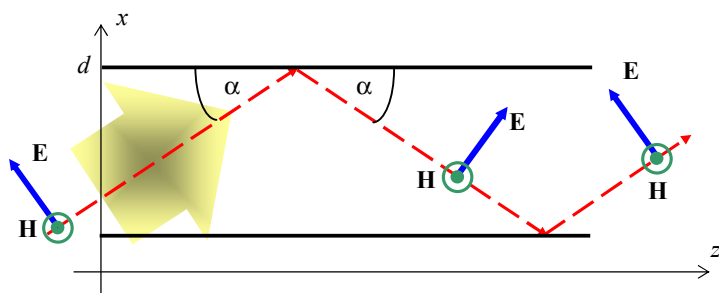
Veremos que en la propagación para un modo no TEM existe una frecuencia mínima por debajo de la cual no hay propagación. Esto limita la utilidad de la guía. En lo que sigue analizaremos los modos no TEM que se pueden propagar en una guía de planos paralelos. Aunque esta guía no es útil desde el punto de vista práctico, ilustra con la matemática mínima todas las características esenciales de la propagación guiada.

³ A diferencia de las coaxiales, en estas líneas el modo TEM es una **aproximación**, en algunos casos muy buena, porque siempre existe una componente longitudinal de los campos.

Modo TM

Vamos a analizar el modo TM no con la formulación general establecida en la sección precedente (que usamos en el modo TE, más abajo), sino con una aproximación intuitiva, a partir de la incidencia oblicua de una onda plana. Esto nos permitirá analizar el significado de la propagación guiada: la presencia simultánea de una onda viajera en la dirección de propagación y ondas estacionarias en direcciones transversales.

Consideremos una onda plana linealmente polarizada que incide oblicuamente en el espacio entre dos planos conductores perfectos paralelos, separados en d con los campos dispuestos como se indica en la figura. Al incidir sobre uno de los planos se produce la reflexión total de la onda, y la onda reflejada sale con el mismo ángulo de incidencia por las leyes de Snell. Lo mismo



ocurre cuando esta onda reflejada se vuelve a reflejar en el otro plano. Se ve que el progreso de la onda a lo largo de la guía se produce por sucesivas reflexiones. El campo eléctrico de la onda incidente original puede escribirse:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{e}}_1 e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{e}}_1 = \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} - \sin \alpha \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{k}_1 = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$$

Una vez producida la reflexión, se suma la onda reflejada:

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{e}}_r e^{i(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{e}}_r = \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{k}_r = -k_x \hat{\mathbf{x}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$$

El campo total dentro de la guía es la suma de estos dos campos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) &= E_0 \hat{\mathbf{e}}_1 e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} + E_0 \hat{\mathbf{e}}_r e^{i(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} = e^{i\omega t} \left[E_0 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_1 + E_0 e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_r \right] \\ &= e^{i\omega t} \left[E_0 e^{-i(k_x x + k_z z)} [\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} - \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}] + E_0 e^{-i(-k_x x + k_z z)} [\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}] \right] \\ &= e^{i(\omega t - k_z z)} \left[E_0 e^{-ik_x x} [\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} - \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}] + E_0 e^{ik_x x} [\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}] \right] \\ &= e^{i(\omega t - k_z z)} \left[(E_0 e^{ik_x x} + E_0 e^{-ik_x x}) \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + (E_0 e^{ik_x x} - E_0 e^{-ik_x x}) \sin \alpha \hat{\mathbf{z}} \right] \end{aligned}$$

Se ve de estas ecuaciones que el campo eléctrico (el campo magnético tiene el mismo comportamiento) se comporta como una onda viajera a lo largo del eje z y tiene un comportamiento más complejo a lo largo del eje x . Para aclarar este comportamiento, debemos analizar el cumplimiento de las condiciones de contorno del campo sobre los planos conductores. Como se trata de conductores perfectos, el campo tangencial eléctrico E_z se debe anular sobre ellos:

$$E_z = 0 \quad \text{para} \quad x = 0, d \quad \Rightarrow \quad (E_0 e^{ik_x x} - E_0 e^{-ik_x x}) \sin \alpha = 0 \quad \text{para} \quad x = 0, d$$

de donde:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad (E_0 - E_0) \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = E_0$$

$$x = d \quad \Rightarrow \quad (e^{ik_x d} - e^{-ik_x d}) \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(k_x d) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x = n\pi / d$$

Esto significa que la longitud de onda del campo incidente no puede ser cualquiera, sino que está ligada a la separación d entre los planos y al ángulo de incidencia α .

Campos de otras longitudes de onda **no cumplen las condiciones de contorno** y no pueden existir dentro de la guía. El campo eléctrico para una de las longitudes de onda **permitidas** se puede escribir finalmente:

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = 2E_0 e^{i(\omega t - k_z z)} \left[\cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + i \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \sin \alpha \hat{\mathbf{z}} \right]$$

Se ve que el campo tiene una componente longitudinal, es decir, sobre la dirección de propagación z . Como se observa en la figura inicial, el campo magnético sólo tiene componente según y , por lo que resulta transversal a la dirección de propagación. Se trata entonces de una onda **transversal magnética (TM)**.

Por otra parte, podemos eliminar de las expresiones de los campos el ángulo α observando que: $k_z = k \cos \alpha$ $k_x = n\pi / d = k \sin \alpha$, y entonces:

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = 2E_0 e^{i(\omega t - k_z z)} \left[\frac{k_z}{k} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right]$$

El campo magnético asociado a este campo eléctrico puede calcularse de la ley de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -i\omega\mu H_x \\ -ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \left(ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ H_z = 0 \end{cases}$$

de donde:
$$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) = 2 \frac{E_0}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}}$$

La relación entre las componentes del campo eléctrico y el magnético **transversales** a la propagación ha sido definida en el análisis de la incidencia oblicua y tiene el mismo rol que la impedancia de onda en medios ilimitados o líneas. Esta relación tiene dimensiones de impedancia y se conoce como **impedancia de onda** o **impedancia de campo**. Para un modo **TM_n**:

$$Z_{\text{TM}_n} = \frac{E_x}{H_y} = \eta \frac{k_z}{k} = \eta \frac{\sqrt{k^2 - k_{x_n}^2}}{k} = \eta \sqrt{1 - \frac{k_{x_n}^2}{k^2}} = \eta \sqrt{1 - \frac{\omega_{c_n}^2}{\omega^2}}$$

Se puede ver que esta relación no depende de la posición dentro de la guía, pero sí del orden n del modo de propagación.

En general, el campo dentro de la guía puede expresarse como una superposición de estos **modos normales TM_n** (que, desde el punto de vista matemático, forman un conjunto completo):

$$\begin{aligned} \mathbf{TM} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} e^{i(\omega t - k_z z)} \left[\frac{k_z}{k} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{0n}}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Hemos supuesto que entre los dos planos conductores hay un dieléctrico sin pérdidas. La velocidad de las ondas electromagnéticas en ese medio (considerado como ilimitado) es $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. En la guía, la relación entre k y ω define las características de la propagación. Como el vector de onda tiene componentes solamente sobre x y sobre z : $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ y siendo $k_x = n\pi / d$ y $k = \omega / c$ se tiene:

$$k_z = \sqrt{(\omega / c)^2 - (n\pi / d)^2}$$

Pero k_z es el número de onda que aparece en el factor de propagación: $e^{i(\omega t - k_z z)}$ de la onda dentro de la guía. Para que exista propagación, k_z debe ser real, ya que de otro modo el factor de propagación se convierte en un factor de atenuación que da una onda evanescente. Esta onda no

transmite potencia. Para que k_z sea real es necesario que:

$$\frac{\omega}{c} > n \frac{\pi}{d} \Rightarrow \omega > n \frac{\pi c}{d} \Rightarrow f > n \frac{c}{2d}$$

Por lo tanto, para el modo normal \mathbf{TM}_n la frecuencia mínima que lleva a que haya propagación ondulatoria dentro de la guía es $f_n = nc/2d$. Esta frecuencia mínima (para este modo) se denomina **frecuencia de corte** de la guía para el modo \mathbf{TM}_n .

De la ecuación para k_z :
$$k_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - (n\pi/d)^2} = \sqrt{(\omega/c)^2 - (\omega_n/c)^2} = \sqrt{\omega^2 - \omega_n^2} / c$$

donde $\omega_n = 2\pi f_n$ es la frecuencia angular de corte para el modo \mathbf{TM}_n . Se ve además que la impedancia de campo Z_{TM_n} es real (la onda propaga potencia media o potencia activa) para $f > f_c$ e imaginaria pura (la onda no propaga energía) para $f < f_c$.

Otra característica que se puede analizar es el valor de longitud de onda (medida para la propagación ilimitada) en el medio que llena la guía para las frecuencias de corte:

$$\lambda_n = c / f_n = 2d / n \Rightarrow d = n\lambda_n / 2$$

o sea que la frecuencia de corte del modo \mathbf{TM}_n se da cuando la separación entre planos es igual a n veces la semilongitud de onda en el espacio ilimitado.

La **velocidad de fase** de las ondas permitidas en la guía se puede calcular de la ecuación de los planos de fase constante:

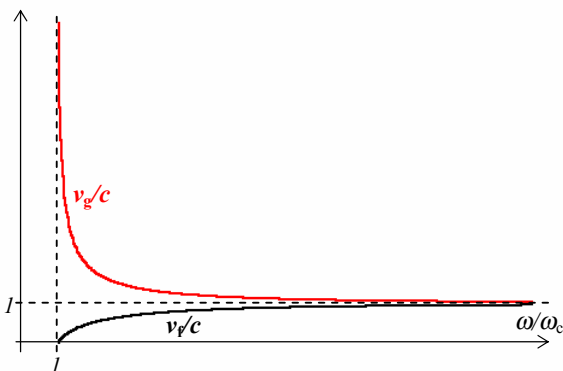
$$\omega t - k_z z = cte \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_n/\omega)^2}}$$

Se ve que la velocidad de fase sólo es real para $\omega > \omega_n$, y en tal caso es superior a c . Desde el punto de vista de la propagación de la energía se debe considerar la velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{1}{\frac{dk_z}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d}{d\omega}(\sqrt{\omega^2 - \omega_n^2})} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2} < c$$

y se ve que la velocidad de grupo también es real para $\omega > \omega_n$, y es menor que la velocidad de la luz en el medio.

Más aún, podemos ver que:

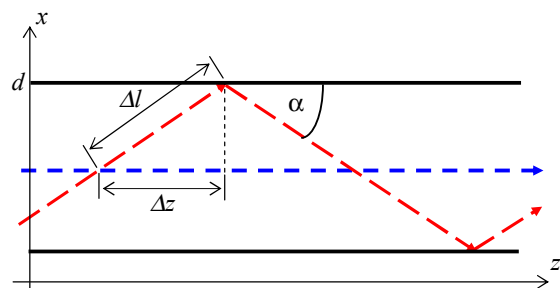


$$v_f v_g = c \sqrt{1 - (\omega_n/\omega)^2} \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_n/\omega)^2}} = c^2$$

En la figura se muestra la variación de ambas velocidades dentro de la guía a partir de la frecuencia de corte. Para $\omega \rightarrow \omega_n^+$ la velocidad de fase tiende a infinito, mientras que la velocidad de grupo tiende a cero. Para $\omega \rightarrow \infty$, ambas velocidades tienden a c , la velocidad de las ondas electromagnéticas en el medio que rellena la guía.

Este comportamiento es exactamente el mismo que el de la propagación en un plasma ilimitado de pérdidas despreciables (**Ejemplo 8.12**). La existencia de la frecuencia de corte como frecuencia mínima de propagación distingue al modo TM del modo TEM donde **no hay limitaciones de frecuencia** a la propagación. Podemos vincular la noción de velocidad de grupo con el esquema de incidencia oblicua que usamos en esta sección para analizar la propagación guiada. En el intervalo Δt la onda plana que va rebo-

tando entre los planos conductores avanza una distancia Δl , mientras que la onda guiada avanza la distancia Δz . Entonces:

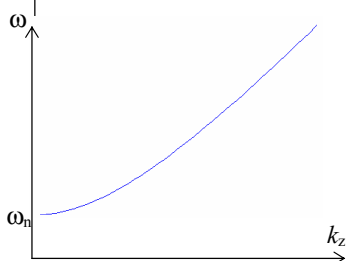


$$c = \Delta l / \Delta t \quad \text{y} \quad v_g = \Delta z / \Delta t, \quad \text{de donde:}$$

$$v_g = c \frac{\Delta z}{\Delta l} = c \cos \alpha = c \frac{k_z}{k} = c \sqrt{1 - (\omega_c / \omega)^2}$$

que es la expresión hallada previamente.

Como la velocidad de fase depende de la frecuencia, existe **dispersión**, que es dispersión normal, como en el caso del plasma. En la figura



se representa la **relación de dispersión** $\omega = \omega(k_z) = \omega(\beta)$. Cuando esta relación es lineal no hay dispersión. En el presente caso la relación es no lineal. La existencia de dispersión altera el contenido de información de las señales que se propagan por la guía, ya que deforma los pulsos al viajar las distintas componentes armónicas con distinta velocidad. En el modo TEM la relación de dispersión es lineal y no hay dispersión.

Ejemplo 9.1: Analizar la propagación de una onda **TM** de 20 GHz entre planos conductores perfectos paralelos separados 1cm por aire.

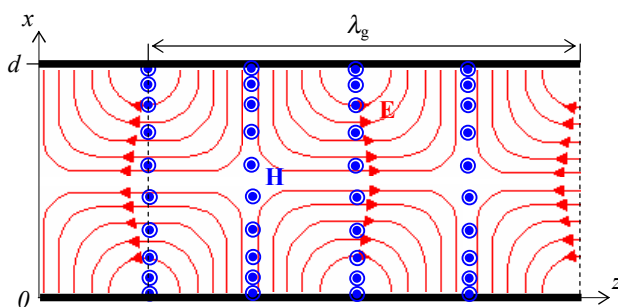
La frecuencia de corte para el modo **TM_n** es: $f_n = nc / 2d \approx 15n \text{ GHz}$ de modo que la frecuencia de trabajo se halla por encima de la frecuencia de corte y hay propagación solamente si $n = 1$. Los campos son en este caso:

$$\mathbf{TM}_1 \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_{01} e^{i(\omega t - k_z z)} \left[\frac{k_z}{k} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_{01}}{\eta_0} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}}$$

con: $k = \omega / c \approx 418.88 \text{ m}^{-1} \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{k^2 - (\pi/d)^2} \approx 277.06 \text{ m}^{-1}$

$v_f = \omega / k_z \approx 4.54 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 1.51c \quad v_g = c^2 / v_f \approx 1.98 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.66c$

$Z_{\text{TM}_1} = \eta_0 \sqrt{1 - \omega_c^2 / \omega^2} \approx 0.66 \eta_0 \approx 249.18 \Omega$



En la figura se esquematizan las líneas de campo para el modo **TM₁**. Las líneas de campo de **E** se extienden entre distintas posiciones de la misma placa y las líneas de **H** son paralelas a los planos y equiespaciadas sobre z , aunque se concentran a lo largo de x por la función coseno. En la figura:

$$\lambda_g = v_g / f .$$

Modo TE

En el caso de los modos TM analizamos la propagación dentro de la guía de planos paralelos usando una visión de una onda que ingresa oblicuamente a la guía. En el caso de los modos TE vamos a usar las ecuaciones generales a partir de la/s componente/s longitudinal/es. En este caso la única componente longitudinal es H_z , por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} & H_x &= -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ E_y &= \frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} & H_y &= -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned}$$

La componente longitudinal satisface la ecuación de Helmholtz: $\nabla_t^2 H_z + k_t^2 H_z = 0$. H_z no puede depender de y por la simetría de los planos contorno, que son de extensión infinita en esa dirección, y entonces:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + k_t^2 H_z = 0 \Rightarrow H_z = (H_{0+} e^{-ik_t x} + H_{0-} e^{ik_t x}) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

de donde:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 & E_y &= \frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\omega\mu}{k_t} (H_{0+} e^{-ik_t x} - H_{0-} e^{ik_t x}) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ H_y &= -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 & H_x &= -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{k_z}{k_t} (H_{0+} e^{-ik_t x} - H_{0-} e^{ik_t x}) e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

De estas componentes, E_y es tangencial a los planos conductores que forman el contorno. Pero el campo en los conductores es nulo, de modo que E_y debe anularse sobre los planos:

$$x = 0 \Rightarrow E_y = \frac{\omega\mu}{k_t} (H_{0+} e^{-ik_t x} - H_{0-} e^{ik_t x}) e^{i(\omega t - k_z z)} = 0 \Rightarrow H_{0-} = H_{0+}$$

Luego: $E_y = -\frac{2i\omega\mu}{k_t} H_{0+} \text{sen}(k_t x) e^{i(\omega t - k_z z)}$

$$x = d \Rightarrow E_y = -\frac{2i\omega\mu}{k_t} H_{0+} \text{sen}(k_t d) e^{i(\omega t - k_z z)} = 0 \Rightarrow k_t = \frac{n\pi}{d}$$

Queda entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{TE}_n \quad H_z &= H_{0n} \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} & E_y &= -\frac{i\omega\mu}{k_t} H_{0n} \text{sen}\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ H_x &= \frac{ik_z}{k_t} H_{0n} \text{sen}\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

En este caso el vector de onda es:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k_x^2 + k_z^2 = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + k_z^2 \Rightarrow k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}}{c} \quad \text{con} \quad \omega_n = n \frac{\pi c}{d}$$

y las frecuencias de corte coincide para modos **TM** y **TE** del mismo orden n . También coinciden las expresiones de las velocidades de fase y de grupo, con lo que el modo **TE** presenta las mismas características de dispersión que el modo **TM** del mismo orden.

La impedancia de onda en el modo **TE_n** es:

$$Z_{\mathbf{TE}_n} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{k_{z_n}} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{k^2 - k_{t_n}^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c_n}^2}{\omega^2}}}$$

Se observa así que para la propagación guiada entre planos conductores paralelos:

$$Z_{TM_n} Z_{TE_n} = \eta^2$$

Como en el caso **TM**, la expresión general de los campos en el caso **TE** se puede escribir como la superposición de los modos normales **TE_n**.

$$\begin{aligned} \mathbf{TE} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -i\omega\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{0_n}}{k_t} \hat{\mathbf{y}} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_{0_n} \left[\frac{ik_z}{k_t} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

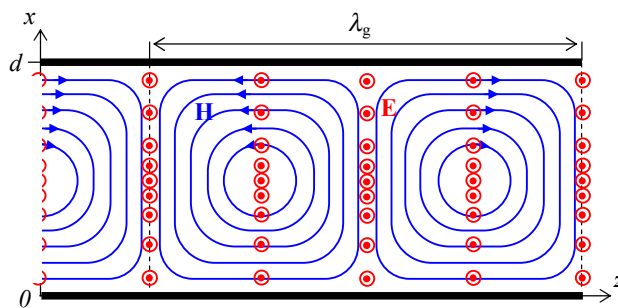
Ejemplo 9.2: Analizar la propagación de una onda **TE** de 20 GHz entre planos conductores perfectos paralelos separados 1cm por aire.

La frecuencia de corte para el modo **TE_n** es la misma que para el modo **TM_n**, hallada en el Ejemplo previo: $f_n = nc/2d \approx 15n \text{GHz}$ de modo que nuevamente hay propagación sólo para $n = 1$. Los campos son:

$$\begin{aligned} \mathbf{TE}_1 \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{i\omega\mu H_{0_1}}{k_t} \hat{\mathbf{y}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= H_{0_1} \left[\frac{ik_z}{k_t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

Los valores de k , k_z , v_f y v_g son los mismos que en el Ejemplo previo, mientras que::

$$Z_{TE_1} = \eta_0 / \sqrt{1 - \omega_{c1}^2 / \omega^2} \approx 1.51 \eta_0 \approx 569.56 \Omega$$



En la figura se muestran las líneas de campo para el modo **TE₁**. Las líneas de campo eléctrico se distribuyen uniformemente a lo largo de z pero se concentran para $x = d/2$ por la presencia de la función seno. Las líneas de campo magnético son cerradas. En la figura:

$$\lambda_g = v_g / f .$$

En resumen, para la propagación de ondas guiadas entre planos conductores paralelos:

- en el modo **TEM** no existe límite de frecuencia - inferior o superior - para la propagación de ondas. No hay dispersión de paquetes de onda;
- en los modos **TM** y **TE** hay un límite inferior de frecuencia para la propagación, la frecuencia de corte, que además depende del orden del modo. Hay dispersión de paquetes de onda.

En la siguiente sección analizamos la influencia de las pérdidas conductoras en la propagación de ondas en una guía de planos paralelos.

Consideraciones energéticas

La energía media almacenada en los campos por unidad de área normal a z es:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} \int_0^d [\epsilon \Re e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) + \mu \Re e(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*)] dx$$

Vamos a analizar el comportamiento de esta energía media para un modo \mathbf{TE}_n . Consideremos una superposición de modos normales:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\omega\mu}{k_t} H_{0_n} \hat{\mathbf{y}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{0_n} \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} + i \frac{k_z}{k_t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} \right] e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

Entonces, por ejemplo, para el campo eléctrico (obsérvese que k_t y k_z dependen del orden del modo n):

$$\begin{aligned} \Re e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) &= \Re e \left\{ \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\omega\mu}{k_{t_n}} H_{0_n} \hat{\mathbf{y}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{d} x\right) e^{i(\omega t - k_{z_n} z)} \right] \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{i\omega\mu}{k_{t_m}} H_{0_m}^* \hat{\mathbf{y}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{d} x\right) e^{-i(\omega t - k_{z_m} z)} \right] \right\} \\ &= \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu^2}{k_{t_n}^2} |H_{0_n}|^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{d}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu^2}{k_{t_n} k_{t_m}} H_{0_n} H_{0_m} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{d}\right) e^{i(k_{z_m} - k_{z_n})z} \right\} \end{aligned}$$

Al realizar las integrales sobre x , la suma de cuadrados da un valor finito, mientras que la suma de productos para distintos modos produce integrales nulas. Queda así:

$$\int_0^d \Re e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dx = \frac{d}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu^2}{k_{t_n}^2} |H_{0_n}|^2$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \Re e(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) &= \Re e \left\{ \left[\sum_{n=1}^{\infty} H_{0_n} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} + i \frac{k_{z_n}}{k_{t_n}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} \right] e^{i(\omega t - k_{z_n} z)} \right] \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} H_{0_m}^* \left[\cos\left(\frac{m\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} - i \frac{k_{z_m}}{k_{t_m}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} \right] e^{-i(\omega t - k_{z_m} z)} \right] \right\} \quad \mathbf{e} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |H_{0_n}|^2 \left[\cos^2\left(\frac{n\pi}{d} x\right) + \left(\frac{k_{z_n}}{k_{t_n}}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{d} x\right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} H_{0_n} H_{0_m}^* \left[\cos\left(\frac{n\pi}{d} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{d} x\right) + \frac{k_{z_n} k_{z_m}}{k_{t_n} k_{t_m}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{d} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{d} x\right) \right] e^{i(k_{z_m} - k_{z_n})z} \end{aligned}$$

integrando:
$$\int_0^d \Re e(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) dx = \frac{d}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k_{t_n}}\right)^2 |H_{0_n}|^2$$

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^d [\epsilon \Re e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) + \mu \Re e(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*)] dx \\ &= \epsilon \frac{d}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu^2}{k_{t_n}^2} |H_{0_n}|^2 + \mu \frac{d}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k_{t_n}}\right)^2 |H_{0_n}|^2 = \frac{d}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu}{k_{t_n}^2} (\omega^2 \mu \epsilon + k^2) |H_{0_n}|^2 \end{aligned}$$

y como $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ se ve que ambos sumandos son iguales:

$$\mu \int_0^d \Re e(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) dx = \epsilon \int_0^d \Re e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dx$$

o sea que la energía media está **equipartida** entre el campo eléctrico y el campo magnético. Finalmente la energía almacenada queda:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} \int_0^d [\epsilon \Re e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) + \mu \Re e(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*)] dx = \mu d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{k_{t_n}^2} |H_{0_n}|^2$$

Una conclusión importante es que la energía media almacenada dentro de la guía resulta la **suma de las energías medias almacenadas asociadas a cada modo de orden n** . Este resultado ocurre siempre que describamos un campo mediante una superposición de funciones ortogonales como en la representación de Fourier.

Como dentro de la guía (por encima de la frecuencia de corte) existe propagación, hay un flujo de energía que podemos cuantificar con el vector de Poynting:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

Para los modos de propagación hallados tenemos:

$$\text{TEM} \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \frac{|E_0|^2}{2\eta} \hat{\mathbf{z}}$$

donde hemos usado el hecho de que la impedancia η es real.

$$\text{TM} \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} e^{i(\omega t - k_z z)} \left[\frac{k_z}{k} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{0n}}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|E_{0n}|^2}{2\eta} \frac{k_z}{k} \cos^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{TE} \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -2i\omega\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{0n}}{k_t} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{0n} \left[\frac{ik_z}{k_t} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\omega\mu |H_{0n}|^2 k_z}{k_t^2} \sin^2\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}}$$

Se ve que no hay flujo medio de potencia sobre la dirección transversal x . También se anulan, como hemos visto, los productos de términos de frecuencias diferentes.

Estas expresiones son válidas para frecuencias mayores que la frecuencia de corte. Por debajo, k_z es imaginario puro y la parte real del producto de fasores se anula, lo que implica que **no hay propagación**, ya que se trata de campos evanescentes.

Pérdidas conductoras

Las guías reales presentan pérdidas, debido a que los conductores no son perfectos y presentan una conductividad finita y pérdidas por efecto Joule, y eventualmente puede haber pérdidas dieléctricas. En este tratamiento introductorio consideraremos solamente pérdidas conductoras.

Consideramos que los planos conductores tienen un cierto espesor d . Debido a la presencia de una conductividad finita, existe campo EM dentro de los conductores y supondremos que, a la frecuencia de trabajo, $d \gg \delta$. En estas condiciones, para analizar el comportamiento del campo dentro de la guía podemos aplicar los resultados del análisis de la incidencia oblicua desde un dieléctrico sobre un buen conductor: $\rho_{TE} \approx -1 + 2 \cos(\theta_i) \eta_2 / \eta_1$ $\rho_{TM} \approx -1 + 2 \sec(\theta_i) \eta_2 / \eta_1$ donde θ_i es el ángulo de incidencia (complementario de α en la figura de la pág. 9.6), η_1 es la impedancia intrínseca del dieléctrico interior a la guía y η_2 es la impedancia intrínseca del conductor. En ambos casos se observa que el coeficiente de reflexión difiere del caso ideal (-1) en muy poco.

Por este motivo es posible aproximar las expresiones de los campos en el interior de la guía con pérdidas con las correspondientes al caso ideal, pero introduciendo un factor de atenuación que tenga en cuenta las pérdidas⁴:

$$\mathbf{E}_{real}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{E}_{ideal}(\mathbf{r}, t) e^{-\alpha z} \quad \mathbf{H}_{real}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{H}_{ideal}(\mathbf{r}, t) e^{-\alpha z}$$

⁴ Esta aproximación es posible en todos los casos en que las pérdidas son bajas en relación a la potencia propagada.

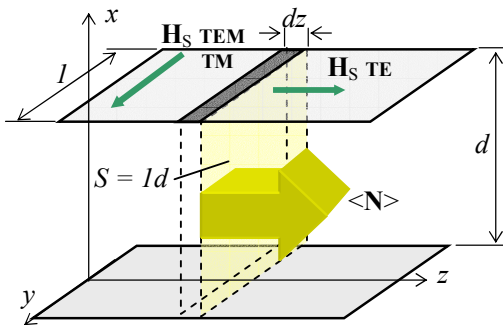
Los campos para una guía real de planos paralelos quedan entonces:

$$\begin{aligned}
 \text{TEM} \quad & \left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \frac{|E_0|^2}{2\eta} e^{-2\alpha z} \hat{\mathbf{z}} \\
 \text{TM} \quad & \left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \left[\frac{k_z}{k} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{0n}}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|E_{0n}|^2}{2\eta} \frac{k_z}{k} \cos^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{\mathbf{z}} \\
 \text{TE} \quad & \left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -i\omega\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{0n}}{k_t} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{0n} \left[\frac{ik_z}{k_t} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega\mu |H_{0n}|^2 k_z}{k_t^2} \sin^2\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{\mathbf{z}}
 \end{aligned}$$

Obsérvese que, en general, el coeficiente de atenuación dependerá del modo en consideración. Para determinar este coeficiente analizamos la pérdida de energía a lo largo de la propagación.

La potencia que cruza un área transversal dS de la guía es $\langle \mathbf{N} \rangle dS$, y entonces la diferencia entre estas cantidades a lo largo de un desplazamiento elemental dz es la potencia perdida en ese tramo⁵:

$$\langle \mathbf{N}(z + dz) \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \langle \mathbf{N}(z) \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \frac{d\langle P \rangle}{dv} dS dz \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{dv} = -\frac{d\langle N \rangle}{dz} = 2\alpha \langle N \rangle$$



La potencia perdida sobre el tramo dz se da en los conductores, y se puede expresar por unidad de superficie como se describe en el Capítulo 8, en la sección dedicada al efecto pelicular:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dS} = \frac{\delta}{4} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}|_s$$

donde δ es la profundidad de penetración y los campos se calculan sobre la superficie del conductor. Se puede reescribir esta expresión en términos del campo magnético sobre la superficie del conductor:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dS} = \frac{\delta}{4} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}|_s = \frac{\sigma\delta}{4} |E_s|^2 = \frac{\sigma\delta|\eta|^2}{4} |H_s|^2 = \frac{1}{2\sigma\delta} |H_s|^2 = \frac{1}{2} |H_s|^2 R_s \quad \text{con } R_s = 1/\sigma\delta$$

Esta es la potencia perdida por unidad de área por efecto Joule. Se debe multiplicar por 2 por la existencia de dos planos conductores. Tomando un paralelepípedo de ancho unitario, altura d y profundidad dz , tenemos:

$$\langle P \rangle = \int_0^1 |H_s|^2 R_s dy dz = R_s dz \int_0^1 |H_s|^2 dy \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{dz} = R_s \int_0^1 |H_s|^2 dy$$

y:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha \langle N \rangle \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{dz} = 2\alpha \int_S \langle N \rangle dS$$

e igualando ambas expresiones obtenemos finalmente para α :

$$\alpha = \frac{R_s \int_0^1 |H_s|^2 dy}{2 \int_S \langle N \rangle dS}$$

⁵ Esta expresión ya fue hallada en el tratamiento general de la propagación de ondas electromagnéticas en medios ilimitados, Capítulo 8.

Para cada modo \mathbf{H}_s y \mathbf{N} son distintos:

$$\begin{aligned} \text{TEM} \quad \mathbf{H}_s &= \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} \Rightarrow \int_0^1 dy |H_s|^2 = \frac{|E_0|^2}{\eta^2} e^{-2\alpha z} \Rightarrow \alpha = R_s / \eta d \\ \langle \mathbf{N} \rangle &= \frac{|E_0|^2}{2\eta} e^{-2\alpha z} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \int_S \langle N \rangle dS = \frac{|E_0|^2 d}{2\eta} e^{-2\alpha z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{TM}_n \quad \mathbf{H}_s &= \frac{E_{0n}}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}} \Rightarrow \int_0^1 dy |H_s|^2 = \frac{|E_{0n}|^2}{\eta^2} e^{-2\alpha_n z} \\ \langle \mathbf{N} \rangle &= \frac{|E_{0n}|^2}{2\eta} \frac{k_z}{k} \cos^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \int_S \langle N \rangle dS = \frac{|E_{0n}|^2}{2\eta} \frac{k_z}{k} e^{-2\alpha_n z} \int_0^d \cos^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) dx = \frac{|E_{0n}|^2 d}{4\eta} \frac{k_z}{k} e^{-2\alpha_n z} \end{aligned}$$

En la integral del campo magnético se debe tomar $x = 0, d$, lo que lleva a que el coseno sea de módulo unitario y la integral del coseno cuadrado vale $d/2$. Finalmente:

$$\alpha_{TM} = 2 \frac{k}{k_z} \frac{R_s}{\eta d} = \frac{2R_s}{\eta d \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} = \frac{2}{d} \frac{R_s}{Z_{TM}}$$

$$\begin{aligned} \text{TE}_n \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{0n} \left[\frac{ik_z}{k_t} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \Rightarrow \int_0^1 dy |H_s|^2 = |H_{0n}|^2 e^{-2\alpha_n z} \\ \langle \mathbf{N} \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega \mu |H_{0n}|^2 k_z}{k_t^2} \sin^2\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \int_S \langle N \rangle dS = \frac{\omega \mu |H_{0n}|^2 k_z d}{2k_t^2} e^{-2\alpha_n z} \end{aligned}$$

Nuevamente en la integral del campo magnético se debe tomar $x = 0, d$, lo que lleva a que el seno se anule y el coseno sea de módulo unitario. Finalmente:

$$a_{TE} = \frac{k_t^2}{k_z} \frac{R_s}{\omega \mu d} = \frac{\omega_c^2/\omega^2}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} \frac{R_s}{\eta d} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{Z_{TE} R_s}{\eta^2 d}$$

En resumen:

Las expresiones para la constante de atenuación debida a las pérdidas conductoras en la propagación en la guía de planos paralelos dependen del modo y en el caso de los modos TM y TE también del orden.

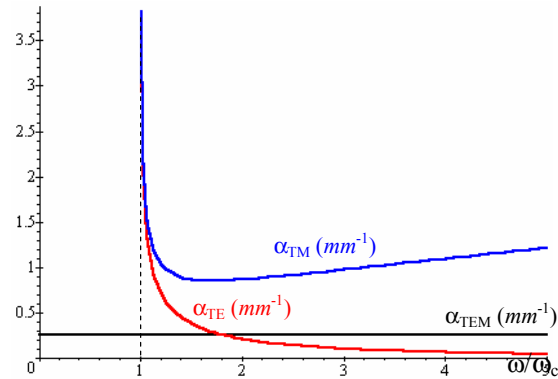
$$\begin{aligned} \text{TEM} \quad \alpha_{TEM} &= \frac{R_s}{\eta d} \\ \text{TM} \quad \alpha_{TM} &= 2 \frac{k}{k_z} \frac{R_s}{\eta d} = \frac{2R_s}{\eta d \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} \\ \text{TE} \quad a_{TE} &= \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{Z_{TE} R_s}{\eta^2 d} = \frac{\omega_c^2/\omega^2}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} \frac{R_s}{\eta d} \end{aligned}$$

Ejemplo 9.3: Grafique la variación con la frecuencia de los coeficientes de atenuación para los modos TM_1 y TE_1 con conductores de cobre separados en 1cm y dieléctrico de aire.

Las expresiones explícitas en función de la frecuencia son:

$$\begin{cases} \alpha_{TEM} = \frac{R_s}{\eta d} = \sqrt{\frac{\omega \epsilon}{2\sigma}} \frac{1}{d} \\ \alpha_{TM} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2\omega \epsilon}{\sigma(1 - \omega_c^2/\omega^2)}} \\ \alpha_{TE} = \frac{\omega_c^2/\omega^2}{d} \sqrt{\frac{2\omega \epsilon}{\sigma(1 - \omega_c^2/\omega^2)}} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \alpha_{TM} \end{cases}$$

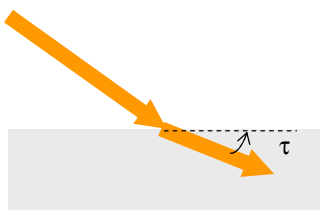
Graficamos a la derecha para $n = 1$. Se observa que α_{TM} crece con la frecuencia, mientras que α_{TE} tiende a cero, y que α_{TEM} (constante con ω) se halla entre las otras curvas para $\omega > \sim 1.8\omega_c$. Las curvas para otros valores de n son idénticas a las presentadas, ya que sólo varía la frecuencia de corte.



Guías abiertas

En el caso de la guía de planos paralelos, el guiado de las ondas se realiza mediante las condiciones de contorno impuestas por los conductores. Sin embargo, **toda desadaptación de impedancias puede funcionar como un sistema de guiado de ondas**. En ese sentido vimos en el análisis de la incidencia oblicua que, cualesquiera fueran los medios involucrados, el campo electromagnético en el medio de incidencia consiste en una onda semiestacionaria en la dirección normal a la interfase y una onda viajera paralela a la misma. Esta onda viajera es una onda guiada por la interfase. Sommerfeld encontró en 1899 que en la radiación de antenas cerca de tierra existía una onda de superficie, guiada por la interfase aire-tierra.

Este guiado se puede entender analizando el caso de la incidencia oblicua sobre una interfase. Si el segundo medio es conductor perfecto, el campo eléctrico en el medio de incidencia resulta normal a la interfase, ya que la componente tangencial se debe anular sobre ella. Cerca de la interfase, entonces, todo el flujo neto de potencia se da en una dirección paralela a la misma. Si el segundo medio no es conductor perfecto, existe una componente tangencial del campo eléctrico no nula sobre la interfase. Esta componente produce un flujo del vector de Poynting normal a la interfase aparte de la paralela, de modo que resulta un flujo oblicuo, que en todos los casos va del primer medio (el medio de incidencia) al segundo medio (el medio de transmisión).



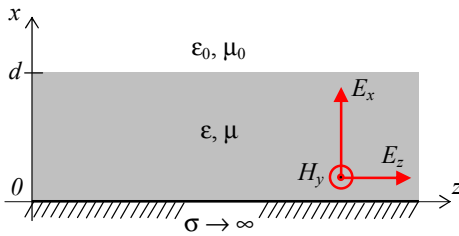
Esta característica lleva a que una interfase entre dos medios produce una tendencia a que la energía que transporta la onda viajera se concentre cerca de la interfase, produciendo así un guiado de la energía.

El ángulo de propagación de la energía respecto de la propagación paralela en distintos casos se presenta en el siguiente cuadro, para la incidencia desde el aire a una frecuencia de 3GHz:

Medio 2	Conductividad (Ωm) ⁻¹ , Permitividad	Angulo τ (°)
Conductor perfecto	$\rightarrow \infty$	0
Cobre	$\approx 6 \times 10^7, \epsilon_0$	2.2×10^{-3}
Agua de mar	$\approx 4, 80\epsilon_0$	6.4

En el caso en que el segundo medio sea un buen conductor, la energía que se propaga normal a la interfase se disipa por efecto Joule dentro del semiespacio conductor. Se puede mejorar el guiado de ondas por una superficie conductora agregando corrugaciones periódicas transversales o una capa dieléctrica.

En ambos casos es posible demostrar que, para la propagación **normal** a la interfase, **la impedancia de onda es reactiva pura**, lo que indica un onda estacionaria, a pesar de que el coeficiente de reflexión entre los medios extremos (aire y conductor) no es uno.



En particular, podemos considerar una capa dieléctrica supuestamente sin pérdidas, de parámetros ϵ y μ colocada entre aire (ϵ_0, μ_0) y un conductor perfecto ($\sigma \rightarrow \infty$), como se indica en la figura.

La solución **TM** para la propagación según z es, dentro de la capa:

$$E_x = -\frac{ik_z}{k_x} E_0 \cos(k_x x) \quad E_z = E_0 \sin(k_x x) \quad H_y = -\frac{i\omega\epsilon}{k_x} E_0 \cos(k_x x) \quad k^2 = \omega^2 \mu\epsilon = k_x^2 + k_z^2$$

Esta solución anula el campo eléctrico tangencial sobre el conductor perfecto. La impedancia de onda cerca de la interfase dieléctrico-aire ($x \rightarrow d$) es:

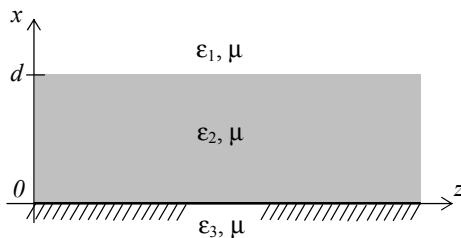
$$Z_{\parallel} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{k_z}{\omega\epsilon} \quad Z_{\perp} = \frac{E_z}{H_y} = -\frac{k_x}{i\omega\epsilon} \tan(k_x d) = i \frac{k_x}{\omega\epsilon} \tan(k_x d)$$

donde hemos distinguido entre la impedancia para la propagación paralela (Z_{\parallel}) y la impedancia para la propagación normal (Z_{\perp}) a las superficies interfases. Para que exista propagación guiada (a lo largo de z) se requiere que k_z sea real. En tal caso la impedancia paralela es real.

En general, el valor de k_x puede ser real o imaginario. Si k_x es real, se ve que Z_{\perp} es real y se produce propagación. Si k_x es imaginario, como $\tan(i|k_x|d) = i \tanh(|k_x|d)$ también la impedancia normal será imaginaria pura, o sea, reactiva. Esto indica que no hay propagación de energía en la dirección normal.

El guiado por superficies abiertas se puede realizar mediante alambres cilíndricos rectos, alambres conductores rodeados por un dieléctrico, espirales conductoras, etc. En todos estos casos la excitación del modo apropiado es el problema más difícil de resolver en la práctica. El guiado de ondas mediante estructuras metálicas abiertas es uno de los campos de mayor desarrollo en los últimos años.

Guías de hoja dieléctrica



Es posible usar una hoja dieléctrica (entre dieléctricos) para guiar ondas si su permitividad (o su índice de refracción, si se trabaja en el rango óptico) es mayor que la de los medios a su alrededor: $\epsilon_2 > \epsilon_3$ y $\epsilon_2 > \epsilon_1$. En tal caso, existen ángulos límite:

$$\theta_{i12} = \text{sen}^{-1} \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2} \quad \text{o} \quad \theta_{i23} = \text{sen}^{-1} \sqrt{\epsilon_3/\epsilon_2}$$

Si la radiación dentro de la hoja, considerada como una onda plana que incide “oblicuamente” sobre las interfases, lo hace con ángulos mayores que estos ángulos límite, se produce el fenómeno de reflexión total y no existe potencia (media) que cruza la interfase. Toda la energía de la radiación se ve entonces guiada por la hoja dieléctrica. En este principio se basa el guiado de ondas de luz en las llamadas fibras ópticas.

Aunque las fibras ópticas son de sección circular y requieren una descripción matemática basada en coordenadas cilíndricas, existen guías dieléctricas planas en dispositivos de óptica integrada que se basan en tecnologías de películas delgadas. Para estos dispositivos es posible realizar un análisis en sólo dos direcciones: la dirección longitudinal (de propagación) y la dirección normal a las interfases.

Consideramos el caso de tres medios de características diferentes, que corresponden al **sustrato** (ϵ_3, μ), la **capa** (ϵ_2, μ) y el **recubrimiento** (ϵ_1, μ) en la nomenclatura de la tecnología de películas delgadas. Habitualmente el sustrato es el soporte mecánico de la estructura, la capa es la guía

de ondas propiamente dicha, y el recubrimiento tiene funciones de protección de la estructura. Suponemos que la permeabilidad es la misma en los tres medios, lo que es lo normal.

Asumimos campos que se propagan en la dirección z , de manera que las componentes incorporarán el factor $e^{i(\omega t - k_z z)}$ que consideraremos implícito en las ecuaciones. Despreciamos además la dependencia respecto de y debido a que consideramos indefinida la extensión de la estructura sobre planos yz . Esta aproximación tiene sentido si el tamaño de la estructura sobre estos planos es mucho mayor que el espesor de la capa d y si ese tamaño es además grande frente a la máxima longitud de onda de la radiación a considerar.

Consideremos primero un modo TE. La ecuación de Helmholtz para la componente longitudinal (H_z) queda:

$$\frac{\partial^2 H_{zi}}{\partial x^2} + (k_i^2 - k_{zi}^2) H_{zi} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

cuya solución es una superposición de exponenciales de argumento imaginario o funciones trigonométricas. Elegiremos exponenciales en los medios externos, donde esperamos tener ondas evanescentes, y funciones trigonométricas en la capa, donde esperamos tener ondas “estacionarias” en la dirección normal a las interfases.

$$H_{z1} = A e^{-qx} e^{i(\omega t - k_z z)}$$

Tenemos así: $H_{z2} = (B \operatorname{sen}(hx) + C \operatorname{cos}(hx)) e^{i(\omega t - k_z z)}$

$$H_{z3} = D e^{px} e^{i(\omega t - k_z z)}$$

De las condiciones de contorno surge que ω y k_z deben ser constantes en los tres medios. Las componentes transversales de los campos salen de las ecuaciones:

$$E_x = -\frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad H_x = -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad E_y = \frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad H_y = \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$$

de donde:

$$\begin{aligned} E_{y1} &= \frac{i\omega\mu}{q^2} \frac{\partial H_{z1}}{\partial x} = -\frac{i\omega\mu}{q} A e^{-qx} & H_{x1} &= -\frac{ik_z}{q^2} \frac{\partial H_{z1}}{\partial x} = \frac{ik_z}{q} A e^{-qx} \\ E_{y2} &= \frac{i\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x} = \frac{i\omega\mu}{h} (B \operatorname{cos}(hx) - C \operatorname{sen}(hx)) & H_{x2} &= -\frac{ik_z}{h^2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x} = -\frac{ik_z}{h} (B \operatorname{cos}(hx) - C \operatorname{sen}(hx)) \\ E_{y3} &= \frac{i\omega\mu}{p^2} \frac{\partial H_{z3}}{\partial x} = \frac{i\omega\mu}{p} D e^{px} & H_{x3} &= -\frac{ik_z}{p^2} \frac{\partial H_{z3}}{\partial x} = -\frac{ik_z}{p} D e^{px} \end{aligned}$$

(en estas ecuaciones se ha omitido el factor común $e^{i(\omega t - k_z z)}$).

Planteamos las condiciones de contorno. Se conservan las componentes tangenciales a las interfases de ambos campos (E_y y H_z) y las componentes normales H_x :

$$\begin{aligned} x = 0 & \Rightarrow \begin{cases} H_{x2} = H_{x3} \\ E_{y2} = E_{y3} \\ H_{z2} = H_{z3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pB = hD \\ pB = hD \\ C = D \end{cases} \\ x = d & \Rightarrow \begin{cases} H_{x1} = H_{x2} \\ E_{y1} = E_{y2} \\ H_{z1} = H_{z2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} hA e^{-qd} = -q(B \operatorname{cos}(hd) - C \operatorname{sen}(hd)) \\ hA e^{-qd} = -q(B \operatorname{cos}(hd) - C \operatorname{sen}(hd)) \\ A e^{-qd} = B \operatorname{sen}(hd) + C \operatorname{cos}(hd) \end{cases} \end{aligned}$$

Se ve que la conservación de las componentes normales dan condiciones redundantes respecto de la conservación de las tangenciales. De las ecuaciones restantes queda un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Como $C = D$, quedan sólo tres incógnitas. Para que este sistema tenga solución, su determinante debe anularse:

$$\begin{vmatrix} 0 & p & -h \\ h e^{-qd} & q \cos(hd) & -q \sin(hd) \\ e^{-qd} & -\sin(hd) & -\cos(hd) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \tan(hd) = \frac{h(p+q)}{h^2 - pq}$$

ecuación trascendente que debe cumplirse junto con las ecuaciones:

$$k_1^2 = \omega^2 \mu \epsilon_1 = q^2 + k_z^2 \quad k_2^2 = \omega^2 \mu \epsilon_2 = h^2 + k_z^2 \quad k_3^2 = \omega^2 \mu \epsilon_3 = p^2 + k_z^2$$

que definen las componentes del vector de onda.

Esta ecuación trascendente no tiene solución analítica. Puede resolverse en forma gráfica o en forma numérica.

Supongamos el caso simétrico en que las propiedades del sustrato y las del recubrimiento coinciden. En tal caso $\epsilon_1 = \epsilon_3$ y entonces $k_1 = k_3 \Rightarrow p = q$, y la ecuación a resolver es:

$$\tan(hd) = \frac{2ph}{h^2 - p^2}$$

Como $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$ tenemos: $\tan(hd) = \frac{2 \tan(hd/2)}{1 - \tan^2(hd/2)} = \frac{2ph}{h^2 - p^2}$

De esta ecuación se puede obtener una ecuación cuadrática para la tangente:

$$\tan^2(hd/2) + \frac{h^2 - p^2}{ph} \tan(hd/2) - 1 = 0 \Rightarrow \tan(hd/2) = \begin{cases} p/h \\ -h/p \end{cases}$$

Además, podemos escribir que:

$$k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon_1 - p^2 = \omega^2 \mu \epsilon_2 - h^2 \Rightarrow p = \sqrt{\omega^2 \mu (\epsilon_1 - \epsilon_2) + h^2}$$

Por lo tanto la ecuación original se reduce a:

$$(pd/2) = (hd/2) \tan(hd/2) \Rightarrow \sqrt{\omega^2 \mu (\epsilon_1 - \epsilon_2) d^2 / 4 + (hd/2)^2} = (hd/2) \tan(hd/2)$$

o

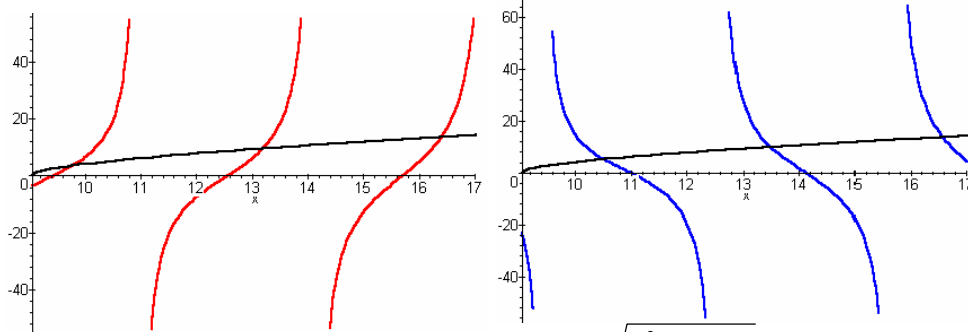
$$(pd/2) = -(hd/2) / \tan(hd/2) \Rightarrow \sqrt{\omega^2 \mu (\epsilon_1 - \epsilon_2) d^2 / 4 + (hd/2)^2} = -(hd/2) / \tan(hd/2)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse en forma gráfica, planteando ambos miembros y hallando los puntos de cruce, que son las soluciones del problema.

Ejemplo 9.4: Halle gráficamente las soluciones de las ecuaciones trascendentes del problema de la capa dieléctrica para una capa de vidrio de espesor $d = 1.46 \mu\text{m}$ rodeada de aire ($n_1 = 1, \epsilon_1 \cong 1$) a $f = 5 \times 10^{14} \text{ Hz } (\lambda_0 = 0.6 \mu\text{m})$.

Nos quedan las ecuaciones:

$$\sqrt{x^2 - 81.89} = x \tan(x) \quad \text{o} \quad \sqrt{x^2 - 81.89} = x / \tan(x) \quad \text{con} \quad x = hd/2$$



$$\sqrt{x^2 - 81.89} = x \tan(x) \quad \sqrt{x^2 - 81.89} = x / \tan(x)$$

Se observa de las figuras que hay solución para:

$$x_1 \cong 9.78, 13.2, 16.4 \Rightarrow h \cong 13.4, 18.08, 22.47 \mu m$$

$$x_2 \cong 10.5, 13.5, 16.6 \Rightarrow h \cong 14.38, 18.5, 22.74 \mu m$$

y para otros espesores de capa mayores.

Nociones de fibra óptica

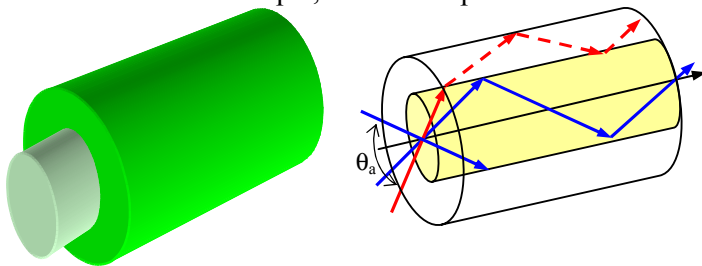
Por muchos años se ha apreciado que el uso de ondas de luz como portadoras de información provee un enorme ancho de banda potencial. Las ondas ópticas se hallan en el rango de 10^{13} a 10^{16} Hz ($30 \text{ nm} - 30 \mu m$ - este rango incluye el infrarrojo lejano y el ultravioleta cercano y medio, además del espectro visible), o sea de tres a seis órdenes de magnitud mayor que las frecuencias de microondas. Sin embargo, el aire es un medio con demasiadas pérdidas por dispersión (scattering) para la transmisión de ondas de luz. Sólo la evolución de guías dieléctricas de bajas pérdidas y fabricación económica en los últimos años ha llevado al uso masivo de esta tecnología en las comunicaciones. Debido a sus propiedades, el espectro más eficiente se hallan entre los $600 - 1600 \text{ nm}$, siendo las longitudes de onda más utilizadas las de 850 nm , 1300 nm y 1550 nm .

Las principales ventajas de la comunicación por guías dieléctricas cilíndricas (o **fibras ópticas**, en la jerga) son:

- **Tamaño, peso y flexibilidad.** Las fibras ópticas tienen espesores muy pequeños. Un gran número de fibras individuales pueden agruparse en un cable del tamaño de un coaxil normal. Los cables son más livianos que los de metal y más flexibles.
- **Aislación eléctrica.** Las fibras ópticas son prácticamente inmunes a las fuentes de interferencia. Esto hace su uso obligatorio en ambientes de alto ruido. Tampoco existe la diafonía (cross-talk) entre fibras individuales en un paquete.
- **Seguridad.** Es difícil "pinchar" una comunicación enviada mediante fibra óptica. Es mucho más difícil hacerlo sin que se note.
- **Bajas pérdidas.** Las fibras ópticas modernas tienen mejores performances que los cables coaxiales. Se ha llegado a menos de 0.2 dB/Km de pérdidas, lo que elimina la necesidad de repetidoras.

Las principales desventajas de la comunicación con fibras ópticas reside en la fragilidad de las fibras individuales, y fundamentalmente en la dificultad técnica para lograr conexiones confiables y económicas a la circuitería asociada. También la velocidad de los circuitos asociados es lo que limita al presente la tasa de transferencia de información de un sistema de comunicaciones ópticas. El paso de señales electrónicas a ópticas y viceversa es también en la actualidad un factor de alto costo.

En la variante más simple, una fibra óptica consiste en un núcleo cilíndrico de vidrio de un dado



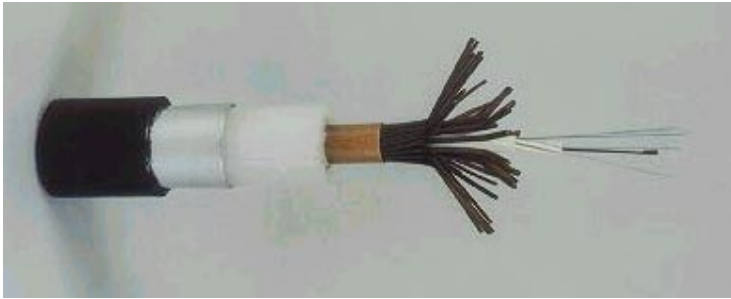
índice de refracción y un recubrimiento, también de vidrio, de índice de refracción menor. El conjunto se rodea de una vaina de polietileno y otras cubiertas de protección. Las dimensiones típicas están en el orden de 100 a $150 \mu m$ de diámetro.

Debido a que el material del recubrimiento tiene un índice de refracción menor al del núcleo (valores típicos 1.485 y 1.5), existe reflexión total para rayos de luz que se propagan en el núcleo con un ángulo mayor (respecto de la normal a la interfase) que el **ángulo aceptable** θ_a , ligado con el ángulo límite (rayos en azul),

y no hay energía radiada fuera del núcleo (los campos en el recubrimiento y más allá son evanescentes - rayos en rojo). Esta característica se mide a través de la llamada **apertura numérica** de la fibra:

$$NA = \text{sen}(\theta_a / 2)$$

Hay diversos modos normales de propagación posibles por encima de la frecuencia de corte. Si la fibra acepta sólo un modo a una dada frecuencia se dice que es una fibra **mono-modo**, mientras que si existen varios modos posibles a una dada frecuencia se habla de una fibra **multi-modo**.



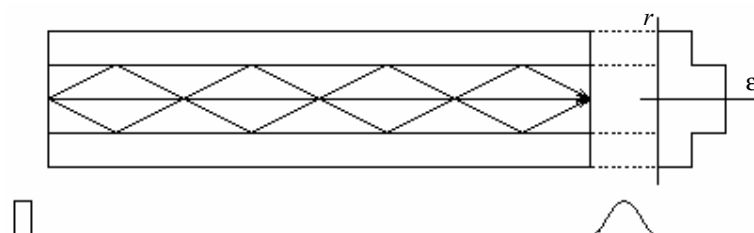
Cada fibra individual (núcleo + recubrimiento + vaina) se agrupa habitualmente en cables de gran número de fibras, y los cables se pueden a su vez agrupar de nuevo en manojos y el conjunto se recubre de capas protectoras y eventualmente almas de metal para disminuir la fragilidad.

La atenuación en la propagación a lo largo de la fibra se debe a varios fenómenos. Hay **absorción** de energía y **dispersión** luminosa. La absorción se debe a la presencia de impurezas en el material de la fibra (por ejemplo, las moléculas de agua tienen un pico de absorción a los 1400 nm) y a la absorción propia del sílice de que está hecha la fibra por encima de los 1600 nm . La dispersión luminosa tiene tres componentes: uno debido a variaciones microscópicas del índice de refracción del vidrio (dispersión de Rayleigh), fenómeno que aumenta con la frecuencia, otro debido a imperfecciones de la estructura cristalina de la fibra, y un tercero por la relación de dispersión no lineal presente en toda guía de ondas. Este tipo de dispersión se denomina **dispersión cromática**, porque depende de la frecuencia de la radiación que viaja por la fibra. Además en las fibras multimodo cada modo tiene una velocidad de propagación propia que depende de la relación de dispersión en cada modo y la frecuencia de la radiación. Esta **dispersión multimodo** es más importante y se agrega a la dispersión cromática (los anchos de banda se suman cuadráticamente). La dispersión es el factor esencial en la limitación del ancho de banda útil de las fibras ópticas, y es una ironía que la ventaja potencial más importante de las comunicaciones ópticas no se haya hecho realidad, ya que las fibras actuales tienen aproximadamente el mismo ancho de banda que un buen coaxial.

También la curvatura de la guía modifica el ángulo de incidencia de la luz sobre la interfase y puede aumentar las pérdidas respecto del caso rectilíneo si el ángulo de incidencia cae por debajo del ángulo límite. Todos estos factores llevan en general a que la mejor performance (mínima absorción) se da en la región de $0.8 \mu\text{m}$ a $1.8 \mu\text{m}$ donde se logran factores de atenuación de 2 dB/Km a 5 dB/Km .

Existen tres formas básicas de presentación de las fibras ópticas:

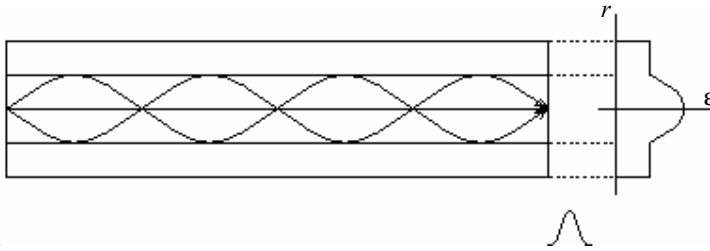
- **Fibra de índice de refracción discontinuo.** En este caso el núcleo tiene índice de refracción



constante y existe un salto abrupto en la interfase con el recubrimiento. La propagación de los rayos es mediante reflexión total en la interfase. El diámetro del núcleo está entre 100 y $500 \mu\text{m}$. Se trata de una guía multimodo, co-

nocida por la sigla **n/m SI MM** (Step Index Multimode), donde n es el radio del núcleo y m el radio del recubrimiento en μm .

- **Fibra de índice de refracción gradual.** En este caso el índice de refracción del núcleo disminuye gradualmente a medida que se avanza hacia la periferia. Esto lleva a que el camino de los rayos se curve hasta que se hacen tangenciales sobre la interfase con el recubrimiento. Se trata de una



guía multimodo y se identifica por la sigla **n/m GI MM** (Graded Index Multimode), donde n es el radio del núcleo y m el radio del recubrimiento en μm . Este tipo de fibra tiene menor dispersión (en consecuencia, mayor ancho de banda) que la fibra de índice discontinuo, porque se diseña la forma variación de variación del índice para que la velocidad de grupo de los distintos modos sea similar. La atenuación también es menor que en la fibra de índice discontinuo, pero es bastante más cara.

- **Fibra mono-modo.** Esta fibra sólo permite un único modo o camino de rayos, porque usa diámetros de núcleo mucho menores que en los otros casos y se trata de una guía de índice de refracción constante con salto discontinuo. Como se propaga un solo modo, la dispersión es más baja que en los otros casos, ya que se trata solamente de dispersión cromática. El sistema de acople es en este caso el de mayor dificultad técnica y costo, así como son mayores los costos de producción, pero se tiene mayor performance.

RESUMEN

En este capítulo se ha realizado un estudio introductorio de la propagación de ondas electromagnéticas por estructuras de guiado, llamadas **guías de ondas**.

- Comenzamos analizando nuevamente los modelos a aplicar de acuerdo a la comparación del tamaño D de los dispositivos respecto de la mínima longitud de onda λ_m del campo electromagnético:
 - Si $D \ll \lambda_m$ vale la aproximación cuasi-estática o cuasi-estacionaria para el cálculo de los campos. Es posible pasar de la descripción de campos a la teoría de circuitos y definir parámetros circuitales concentrados. Este es el **modelo circuital de constantes concentradas**.
 - Si $D \geq \lambda_m$ o $D \sim \lambda_m$ no es posible usar la aproximación cuasi-estática y en principio se debe usar una descripción del problema a partir del campo electromagnético y resolver las ecuaciones de Maxwell para el problema en estudio. Sin embargo, habitualmente cuando la condición cuasi-estática no se cumple solamente en **una** dimensión, es posible dividir el dispositivo en partes cuyas dimensiones satisfagan la condición cuasi-estática y usar un modelo circuital para su descripción. Este es el **modelo circuital de constantes distribuidas**, que hemos usado en el análisis de las líneas de transmisión.
- En el caso general se tienen tres modos diferentes de propagación: modo TEM, donde ambos campos son transversales a la dirección de propagación, el modo TM, donde solamente el campo magnético es transversal y el modo TE, donde sólo el campo eléctrico es transversal. De las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de ondas de Helmholtz surge que se puede expresar el campo dentro de la guía en términos de la/s componentes longitudinales:

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{i}{k_t^2} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) & H_x &= \frac{i}{k_t^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - k_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\
 E_y &= \frac{i}{k_t^2} \left(-k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) & H_y &= -\frac{i}{k_t^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

y de estas expresiones surge un método de cálculo de los campos dentro de una guía de ondas :

- Resolver la ecuación de Helmholtz $\nabla^2 f_z + k^2 f_z = \nabla_t^2 f_z + k_t^2 f_z = 0$ para la componente longitudinal, sabiendo que la dependencia respecto de z (coordenada de propagación) y del tiempo es $e^{i(\omega t - k_z z)}$.
- Usar las condiciones de contorno sobre las paredes de la guía para hallar las constantes de la solución de la ecuación de Helmholtz.
- Calcular las otras componentes del campo.
- Se analiza el guiado de ondas entre un par de planos conductores paralelos que, aunque no constituyen un sistema práctico, permiten describir las propiedades básicas de una guía de ondas.
 - En el modo TEM se puede pasar de la descripción en términos de campos a una descripción en términos de constantes distribuidas como el empleado en las líneas de transmisión:

$$\begin{aligned}
 \text{TEM} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)} &\Rightarrow v(z, t) = \int_{C1 \rightarrow 2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\
 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - kz)} &\Rightarrow i(z, t) = \int_S \mathbf{H} \cdot n dS
 \end{aligned}$$

donde la integral de circulación del campo eléctrico se realiza a lo largo de una curva C de $\zeta = \text{cte.}$ entre ambos conductores, y el flujo del campo magnético se calcula a través de una superficie S de $\zeta = \text{cte.}$ cuyo contorno encierra a sólo uno de los dos conductores, siendo ζ la dirección de propagación.

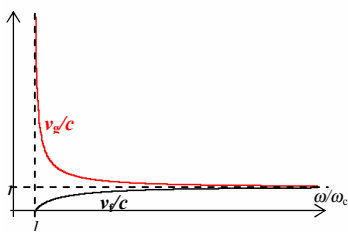
La velocidad de propagación de las ondas coincide en ambos modelos y la impedancia de onda del modelo de campos coincide con la impedancia característica del modelo de constantes distribuidas.

Esta analogía permite el uso de herramientas como la carta de Smith para el diseño de sistemas de guiado de ondas en alta frecuencia. En particular es el modelo estándar en el diseño de redes de microondas,

- En los modos TM y TE tienen los campos:

$$\begin{aligned}
 \text{TM} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} e^{i(\omega t - k_z z)} \left[\frac{k_z}{k} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right] \\
 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{0n}}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}} \\
 \text{TE} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -i\omega\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{0n}}{k_t} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\
 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_{0n} \left[\frac{ik_z}{k_t} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{i(\omega t - k_z z)}
 \end{aligned}$$

y surge que sólo se pueden propagar ondas de frecuencia superior a una **frecuencia de corte**, que depende además del orden del modo. $\omega_n = n \frac{\pi c}{d}$



Las velocidades de fase y grupo son las mismas para ambos modos. La guía presenta dispersión normal:

$$v_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_n/\omega)^2}} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c \sqrt{1 - (\omega_n/\omega)^2} \quad v_f v_g = c^2$$

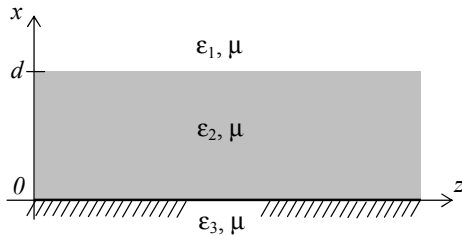
La **impedancia de onda**, relación entre las componentes del campo eléctrico y el magnético **transversales** a la propagación es:

$$Z_{\text{TM}_n} = \eta \sqrt{1 - \frac{\omega_{c_n}^2}{\omega^2}} \quad Z_{\text{TE}_n} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c_n}^2}{\omega^2}}}$$

- Se calculan la energía transportada, la potencia disipada por efecto Joule y el coeficiente de atenuación en las paredes conductoras para los tres modos:

$$\begin{aligned}
 \text{TEM: } \langle N \rangle &= \frac{|E_0|^2}{2\eta} e^{-2\alpha z} \hat{z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = R_s / \eta d \\
 \text{TM: } \langle N \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|E_{0n}|^2}{2\eta} \frac{k_z}{k} \cos^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{z} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{TM} = \frac{2}{d} \frac{R_s}{Z_{TM}} = \frac{2R_s}{\eta d \sqrt{1 - \omega_c^2 / \omega^2}} \\
 \text{TE: } \langle N \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega \mu |H_{0n}|^2}{k_t^2} k_z \sin^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{z} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{TE} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{Z_{TE} R_s}{\eta^2 d} = \frac{\omega_c^2 / \omega^2}{\sqrt{1 - \omega_c^2 / \omega^2}} \frac{R_s}{\eta d}
 \end{aligned}$$

- Se hace una breve introducción a las guías abiertas, que conducen ondas electromagnéticas por desadaptación de impedancias más que por la presencia de superficies conductoras. En particular, se analiza la guía de hoja dieléctrica entre dos dieléctricos: el sustrato y el recubrimiento. En este último caso, el guiado se realiza utilizando un modo de propagación que haga incidir oblicuamente las ondas sobre las interfases de la guía con un ángulo superior al ángulo límite de reflexión total. Las ecuaciones de los campos son:



$$\begin{aligned}
 E_{y1} &= \frac{i\omega\mu}{q^2} \frac{\partial H_{z1}}{\partial x} = -\frac{i\omega\mu}{q} A e^{-qx} & H_{x1} &= -\frac{ik_z}{q^2} \frac{\partial H_{z1}}{\partial x} = \frac{ik_z}{q} A e^{-qx} \\
 E_{y2} &= \frac{i\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x} = \frac{i\omega\mu}{h} (B \cos(hx) - C \sin(hx)) & H_{x2} &= -\frac{ik_z}{h^2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x} = -\frac{ik_z}{h} (B \cos(hx) - C \sin(hx)) \\
 E_{y3} &= \frac{i\omega\mu}{p^2} \frac{\partial H_{z3}}{\partial x} = \frac{i\omega\mu}{p} D e^{px} & H_{x3} &= -\frac{ik_z}{p^2} \frac{\partial H_{z3}}{\partial x} = -\frac{ik_z}{p} D e^{px}
 \end{aligned}$$

Las constantes surgen de la resolución de una ecuación trascendente. Si el sustrato y el recubrimiento tienen las mismas propiedades la ecuación es: $\tan(hd) = \frac{2ph}{h^2 - p^2}$

que puede resolverse en forma gráfica para hallar el espesor h de la capa para propagación.

- Finalmente se hace una introducción a las fibras ópticas como guías de onda.

PROBLEMAS

- 9.1) Una onda electromagnética se propaga entre dos placas paralelas conductoras separadas 5 cm entre sí. La frecuencia de la onda es de 8 GHz . a) ¿Cuántos modos distintos se pueden propagar en la guía? b) ¿Cuál es la longitud de onda en la guía para cada modo?
[Rta: a) 5, b) 3.75, 4.045, 5.669 cm]
- 9.2) ¿Cuál es la separación máxima permisible entre dos placas paralelas para que de los modos **TE** sólo pueda propagarse el primero, a una frecuencia de 10 GHz ? Suponga que entre las dos placas hay aire.
[Rta: $d < 3\text{ cm}$, estudie el caso $d = 3\text{ cm}$]
- 9.3) Grafique aproximadamente las componentes de los campos **E** y **H** entre dos placas paralelas, en un cierto instante, para el modo de propagación **TE₁**.
- 9.4) Considere nuevamente el ejercicio 8.2). Suponga ahora que entre las dos placas hay un material con $\epsilon_r = 4$. ¿Cuál debería ser ahora la separación entre placas para que solamente se propaguen los primeros modos **TEM**, **TE₁** y **TM₁** en un rango de frecuencias con $f < 10\text{ GHz}$?
[Rta: $0.0075\text{ m} < d < 0.015\text{ m}$]
- 9.5) Obtenga el diagrama ω - β para el modo **TE₁** de propagación dentro de dos placas paralelas. Considere que la separación entre placas es de 3 cm y que el medio de propagación es aire.
- 9.6) Calcule las velocidades de fase y de grupo de todos los modos que se pueden propagar a una frecuencia de 12 GHz entre dos placas paralelas de cobre, separadas 4 cm entre sí.
[Rta: $v_f(\times 10^8\text{ m/s}) = 3.00, 3.16, 3.84, 8.62$, $v_g(\times 10^8\text{ m/s}) = 3.00, 2.85, 2.34, 1.04$]
- 9.7) Para un sistema de dos placas paralelas, grafique las impedancias de onda para los modos **TE₁**, **TM₁**, **TE₃** y **TM₃** del ejercicio anterior.