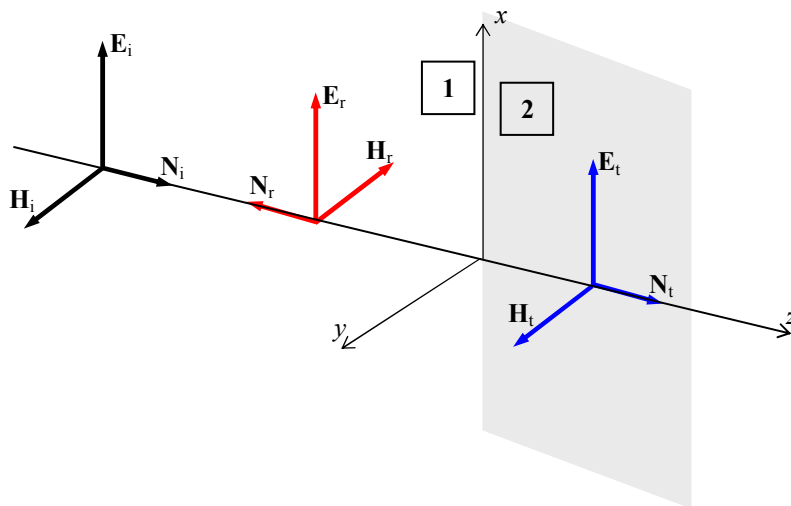


## 8 - Ondas Electromagnéticas (cont.)

En esta parte veremos la propagación de ondas electromagnéticas en presencia de interfaces entre medios de características diferentes. Cuando las ondas inciden normalmente sobre la interfase se producen reflexiones cuya descripción es equivalente a la de la propagación de ondas en líneas de transmisión. Numerosas aplicaciones en blindajes surgen de esta teoría. En la incidencia oblicua se hallan las leyes de Snell de la óptica. Finalmente veremos brevemente la teoría de la difracción de ondas al propagarse cerca de obstáculos.

### Incidencia normal sobre una interfase

Hemos visto la propagación de ondas en medios ilimitados. En las siguientes secciones veremos el comportamiento de los campos cuando ondas electromagnéticas inciden sobre una superficie interfase que separa dos medios de propiedades (simbolizadas por su impedancia intrínseca) diferentes. Por simplicidad matemática usaremos ondas planas e interfaces planas.



Consideremos una onda plana monocromática linealmente polarizada que incide **normalmente** desde un medio (1) sobre un plano interfase que lo separa de un medio (2).

En la incidencia normal la dirección de propagación es **perpendicular al plano interfase**. Suponemos que el **medio de incidencia** (1) no tiene pérdidas ( $k_1$  y  $\eta_1$  reales). El **medio de transmisión** (2) tendrá en general parámetros complejos  $\gamma_2$  y  $\eta_2$ .

Planteamos las ecuaciones de los

campos en las dos regiones:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= E_{0+} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - k_1 z)} + E_{0-} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega' t + k_1' z)} \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_{0+}}{\eta_1} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_1 z)} - \frac{E_{0-}}{\eta_1} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega' t + k_1' z)} \end{aligned} \quad k_1' = k_1(\omega') \\
 (2) \quad & \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) &= E_{0t} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega'' t - \gamma_2'' z)} \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_{0t}}{\eta_2} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega'' t - \gamma_2'' z)} \end{aligned} \quad \gamma_2'' = \gamma_2(\omega'')
 \end{aligned}$$

En la región de incidencia, debe haber en general una **onda incidente** y una **onda reflejada**, debido a la presencia de la interfase que implica una discontinuidad en el medio donde ocurre la propagación. En la región de transmisión, supuesto semi-infinito, sólo hay una **onda transmitida**. Las frecuencias de estas tres ondas son en general diferentes.

Los campos deben cumplir las condiciones de contorno en la interfase  $z = 0$ . Como ambos campos son tangenciales a la superficie de separación, se conservan:

$$\begin{aligned}
 E_1(z=0, t) = E_2(z=0, t) & \Rightarrow E_{0+} e^{i\omega t} + E_{0-} e^{i\omega' t} = E_{0t} e^{i\omega'' t} \\
 H_1(z=0, t) = H_2(z=0, t) & \Rightarrow \frac{E_{0+}}{\eta_1} e^{i\omega t} - \frac{E_{0-}}{\eta_1} e^{i\omega' t} = \frac{E_{0t}}{\eta_2} e^{i\omega'' t}
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se deben cumplir para todo  $t$ . Como las funciones exponenciales complejas son ortogonales para distintos valores de  $\omega$ , debe ser  $\omega = \omega' = \omega''$ .

Queda así:  $E_{0+} + E_{0-} = E_{0t}$   $\frac{E_{0+}}{\eta_1} - \frac{E_{0-}}{\eta_1} = \frac{E_{0t}}{\eta_2}$

De estas dos ecuaciones podemos despejar  $E_{0-}$  y  $E_{0t}$  en función de  $E_{0+}$ :

$$\rho = \frac{E_{0-}}{E_{0+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad \tau = \frac{E_{0t}}{E_{0+}} = 1 + \rho = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

donde hemos definido los **coeficientes de reflexión** y **transmisión**  $\rho$  y  $\tau$

Desde el punto de vista del transporte de energía, podemos calcular el **flujo medio de potencia por unidad de área** que transportan las ondas involucradas:

$$\begin{aligned} \langle P_i \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(E_i H_i^*) = \frac{E_{0+}^2}{2\eta_1} \quad (\eta_1 \text{ real}) \\ \langle P_r \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(E_r H_r^*) = |\rho|^2 \frac{E_{0+}^2}{2\eta_1} = |\rho|^2 \langle P_i \rangle \Rightarrow R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = |\rho|^2 \\ \langle P_t \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(E_t H_t^*) = |\tau|^2 \frac{\eta_1 \eta_2'}{|\eta_2|^2} \langle P_i \rangle \Rightarrow T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{\eta_1 \eta_2'}{|\eta_2|^2} |\tau|^2 \end{aligned}$$

donde  $R$  y  $T$  son los **coeficientes de reflexión** y **transmisión de potencia**.

Para una onda plana que se propaga en un medio infinito, la relación entre el campo eléctrico y el magnético es  $\pm\eta$ , donde  $\eta$  es la impedancia intrínseca de ese medio y el signo superior corresponde a la onda progresiva y el inferior a la regresiva. Esto ocurre para los campos transmitidos, que forman una onda progresiva, pero no para los campos en el medio de incidencia. En este último caso podemos definir la **impedancia de campo** o **impedancia de onda**:

$$Z(z) = \frac{E_1}{H_1} = \frac{E_{0+} e^{-ikz} + E_{0-} e^{ikz}}{\frac{E_{0+}}{\eta_1} e^{-ikz} - \frac{E_{0-}}{\eta_1} e^{ikz}} \Rightarrow Z(z) = \eta_1 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$$

que depende de la posición.

De las ecuaciones para la incidencia normal se observa que hay una gran semejanza con las ecuaciones que hemos hallado para las líneas de transmisión:

	<b>Líneas de transmisión</b>	<b>Incidencia normal</b>
Característica del medio	<i>Impedancia característica:</i> $Z_0$	<i>Impedancia intrínseca:</i> $\eta$
Magnitud física	<i>tensión:</i> $v(z,t)$ <i>corriente:</i> $i(z,t)$	<i>campo eléctrico:</i> $E(z,t)$ <i>campo magnético:</i> $H(z,t)$
Coefficiente de reflexión	$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$	$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$
Coefficiente de transmisión	$\tau = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0} = 1 + \rho$	$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \rho$
Reflexión de potencia	$R =  \rho ^2$	$R =  \rho ^2$
Transmisión de potencia	$T = 1 - R$	$T = 1 - R$
Impedancia de campo	$Z(z) = Z_0 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$	$Z(z) = \eta_1 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$
Relación de onda estacionaria	$ROE = \frac{1 +  \rho }{1 -  \rho }$	$ROE = \frac{1 +  \rho }{1 -  \rho }$

**Esto significa que muchas técnicas del análisis de la propagación de ondas en líneas, entre ellas el uso de la carta de Smith, se pueden usar en la descripción de la propagación en la incidencia normal.**

### Incidencia sobre un dieléctrico sin pérdidas

**En este caso  $\eta_2$  es real y entonces  $\rho$  es real.**

El campo reflejado se hallará en fase con el campo incidente en  $z = 0$  si  $\eta_2 > \eta_1$  y en contrafase si  $\eta_2 < \eta_1$ . Sólo si las impedancias intrínsecas de ambos medios coinciden no habrá reflexión. En general, esto ocurrirá cuando se trate de un único medio (no existe interfase) si ambos medios son dieléctricos, ya que serán medios paramagnéticos y las permeabilidades habitualmente serán cercanas a la del vacío. Sin embargo, como veremos más abajo, actualmente se usan materiales de ferrita cerámica con impedancia característica similar a la del aire.

**Esta situación equivale al caso de una línea ideal cargada con una resistencia.**

### Incidencia sobre un dieléctrico con pérdidas

**En este caso  $\eta_2$  es compleja y entonces  $\rho$  es también complejo.**

Para dieléctricos de **bajas pérdidas**,  $\eta_2 = \eta_2' + i\eta_2''$  con  $\eta_2'' \ll \eta_2'$  y el desfase entre los campos es pequeño. Los campos de la onda transmitida decaen lentamente en la propagación.

**Esta situación equivale al caso de una línea ideal cargada con una impedancia de reactancia pequeña frente a su resistencia.**

### Incidencia sobre un conductor

**En este caso  $\eta_2$  es compleja y pequeña:**  $\eta_2 = (1 + i)/\sigma\delta \ll \eta_0$ .

Si se tratara de un **conductor perfecto** ( $\sigma \rightarrow \infty$ ),  $\eta_2 \rightarrow 0$ . En tal caso  $\rho = -1$  y se forman ondas estacionarias de **E** y **H** en el medio de incidencia. La onda de **E** estará desfasada en  $\pi/2$  en tiempo y espacio respecto de la onda de **H**. Toda la potencia incidente se refleja.

**Esta situación es equivalente al caso de la línea ideal cortocircuitada.**

Cuando el medio conductor **no es perfecto**, de todas formas  $|\eta_2| \ll \eta_0$  y entonces:

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = -\frac{1 - \eta_2/\eta_1}{1 + \eta_2/\eta_1} \approx -\left(1 - 2\frac{\eta_2}{\eta_1}\right) = -1 + 2\frac{\eta_2}{\eta_1}$$

de modo que  $\rho$  difiere del caso ideal por una pequeña diferencia.

El coeficiente de transmisión es:  $\tau = 1 + \rho \approx 2\frac{\eta_2}{\eta_1} \Rightarrow |\tau| \ll 1$

La potencia que se propaga por el conductor es:

$$\langle N_t \rangle = \frac{\eta_2' |E_{ot}|^2}{2|\eta_2|^2} e^{-2z/\delta} = \frac{\eta_2' |\tau|^2 |E_{o+}|^2}{2|\eta_2|^2} e^{-2z/\delta} \approx \frac{2|E_{o+}|^2}{\eta_1^2 \sigma \delta} e^{-2z/\delta} = \frac{4}{\eta_1 \sigma \delta} \langle N_i \rangle e^{-2z/\delta}$$

donde  $\langle P_i \rangle$  es el valor medio de la potencia incidente. Toda esta potencia se disipa por efecto Joule en el semiespacio conductor. Por lo tanto  $4/(\eta_1 \sigma \delta)$  de la potencia incidente por unidad de área de interfase se disipa en el conductor. Este valor es muy pequeño. Por ejemplo, para la incidencia normal de una onda de  $10^{14} \text{ Hz}$  (luz visible) desde el vacío sobre un semiespacio de cobre:

$$\left. \begin{array}{l} \eta_1 = \eta_0 \approx 377 \Omega \\ \sigma \approx 6 \times 10^7 (\Omega m)^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{\eta_1 \sigma \delta} = \frac{4}{\eta_1} \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{2 \sigma}} \approx 1.9 \times 10^{-9}$$

y podemos decir que prácticamente toda la potencia se ve reflejada en la interfase. Por este motivo el cobre (como la mayoría de los metales) es opaco a la luz visible.

**Ejemplo 8.13:** Los coeficientes de reflexión y transmisión se han definido a partir de los campos eléctricos de las ondas incidente, reflejada y transmitida sobre la interfase. Encuentre sus expresiones en términos de los campos magnéticos.

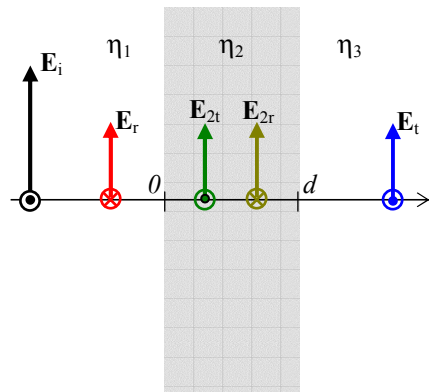
Tenemos: 
$$\rho_M = \frac{H_r}{H_i} = \frac{-E_r/\eta_1}{E_i/\eta_1} = -\rho \quad \tau_M = \frac{H_t}{H_i} = \frac{E_t/\eta_2}{E_i/\eta_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau$$

El coeficiente de reflexión "magnético" es igual y de signo opuesto que el coeficiente de reflexión "eléctrico". Esto indica que el desfase entre los campos magnéticos incidente y reflejado sobre la interfase difiere en  $\pi$  del desfase entre los correspondientes campos eléctricos. El coeficiente de transmisión "magnético" es  $(\eta_1/\eta_2)$  veces el coeficiente de transmisión "eléctrico".

### Incidencia sobre capas materiales

Cuando una onda plana incide normalmente sobre capas materiales, en cada capa el campo estará formado por una onda progresiva y una onda regresiva, salvo en el medio de transmisión. El análisis de los campos se realiza imponiendo sobre cada interfase las condiciones de contorno, como vemos en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 8.14:** Considere una capa de espesor  $d$  e impedancia intrínseca  $\eta_2$  que separa dos medios de impedancias intrínsecas  $\eta_1$  y  $\eta_3$ . Halle los campos en todo el espacio si sobre la capa incide normalmente una onda plana monocromática linealmente polarizada.

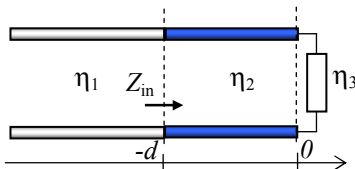


La situación se esquematiza en la figura. El modelo equivalente de líneas de transmisión se muestra abajo. Los campos en cada región son:

$$(1) \begin{cases} \mathbf{E}_i = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \gamma_1 z)} & \mathbf{H}_i = (E_0/\eta_1) \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - \gamma_1 z)} \\ \mathbf{E}_r = E_{0r} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t + \gamma_1 z)} & \mathbf{H}_r = -(E_{0r}/\eta_1) \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t + \gamma_1 z)} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \mathbf{E}_{2t} = E_{02t} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \gamma_2 z)} & \mathbf{H}_{2t} = (E_{02t}/\eta_2) \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - \gamma_2 z)} \\ \mathbf{E}_{2r} = E_{02r} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t + \gamma_2 z)} & \mathbf{H}_{2r} = -(E_{02r}/\eta_2) \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t + \gamma_2 z)} \end{cases}$$

$$(3) \quad \mathbf{E}_t = E_{0t} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \gamma_3 z)} \quad \mathbf{H}_t = (E_{0t}/\eta_3) \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - \gamma_3 z)}$$



Las condiciones de borde, que implican la conservación de las componentes tangenciales de los campos sobre cada interfase llevan a las ecuaciones:

$$z = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_0 + E_{0r} = E_{02t} + E_{02r} \\ E_0 - E_{0r} = \frac{\eta_1}{\eta_2} (E_{02t} - E_{02r}) \end{cases}$$

$$z = d \Rightarrow \begin{cases} E_{02t} e^{-i\gamma_2 d} + E_{02r} e^{i\gamma_2 d} = E_{0t} e^{-i\gamma_3 d} \\ E_{02t} e^{-i\gamma_2 d} - E_{02r} e^{i\gamma_2 d} = \frac{\eta_2}{\eta_3} E_{0t} e^{-i\gamma_3 d} \end{cases}$$

de donde pueden despejarse las cuatro incógnitas  $E_{0r}, E_{0t}, E_{02r}, E_{02t}$ . Se obtiene:

$$\rho = \frac{E_{0r}}{E_0} = -\frac{(\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) e^{i\gamma_2 d} - (\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-i\gamma_2 d}}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) e^{i\gamma_2 d} - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-i\gamma_2 d}}$$

$$\tau = \frac{E_{0t}}{E_0} = \frac{4\eta_2\eta_3 e^{i\gamma_3 d}}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) e^{i\gamma_2 d} - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-i\gamma_2 d}}$$

$$\frac{E_{02t}}{E_0} = \frac{2\eta_2(\eta_3 + \eta_2) e^{i\gamma_2 d}}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) e^{i\gamma_2 d} - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-i\gamma_2 d}}$$

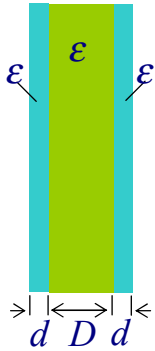
$$\frac{E_{02r}}{E_0} = \frac{2\eta_2(\eta_3 - \eta_2) e^{i\gamma_2 d}}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) e^{i\gamma_2 d} - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-i\gamma_2 d}}$$

$\rho$  también se puede obtener con la analogía de líneas de transmisión calculando la impe-

dancia de entrada  $Z_{in}$  del segundo tramo:  $\rho = \frac{Z_{in} - \eta_1}{Z_{in} + \eta_1}$  como en el siguiente Ejemplo.

**Ejemplo 8.15:** Un radomo está formado por tres capas, las exteriores de 1.5 mm de espesor y permitividad relativa 4 y la central de espuma sintética de 1.81 cm de espesor y permitividad relativa 1.1. Calcule el coeficiente de reflexión a incidencia normal para ondas de 3 y 6 GHz.

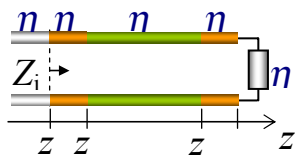
Un **radomo** (de radar+domo - figura) es una cubierta que encierra una antena (u otra instalación de comunicaciones) para protegerla del medio ambiente, rayos, etc. Su uso más extendido es en aviones, buques, helicópteros, etc. Idealmente debe ser transparente a la radiación que emite o recibe la antena, aunque esto se logra en un ancho de banda limitado.



Para determinar el coeficiente de reflexión del conjunto de capas es suficiente, en la analogía con líneas de transmisión, conocer la impedancia de entrada del conjunto  $Z_{in}$ . En la figura:

$$\eta_1 = \eta_0 / \sqrt{\epsilon_{1r}} = \eta_0 / 2 \quad \eta_2 = \eta_0 / \sqrt{\epsilon_{2r}} \approx 0.95\eta_0$$

$$z_1 = -d = -0.0015 \text{ m} \quad z_2 = -(d + D) = -0.0196 \text{ m} \quad z_3 = -(2d + D) = -0.0211 \text{ m}$$



Para hallar la impedancia de entrada del conjunto el método más sencillo es usar la carta de Smith para calcular las sucesivas impedancias de entrada de cada interfase. Primero normalizamos la impedancia de carga a  $\eta_1$ . El punto de carga (**A**) se halla entonces en el punto  $z = 2 + i0$ . Desde allí nos trasladamos a  $|\rho|$  constante hacia el generador una distancia:  $d / \lambda_1 = df / v_1 = df \sqrt{\epsilon_{1r}} / c \approx 0.03$  ( $f = 3\text{GHz}$ ).

Llegamos así a **B**, donde medimos la impedancia normalizada:  $z(z_1) \approx 1.8 - i0.5$  que corresponde a la impedancia de entrada:

$$Z(z_1) \approx (1.8 - i0.5)\eta_0 / 2$$

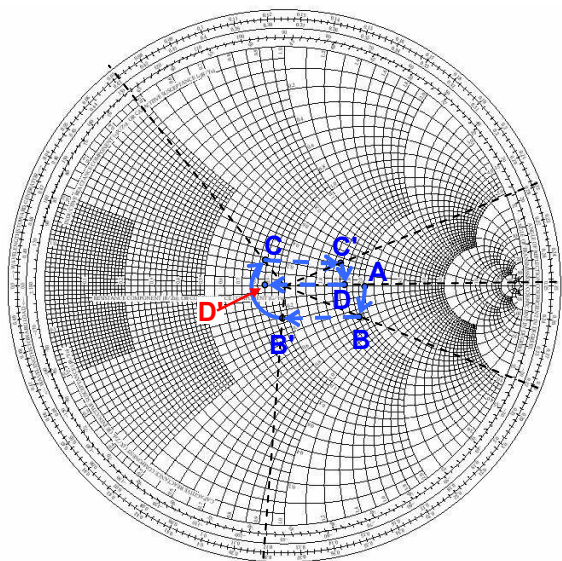
Renormalizamos esta impedancia a  $\eta_2$ , que ahora es carga de la línea representativa de la capa intermedia:

$$z'(z_1) \approx (1.8 - i0.5)\sqrt{\epsilon_{2r}} / 2 \approx 0.95 - i0.26$$

(punto **B'**). La impedancia de entrada a la capa intermedia en  $z_2$  se obtiene ahora girando desde **B'** a  $|\rho|$  constante hacia el generador una distancia:  $D / \lambda_2 = Df \sqrt{\epsilon_{2r}} / c \approx 0.19$  lo que nos lleva al punto **C** cuya impedancia normalizada es:  $z(z_2) \approx 0.82 + i0.17$  que corresponde a una impedancia verdadera:

$$Z(z_2) \approx (0.82 + i0.17)0.95\eta_0$$

Esta es impedancia de carga para la capa extrema izquierda. Normalizamos a  $\eta_1$ :  $z'(z_2) \approx 1.57 + i0.33$  y obtenemos el punto **C'**. Desde aquí giramos a  $|\rho|$  constante hacia el generador  $d / \lambda_1 \approx 0.03$  para llegar a **D**, que da la impedancia de entrada de todo el conjunto:  $z(z_3) \approx 1.68 + i0.02$  que corresponde a una impedancia  $Z_{in} \approx (1.68 + i0.02)\eta_0 / 2$ . Finalmente normalizamos a  $\eta_0$  para obtener **D'**. La distancia entre **D'** y el centro de la carta (relativa al radio de la carta) nos da el módulo del coeficiente de reflexión total:  $|\rho| \approx 0.086$ , que como se ve es muy bajo, indicando que el "sandwich" del radomo es bastante transparente a la frecuencia de cálculo. A la frecuencia doble se deben recalculan las relaciones  $z/\lambda$ , lo que modifica todas las impedancias de entrada a cada sector. Se obtiene en este caso:  $|\rho| \approx 0.45$  lo que indica que la reflexión es importante (~21% de la potencia incidente sobre el radomo se refleja).



**Ejemplo 8.16:** Analice la incidencia normal sobre una capa de un buen conductor y espesor grande frente a la profundidad de penetración a la frecuencia de operación para simplificar las ecuaciones resultantes.

Si la capa es de un buen conductor:

$$\gamma_2 = \frac{1-i}{\delta} \Rightarrow e^{i\gamma_2 d} = e^{-d/\delta} e^{id/\delta} \quad \eta_2 = \frac{1+i}{\sigma\delta} \Rightarrow |\eta_2| \ll \eta_1, \eta_3$$

Tenemos así, desarrollando según Taylor:

$$\rho \approx -1 - 2i \frac{\eta_2}{\eta_1} \cot \left[ (1-i) \frac{d}{\delta} \right] = -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{e^{id/\delta} e^{d/\delta} + e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}}{e^{id/\delta} e^{d/\delta} - e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}}$$

$$\tau \approx 4 \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{e^{ik_3 d}}{e^{id/\delta} e^{d/\delta} - e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}}$$

$$\frac{E_{02t}}{E_0} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{e^{id/\delta} e^{d/\delta}}{e^{id/\delta} e^{d/\delta} - e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}} \quad \frac{E_{02r}}{E_0} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}}{e^{id/\delta} e^{d/\delta} - e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}}$$

Si el espesor de la capa es grande frente a la profundidad de penetración, como ocurre a altas frecuencias en muchas aplicaciones, los términos que tienen la exponencial  $e^{-d/\delta}$  tienden a cero y nos queda:

$$\rho \approx -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad \tau \approx 4 \frac{\eta_2}{\eta_1} e^{i(k_3-1/\delta)d} e^{-d/\delta} \quad \frac{E_{02t}}{E_0} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad \frac{E_{02r}}{E_0} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} e^{-2id/\delta} e^{-2d/\delta}$$

Se observa que que el coeficiente de reflexión es prácticamente el que se tendría al incidir sobre un conductor de espesor infinito (-1) y que dentro de la capa la onda regresiva es despreciable frente a la onda progresiva. Esto se debe a que la onda regresiva dentro de la capa surge del rebote en la interfase derecha de la onda que se propagó en la capa, la que se ve muy atenuada con respecto a su valor original. También se observa que la energía que atraviesa la capa, que es proporcional al módulo al cuadrado del coeficiente de transmisión es muy baja, ya que interviene el factor  $e^{-2d\delta}$ .

Podemos calcular la potencia perdida en la capa conductora por unidad de área. Despreciando la onda regresiva dentro de la capa, el campo en ella es:

$$\mathbf{E}_2 = E_{02t} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - k_2 z)} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \hat{\mathbf{x}} e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

y la densidad de potencia media disipada por efecto Joule es:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_2^*) = \frac{\sigma |E_2|^2}{2} \approx 2\sigma \frac{|\eta_2|^2}{\eta_1^2} |E_0|^2 e^{-2z/\delta}$$

donde hemos supuesto que el medio de incidencia no tiene pérdidas ( $\eta_1$  real). La potencia perdida por unidad de área en toda la capa es:

$$\langle W \rangle = \int_{capa} \langle w \rangle dz \approx 2\sigma \frac{|\eta_2|^2}{\eta_1^2} |E_0|^2 \int_0^d e^{-2z/\delta} dz = 2\sigma \frac{|\eta_2|^2}{\eta_1^2} |E_0|^2 \frac{\delta}{2} (1 - e^{-2d/\delta}) \approx \sigma\delta \frac{|\eta_2|^2}{\eta_1^2} |E_0|^2$$

cuando el espesor de la capa es grande frente a la profundidad de penetración. Podemos reescribir esta expresión en otros términos de mayor utilidad observando que, si el campo magnético sobre la primera interfase es:

$$H_1|_{z=0} = \frac{E_0 - E_{0r}}{\eta_1} = \frac{1-\rho}{\eta_1} E_0 \approx 2 \frac{E_0}{\eta_1} \Rightarrow \frac{|E_0|^2}{\eta_1^2} \approx \frac{|H_1|_{z=0}|^2}{4} = \frac{|H_s|^2}{4}$$

donde  $H_s$  es el **campo magnético superficial**. Como:  $\eta_2 = \frac{1+i}{\sigma\delta}$  nos queda:

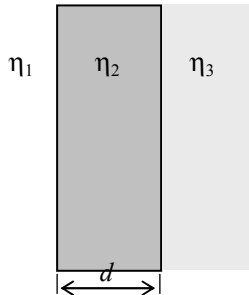
$$\langle W \rangle \approx \sigma\delta \frac{|\eta_2|^2}{\eta_1^2} |E_0|^2 \approx \sigma\delta \frac{2}{\sigma^2 \delta^2} \frac{|H_s|^2}{4} = \frac{1}{2} |H_s|^2 R_s$$

donde  $R_s = 1/\sigma\delta$  es la resistencia superficial del material que forma la capa. Este análisis es similar al realizado para ondas que se propagan en un semiespacio conductor en la primera parte de este capítulo.

De este análisis surge que la potencia electromagnética que atraviesa la capa es muy pequeña siempre que su espesor sea grande respecto a la profundidad de penetración del material a la/s frecuencia/s de trabajo. En tal caso, una capa conductora es un excelente **blindaje** para ondas electromagnéticas.

**Recubrimiento de cuarto de onda**

Supongamos que los tres medios son dieléctricos sin pérdidas. Analicemos las características que debe tener la capa para anular la reflexión de ondas que incidan normalmente. Esto es de interés en aplicaciones ópticas y de medición.



Debido a la analogía con las líneas de transmisión, puede verse que este problema es equivalente a la adaptación mediante un transformador de cuarto de onda entre una línea de impedancia característica  $\eta_1$  y una impedancia de carga  $\eta_3$ . Las ecuaciones de diseño del adaptador son entonces:

$$l_2 = \lambda_2 / 4 \qquad \eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$$

Podemos verificar que estas condiciones dan reflexión nula a partir de la expresión de  $\rho$  :

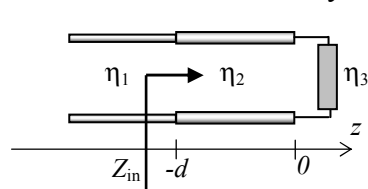
$$\rho = \frac{E_{0r}}{E_0} = - \frac{(\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) e^{ik_2 d} - (\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-ik_2 d}}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) e^{ik_2 d} - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-ik_2 d}}$$

El factor exponencial resulta:  $e^{\pm ik_2 d} = e^{\pm i \frac{2\pi \lambda_2}{\lambda_2} \frac{\lambda_2}{4}} = e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \pm i$  y entonces:

$$\rho = \frac{E_{0r}}{E_0} = - \frac{(\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) + (\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 - \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) + (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2)} = - \frac{\eta_1 \eta_3 - \eta_2^2}{\eta_1 \eta_3 + \eta_2^2}$$

y  $\rho$  se anula cuando la impedancia de la capa es la media geométrica entre las impedancias de los medios adyacentes. Una capa que cumple estas condiciones se denomina **recubrimiento de cuarto de onda** y es muy utilizado en instrumentos ópticos para eliminar las reflexiones.

El recubrimiento de  $\lambda/4$  funciona adecuadamente a una única frecuencia, pero fuera de ella el coeficiente de reflexión ya no es cero. Podemos calcularlo usando nuevamente la analogía con



las líneas de transmisión a partir de la expresión de la impedancia de entrada del conjunto recubrimiento+segundo medio y la impedancia intrínseca del primer medio:

$$\rho = \frac{Z_{in} - \eta_1}{Z_{in} + \eta_1} \qquad \text{con: } Z_{in} = \eta_2 \frac{\eta_3 + i \eta_2 \tan(\beta_2 l_2)}{\eta_2 + i \eta_3 \tan(\beta_2 l_2)}$$

Entonces:

$$\rho = \frac{\eta_2 \frac{\eta_3 + i \eta_2 \tan(\beta_2 l_2)}{\eta_2 + i \eta_3 \tan(\beta_2 l_2)} - \eta_1}{\eta_2 \frac{\eta_3 + i \eta_2 \tan(\beta_2 l_2)}{\eta_2 + i \eta_3 \tan(\beta_2 l_2)} + \eta_1} = \frac{\eta_2 (\eta_3 - \eta_1) + i (\eta_2^2 - \eta_1 \eta_3) \tan(\beta_2 l_2)}{\eta_2 (\eta_3 + \eta_1) + i (\eta_2^2 + \eta_1 \eta_3) \tan(\beta_2 l_2)}$$

Pero  $\beta_2 l_2 = \frac{2\pi \lambda_{20}}{\lambda_2} \frac{\lambda_{20}}{4} = \frac{\pi \lambda_{20}}{2 \lambda_2} = \frac{\pi \omega}{2 \omega_0}$  donde  $(\omega_0, \lambda_{20})$  son la frecuencia angular central y la

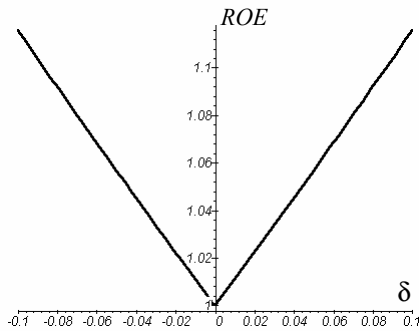
longitud de onda en el recubrimiento para adaptación y  $(\omega, \lambda_2)$  son los valores correspondientes fuera de adaptación. Si llamamos  $\omega = \omega_0(1+\delta)$  con  $\delta \ll 1$  tenemos:

$$\tan(\beta_2 l_2) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(1+\delta)\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tan\left(\delta \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \tan\left(\delta \frac{\pi}{2}\right)} \cong - \frac{1}{\tan\left(\delta \frac{\pi}{2}\right)} \cong - \frac{2}{\pi \delta}$$

y entonces:

$$\rho = \frac{\pi \eta_2 (\eta_3 - \eta_1) \delta - 2i (\eta_2^2 - \eta_1 \eta_3)}{\pi \eta_2 (\eta_3 + \eta_1) \delta - 2i (\eta_2^2 + \eta_1 \eta_3)} \qquad ROE = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

**Ejemplo 8.17:** Se desea diseñar un recubrimiento de cuarto de onda para adaptar al aire un vidrio de permitividad relativa  $\epsilon_{r2} = 4$  para ondas de 100 MHz. Analizar la variación de ROE con la frecuencia alrededor de la adaptación.



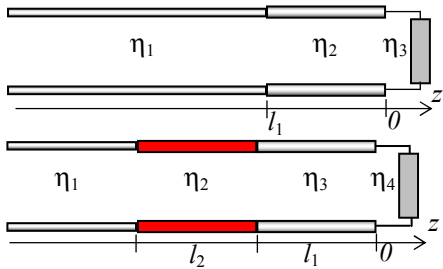
El diseño del adaptador de  $\lambda/4$  es:

$$\eta_1 = \sqrt{\eta_0 \eta_2} = \frac{\eta_0}{\sqrt{4\epsilon_{r2}}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{2}} \cong 266.58 \Omega$$

$$l_a = \frac{\lambda_a}{4} = \frac{v_a}{4f} = \frac{c}{4f\sqrt{\epsilon_{r2}}} \cong 0.375 \text{ m}$$

Si plotamos ROE en función de  $\delta$ , obtenemos la gráfica de la izquierda. Se observa que ROE varía prácticamente en forma lineal alrededor de la frecuencia de adaptación.

Cuando se sale de la frecuencia de resonancia aumenta el ROE y la reflexión. Una forma de aumentar el ancho de banda, es decir, el rango de frecuencias en que ROE es cercano a 1 es colocar varios recubrimientos sucesivos con impedancias que van cambiando gradualmente desde las impedancias de los medios extremos. Una forma de hacerlo es agrupar recubrimientos de  $\lambda/4$  tales que las relaciones de las sucesivas impedancias sean los coeficientes de las potencias del binomio. Por ejemplo, para 1 sección (3 medios) se usan los coeficientes del binomio de grado 1:



**• 1 sección (cuarto de onda):**

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \Rightarrow (1,1) \Rightarrow \log \frac{\eta_2}{\eta_1} = \log \frac{\eta_3}{\eta_2} \Rightarrow \eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$$

**• 2 secciones:**

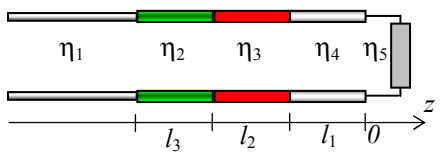
$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \Rightarrow (1,2,1) \Rightarrow 2 \log \frac{\eta_2}{\eta_1} = \log \frac{\eta_3}{\eta_2} = 2 \log \frac{\eta_4}{\eta_3}$$

$$l_1 = -\lambda_3/4 \quad l_2 = -(\lambda_3/4 + \lambda_2/4) \Rightarrow \eta_2 = \sqrt[4]{\eta_1^3 \eta_4} \quad \eta_3 = \sqrt[4]{\eta_4^3 \eta_1}$$

Se puede calcular la impedancia de campo sobre la cara izquierda de cada recubrimiento:

$$Z_{in1} = Z(-\lambda/4) = \sqrt{\eta_1 \eta_4} \quad Z_{in2} = Z(-\lambda/2) = \eta_1$$

lo que implica que el sistema se halla adaptado.



**• 3 secciones:**

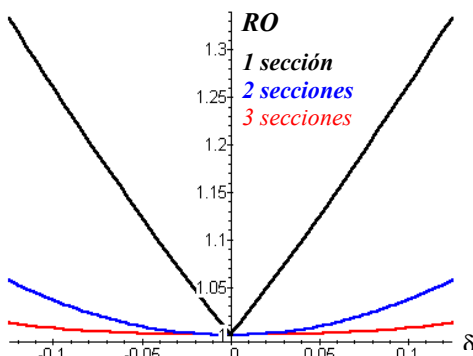
$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5 \Rightarrow (1,3,3,1) \Rightarrow 3 \log \frac{\eta_2}{\eta_1} = \log \frac{\eta_3}{\eta_2} = \log \frac{\eta_4}{\eta_3} = 3 \log \frac{\eta_5}{\eta_4}$$

con:

$$l_1 = -\lambda_4/4 \quad l_2 = -(\lambda_4/4 + \lambda_3/4) \quad l_3 = -(\lambda_4/4 + \lambda_3/4 + \lambda_2/4)$$

$$\eta_2 = \sqrt[8]{\eta_1^7 \eta_5} \quad \eta_3 = \sqrt{\eta_1 \eta_5} \quad \eta_4 = \sqrt[8]{\eta_1 \eta_5^7}$$

En todos estos casos podemos estimar el ancho de banda calculando el ROE como en el caso previo, a partir de la impedancia de entrada del conjunto, que se obtiene yendo desde la carga hacia el generador calculando sucesivamente las impedancias de entrada a cada tramo, con  $\tan(\beta_i \Delta l_i) \cong -2/\pi \delta$



**• 2 secciones:**

$$Z(l_1) = \eta_3 \frac{\pi \eta_4 \delta - 2i \eta_3}{\pi \eta_3 \delta - 2i \eta_4} \quad Z(l_2) = \eta_2 \frac{\pi Z(l_1) \delta - 2i \eta_2}{\pi \eta_2 \delta - 2i Z(l_1)} \Rightarrow \rho = \frac{Z(l_2) - \eta_1}{Z(l_2) + \eta_1}$$

**• 3 secciones:**

$$Z(l_1) = \eta_4 \frac{\pi \eta_5 \delta - 2i \eta_4}{\pi \eta_4 \delta - 2i \eta_5} \quad Z(l_2) = \eta_3 \frac{\pi Z(l_1) \delta - 2i \eta_3}{\pi \eta_3 \delta - 2i Z(l_1)} \quad Z(l_3) = \eta_2 \frac{\pi Z(l_2) \delta - 2i \eta_2}{\pi \eta_2 \delta - 2i Z(l_2)}$$

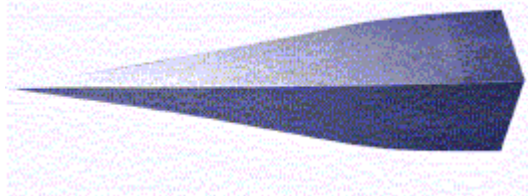
$$\Rightarrow \rho = \frac{Z(-3\lambda/4) - \eta_1}{Z(-3\lambda/4) + \eta_1}$$

En la gráfica se observa que el ancho de banda efectivo del sistema aumenta a medida que aumenta el número de secciones de adaptación. Este es un método práctico para mejorar la respuesta en frecuencia de lentes ópticas. Los sucesivos recubrimientos se depositan mediante técnicas de



deposición en vacío y sus propiedades ópticas se modifican cambiando la composición química o la cristalografía del depósito. En muchos casos los recubrimientos son poliméricos y se modifican sus propiedades cambiando la composición de las cadenas o agregando impurezas adecuadas.

También se puede pensar en usar un medio cuya impedancia intrínseca varíe gradualmente a lo largo del recubrimiento, desde la impedancia del medio izquierdo hasta la del medio a la derecha.



Esto se logra, por ejemplo, con una estructura piramidal como la de la figura, que lleva la impedancia de campo desde el valor del aire al valor del material de la pirámide. Este tipo de pirámides se usan en las:

### Cámaras Anecoicas



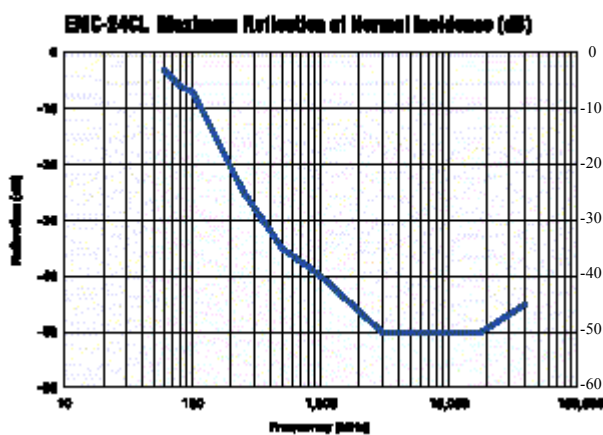
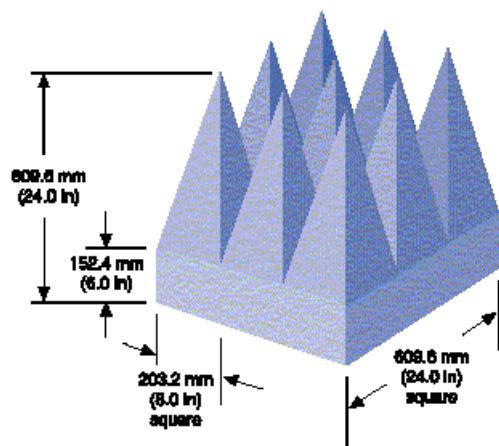
En muchas aplicaciones es necesario probar equipos que emiten radiación electromagnética como si se hallaran muy lejos de cualquier objeto que pudiera dispersar la radiación y causar interferencias que modifiquen el comportamiento del equipo bajo ensayo.

Estas pruebas son esenciales para determinar el diagrama espacial de radiación de antenas, las emisiones de equipos electrónicos que podrían causar interferencia, etc.

Para ello se usan cámaras cuyas paredes absorben completamente la radiación que les llega, sin producir ecos, por lo que se las llama anecoicas. En la figura se muestra el interior de una cámara anecoica con las paredes tapizadas con pirámides absorbentes.

Estas cámaras son diseñadas con tamaños diferentes y con distintos tipos de material absorbente para responder a las distintas normas de prueba para diferentes tipos de radiación (existen también cámaras anecoicas para **sonido**, que permite evaluar las propiedades acústicas de sistemas de audio).

En la siguiente figura se muestra una celda de pirámides comercial usada en la banda de microondas de  $80\text{ MHz}$  a  $40\text{ GHz}$ , de acuerdo a las normas IEC 61000-4-3 (civil) y MIL-STD 462D



(militar) de uso en testeo de compatibilidad electromagnética (EMC). El material es una espuma de poliuretano especial impregnado con una fórmula carbonada conductora y sales antiflama en el proceso de fabricación. A la derecha se presenta la máxima reflexión (en dB) para incidencia

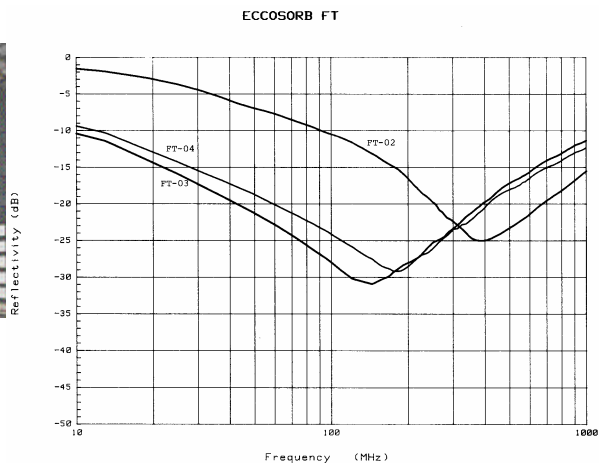
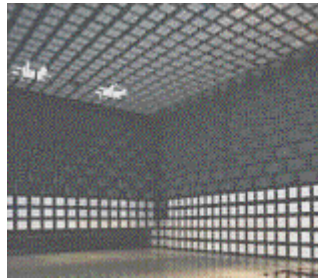
normal en función de la frecuencia. Para no generar ecos cuando la radiación incide sobre las paredes de la cámara estas paredes deben ser absorbentes. Por ello es que se impregna el material de las pirámides con un material conductor para producir pérdidas por efecto Joule.

Otra forma de lograr el mismo efecto es usar un material cuya impedancia intrínseca tenga parte real igual a la del vacío y parte imaginaria no nula, lo que implica pérdidas de Joule, o sea, absorción. Se fabrican actualmente materiales de este tipo con ferritas ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) cerámicas, como el titanato de ferrita, para el cual se tiene  $\mu_r = \epsilon_r = 60(2-i)$ . La impedancia intrínseca es  $\eta_0$  y no hay reflexión en la dirección normal, y toda la potencia incidente se transmite al material que la absorbe por sus pérdidas dieléctricas y magnéticas. Ya que:

$$\begin{aligned}\gamma &= \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon} = \omega \sqrt{(\mu' - i\mu'')(\epsilon' - i\epsilon'')} = \frac{\omega}{c} \sqrt{(\mu'_r \epsilon'_r - \mu''_r \epsilon''_r) - i(\mu''_r \epsilon'_r + \epsilon''_r \mu'_r)} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(120^2 - 60^2) - i(2 \times 120 \times 60)} = \frac{60\pi}{\lambda} \sqrt{3 - i4} = \frac{60\pi}{\lambda} (2 - i) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{60\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

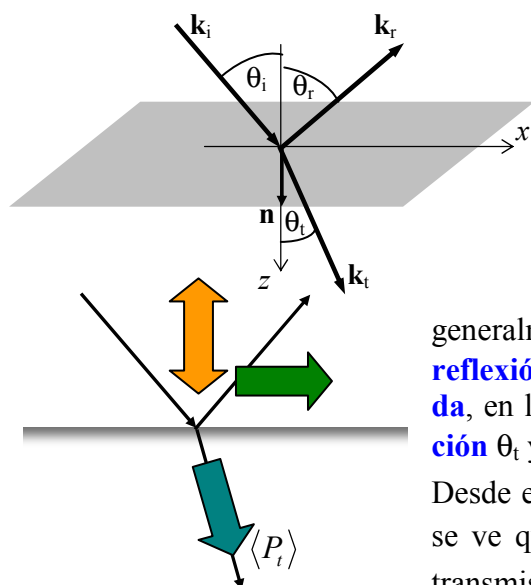
que es la atenuación por unidad de longitud de penetración de las ondas que ingresan en un medio de este material.

Este tipo de material absorbente tiene una buena respuesta en frecuencia y se usa también en cámaras anecoicas en forma de mosaico, aportando una mayor resistencia mecánica y mayor facilidad constructiva que los paneles de pirámides. En la gráfica se muestra la respuesta en frecuencia de la reflectividad de varios formatos del material



Eccosorb™. En otros modelos los mosaicos de absorbente se combinan con una capa metálica posterior y/o un dieléctrico para aumentar aún más el ancho de banda de baja reflectividad

**Incidencia oblicua**



Cuando el vector de propagación  $\mathbf{k}$  de una onda electromagnética incidente no es normal a la interfase plana entre dos medios de impedancia intrínseca diferentes hablamos de incidencia oblicua.

El plano formado por la normal  $\mathbf{n}$  a la interfase y el vector de incidencia  $\mathbf{k}_i$  es el **plano de incidencia** ( $xz$ ). El **ángulo de incidencia** es  $\theta_i$ . Debido a la desadaptación de impedancias entre ambos medios habrá generalmente una onda **reflejada**, definida por su **ángulo de reflexión**  $\theta_r$  y el vector  $\mathbf{k}_r$  y una onda transmitida (o **refractada**, en la jerga de la óptica), definida por el **ángulo de refracción**  $\theta_t$  y el vector  $\mathbf{k}_t$  (supuesto real en esta sección).

Desde el punto de vista de la potencia que propagan las ondas, se ve que hay una potencia transmitida  $\langle P_t \rangle$  en el medio de transmisión, mientras que en el medio de incidencia hay potencia que se propaga en dirección **paralela** a la interfase y potencia que se propaga en dirección **normal** a la interfase. Las componentes de los campos **normales al plano de incidencia** son **transversales** a las direcciones de propagación de potencia.

Es matemáticamente conveniente y ventajoso desde el punto de vista de las analogías conceptuales entre la incidencia de ondas sobre interfases y la propagación de ondas en líneas de transmisión definir la llamada **impedancia de onda**, como la relación entre las componentes de los campos **paralelas a la interfase**:

$$Z = \frac{|E_t|}{|H_t|} = \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}|}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}|}$$

La onda plana incidente tendrá sus campos polarizados en un plano perpendicular a  $\mathbf{k}_i$ . Suponemos por simplicidad ondas linealmente polarizadas. En tal caso, cualquier dirección de polarización de los campos se puede resolver en dos componentes: una con  $\mathbf{E}$  **contenido en el plano de incidencia** y otra con  $\mathbf{E}$  **normal al plano de incidencia**. Las condiciones de borde de los campos sobre la interfase son diferentes para estos dos casos, por lo que vamos a estudiarlos por separado. Los campos resultantes se pueden superponer en un caso de polarización lineal cualquiera.

Para cualquier dirección de polarización de la onda incidente podemos escribir que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_o e^{i(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} & \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)}{\omega \mu_1} \\ \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{o_r} e^{i(\omega' t - \mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{r})} & \mathbf{H}_r(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{k}'_r \times \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t)}{\omega' \mu_1} \\ \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{o_t} e^{i(\omega'' t - \mathbf{k}''_t \cdot \mathbf{r})} & \mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{k}''_t \times \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t)}{\omega'' \mu_2} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{k}'_r = \mathbf{k}_r(\omega')$ ,  $\mathbf{k}''_t = \mathbf{k}_t(\omega'')$ . Estos campos deben satisfacer las condiciones de contorno sobre la interfase  $z = 0$ :

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r - \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r - \mathbf{H}_t) \times \hat{\mathbf{n}} = 0$$

que es la expresión matemática de conservación de las componentes tangenciales. Estas ecuaciones de conservación implican que la fase de las ondas debe ser la misma sobre el plano interfase por la ortogonalidad de las exponenciales complejas. Nuevamente, como en el caso de la incidencia normal, la frecuencia de las ondas debe ser la misma:

$$(\omega = \omega' = \omega'')$$

$$\Rightarrow \mathbf{k}'_r = \mathbf{k}_r = \mathbf{k}_r(\omega), \quad \mathbf{k}''_t = \mathbf{k}_t = \mathbf{k}_t(\omega)$$

para que estas condiciones se cumplan para **todo instante de tiempo**, y además:

$$k_{i_x} x = k_{r_x} x = k_{t_x} x \quad \Rightarrow \quad k_{i_x} = k_{r_x} = k_{t_x}$$

para que se cumpla para **todo punto** ( $x, z = 0$ ) sobre la interfase. Entonces las componentes tangenciales de los vectores de onda deben ser iguales y tenemos:

$$k_{i_x} = k_{r_x} \quad \Rightarrow \quad k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_i = \sin \theta_r \quad \Rightarrow \quad \theta_i = \theta_r$$

$$k_{i_x} = k_{t_x} \quad \Rightarrow \quad k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \frac{\mu_2 \eta_1}{\mu_1 \eta_2}$$

Estas relaciones entre los ángulos de las direcciones de propagación y la normal a la interfase se conocen como **leyes de Snell** de la óptica geométrica. Si ambos medios

son dieléctricos ( $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$ ):

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\mu_2 \eta_1}{\mu_1 \eta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los **índices de refracción** de los medios.

**Las leyes de Snell son válidas independientemente de la polarización de la onda incidente.**

Se observa que en la incidencia desde un medio ópticamente menos **denso** a otro más denso ( $n_2 > n_1$ ) el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia, es decir, la dirección de propagación se acerca a la normal, mientras que lo opuesto ocurre en el caso contrario ( $n_2 < n_1$ ).

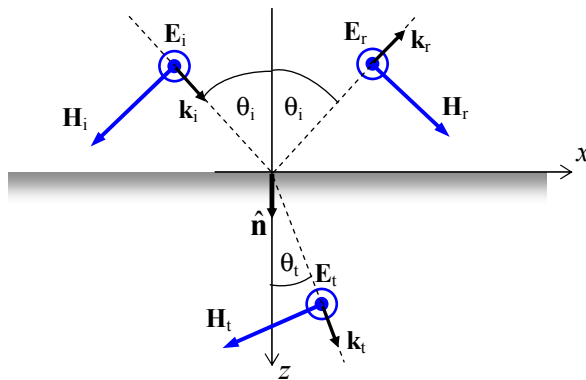
**Ejemplo 8.18:** Determinar el ángulo de refracción para la incidencia de una onda desde aire sobre resina de poliestireno, con  $\epsilon_r = 2.6$  si el ángulo de incidencia es de  $35^\circ$ .

De acuerdo a la ley de Snell:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{\epsilon_r} \quad \Rightarrow \quad \theta_t = \sin^{-1} \left( \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\epsilon_r}} \right) \approx 20.84^\circ$$

Vamos a analizar a continuación las consecuencias de la conservación de las componentes tangenciales de los campos sobre las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida, para cada caso de polarización (normal y paralelo al plano de incidencia) por separado.

**E<sub>i</sub> normal al plano de incidencia**



En este caso los vectores eléctricos son transversales a las direcciones de propagación de potencia, mientras que el campo magnético tiene componentes longitudinales a esas direcciones. Se dice entonces que se trata de un modo de propagación **TE (transversal eléctrico)**.

Además, los vectores eléctricos son paralelos a la interfase y entonces la condición de contorno lleva a:

$$E_{0y} + E_{0ry} = E_{0ty}$$

$$\text{y para los vectores magnéticos:}$$

$$-H_{0x} + H_{0rx} = -H_{0tx}$$

Obsérvese que la impedancia de onda para la onda incidente es:

$$Z_{TE_1} = -\frac{E_{0y}}{H_{0x}} = -\frac{E_0}{H_0 \cos \theta_i} = \eta_1 \sec \theta_i$$

donde hemos colocado el signo menos para que el signo de  $Z_{TE}$  sea positivo, ya que la componente tangencial del campo magnético es negativa.

Análogamente, para la onda reflejada:  $Z_{TE} = \frac{E_{0ry}}{H_{0rx}} = \frac{E_{0r}}{H_{0r} \cos \theta_i} = \eta_1 \sec \theta_i = Z_{TE_1}$

y para la onda transmitida:  $Z_{TE} = -\frac{E_{0ty}}{H_{0tx}} = -\frac{E_{0t}}{H_{0t} \cos \theta_t} = \eta_2 \sec \theta_t = Z_{TE_2}$

Y entonces las ecuaciones de borde se pueden escribir:

$$E_0 + E_{0r} = E_{0t} \quad E_0/Z_{TE_1} - E_{0r}/Z_{TE_1} = E_{0t}/Z_{TE_2}$$

**Obsérvese que el uso de las impedancias de onda nos lleva a las mismas ecuaciones que obtuvimos para la incidencia normal.**

Podemos calcular el **coeficiente de reflexión** y el **coeficiente de transmisión** a partir de estas ecuaciones:

$$\rho_{TE} = \frac{Z_{TE_2} - Z_{TE_1}}{Z_{TE_2} + Z_{TE_1}} \quad \tau_{TE} = 1 + \rho_{TE} = \frac{2Z_{TE_2}}{Z_{TE_2} + Z_{TE_1}}$$

y en función de las impedancias intrínsecas de los medios:

$$\rho_{TE} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad \tau_{TE} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

Introducimos en estas ecuaciones la ley de Snell de la refracción:

$$\rho_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\eta_1^2 \mu_2^2 / \eta_2^2 \mu_1^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\eta_1^2 \mu_2^2 / \eta_2^2 \mu_1^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad \tau_{TE} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\eta_1^2 \mu_2^2 / \eta_2^2 \mu_1^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

El campo eléctrico en el medio de incidencia es:

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \hat{y} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} + \rho_{TE} E_0 \hat{y} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} = E_0 \hat{y} e^{i\omega t} \left[ e^{-ik_{ix}x} e^{-ik_{iz}z} + \rho_{TE} e^{-ik_{rx}x} e^{-ik_{rz}z} \right]$$

Però:  $k_{rx} = k_{ix} = k_i \sin \theta_i \quad k_{rz} = -k_{iz} = -k_i \cos \theta_i$

Luego:  $\mathbf{E}_1 = E_0 \hat{y} e^{i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)} \left[ e^{-ik_i \cos \theta_i z} + \rho_{TE} e^{ik_i \cos \theta_i z} \right]$

y entonces puede verse que el campo eléctrico en el medio de incidencia se comporta como una **onda viajera** que se propaga en la dirección  $x$  paralela a la interfase y como una **onda semi-estacionaria** en la dirección  $z$  normal a la interfase (que se convierte en una onda estacionaria pura para  $|\rho_{TE}| = 1$ ).

- De las ecuaciones halladas surge que para que **no exista reflexión**:

$$\rho_{TE} = 0 \Rightarrow \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i = \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2}$$

de donde se ve que, en el caso usual donde  $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \Rightarrow \eta_1 = \eta_2$  y solamente no hay reflexión cuando los dos medios son ópticamente indistinguibles.

- Si el segundo medio (el medio de transmisión) es un **buen conductor**:

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \quad |\eta_2| \ll \eta_1 \Rightarrow \rho_{TE} \approx -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos(\theta_i), \quad \tau_{TE} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos(\theta_i)$$

donde hemos desarrollado las expresiones en serie de Taylor. Se observa que el coeficiente de reflexión difiere muy poco del caso para la reflexión sobre un conductor perfecto.

En este último caso, el campo en el medio de incidencia es:

$$\mathbf{E}_i = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)} [e^{-ik_i \cos \theta_i z} - e^{ik_i \cos \theta_i z}] = 2iE_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)} \sin(k_i \cos \theta_i z)$$

o sea una **onda estacionaria pura** según  $z$  y una **onda viajera** según  $x$ . Se observa un **guiado de la energía electromagnética** paralelo a la interfase. No existe campo transmitido en este caso, y la interfase constituye una superficie de campo eléctrico nulo.

- En el caso en que ambos medios sean dieléctricos:

$$\rho_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}} \quad \tau_{TE} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}$$

Estas ecuaciones de los coeficientes de reflexión y de transmisión en función de las propiedades de los medios se conocen como **ecuaciones de Fresnel**.

En el caso de **incidencia entre dieléctricos**:

- si  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  los radicandos de las raíces e numerador y denominador son positivos y existe para todo  $\theta_i$  un  $\rho_{TE}$  real con  $|\rho_{TE}| < 1$ . En este caso la incidencia se produce desde el medio ópticamente menos denso hacia el más denso
- si  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , la incidencia se produce desde el medio ópticamente más denso hacia el menos denso, existe un **ángulo crítico**  $\theta_{ic}$  para el cual  $\sin^2 \theta_{ic} = \epsilon_2 / \epsilon_1$ .

Para  $\theta_i \geq \theta_{ic}$  se tiene  $\rho_{TE}$  complejo con  $|\rho_{TE}| = 1$  (verificarlo). Por lo tanto, si la onda incide con un ángulo mayor que el crítico, toda la energía electromagnética se refleja y no hay transmisión al segundo medio. Por eso  $\theta_{ic} = \sin^{-1} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}$  se denomina también **ángulo de reflexión total**.

¿Cómo es el campo “transmitido” para reflexión total? El campo transmitido es, en general:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = E_{0t} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} = E_{0t} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_{tx} x - k_{tz} z)}$$

$$k_{tx} = k_{ix} = k_i \sin \theta_i$$

Pero:

$$k_{tz} = k_t \cos \theta_t = k_t \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = -ik_t \sqrt{\sin^2 \theta_t - 1} = -ik_t \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_t - 1} = -i\alpha$$

Entonces:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \tau_{TE} E_{0i} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)}$$

y se ve que el campo transmitido resulta una onda que se propaga según  $x$  (la coordenada sobre el plano de incidencia) pero **decae exponencialmente** según  $z$  (la coordenada normal a la interfase). El campo magnético transmitido es:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hat{\mathbf{k}}_t \times \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t)}{\eta_2} = \frac{1}{\eta_2} (k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - i\alpha \hat{\mathbf{z}}) \times \tau E_{0i} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)} \\ &= \frac{\tau E_{0i}}{\eta_2} (k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}} + i\alpha \hat{\mathbf{x}}) e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)}\end{aligned}$$

y el vector medio de Poynting:  $\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \text{Re} \left( \tau_{TE} E_{0i} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)} \times \frac{\tau_{TE}^* E_{0i}}{\eta_2} (k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}} - i\alpha \hat{\mathbf{x}}) e^{-\alpha z} e^{-i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)} \right) \\ &= \frac{|\tau_{TE} E_{0i}|^2}{2\eta_2} e^{-2\alpha z} \text{Re}(k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} + i\alpha \hat{\mathbf{z}}) = \frac{|\tau_{TE} E_{0i}|^2}{2\eta_2} e^{-2\alpha z} k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Se ve entonces que la potencia fluye paralela a la interfase, pero **no hay potencia que penetre en el medio de transmisión**. Una onda que se propaga paralela a la interfase pero que no transporta energía en la dirección normal a ella se llama **onda evanescente**.

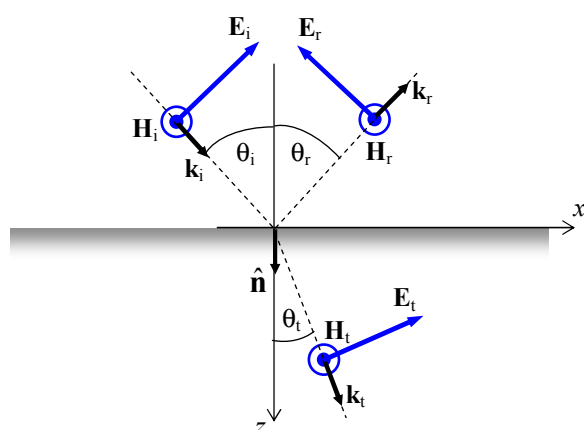
El fenómeno de reflexión total produce así ondas evanescentes que no penetran en el medio de transmisión. **Este comportamiento es la base del guiado de ondas electromagnéticas por fibras ópticas.**

**Ejemplo 8.19:** Determinar el ángulo de reflexión total para la incidencia de una onda desde resina de poliestireno, con  $\epsilon_r = 2.6$  sobre aire.

El ángulo de reflexión total es:  $\theta_{ic} = \text{sen}^{-1} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} \approx 38.33^\circ$

Esto significa que para una incidencia más rasante, la radiación permanece dentro del dieléctrico. Este es el principio de guiado dieléctrico de ondas en que se basan las guías de fibra óptica.

**$E_i$  paralelo al plano de incidencia**



En este caso los vectores magnéticos son transversales a las direcciones de propagación de potencia, mientras que el campo eléctrico tiene componentes longitudinales a esas direcciones. Se dice que se trata de un modo de propagación **TM (transversal magnético)**.

Además, los vectores magnéticos son paralelos a la interfase y entonces la condición de contorno lleva a:

$$H_{0y} + H_{0ry} = H_{0ty}$$

y para los vectores eléctricos:

$$E_{0x} - E_{0rx} = E_{0tx}$$

Las impedancias de onda son ahora:

Onda incidente:  $Z_{TM} = \frac{E_{ox}}{H_{oy}} = \eta_1 \cos \theta_i = Z_{TM_1}$

Onda reflejada:  $Z_{TM} = -\frac{E_{orx}}{H_{ory}} = \eta_1 \cos \theta_i = Z_{TM_1}$

Onda transmitida:  $Z_{TM} = \frac{E_{otx}}{H_{oty}} = \eta_2 \cos \theta_t = Z_{TM_2}$

y las condiciones de borde quedan:  $H_0 + H_{0r} = H_{0t}$   $Z_{TM_1} (H_0 - H_{0r}) = Z_{TM_2} H_{0t}$

de donde obtenemos:  $\frac{H_{0r}}{H_0} = \frac{E_{0r}}{E_0} = \rho_{TM} = \frac{Z_{TM_2} - Z_{TM_1}}{Z_{TM_2} + Z_{TM_1}}$

$$\frac{H_{0t}}{H_0} = \frac{\eta_1 E_{0t}}{\eta_2 E_0} = \frac{2Z_{TM_2}}{Z_{TM_2} + Z_{TM_1}} \Rightarrow \tau_{TM} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{2Z_{TM_2}}{Z_{TM_2} + Z_{TM_1}}$$

y en términos de las impedancias intrínsecas de los medios:

$$\rho_{TM} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad \tau_{TM} = \frac{2\eta_2^2}{\eta_1} \frac{\cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

y mediante el uso de la ley de la refracción:

$$\rho_{TM} = \frac{\frac{\mu_1 \eta_2^2}{\mu_2 \eta_1^2} \sqrt{\frac{\mu_2^2 \eta_1^2}{\mu_1^2 \eta_2^2} - \sin^2 \theta_i} - \cos \theta_i}{\frac{\mu_1 \eta_2^2}{\mu_2 \eta_1^2} \sqrt{\frac{\mu_2^2 \eta_1^2}{\mu_1^2 \eta_2^2} - \sin^2 \theta_i} + \cos \theta_i} \quad \tau_{TM} = \frac{2 \frac{\mu_1 \eta_2^3}{\mu_2 \eta_1^3} \sqrt{\frac{\mu_2^2 \eta_1^2}{\mu_1^2 \eta_2^2} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1 \eta_2^2}{\mu_2 \eta_1^2} \sqrt{\frac{\mu_2^2 \eta_1^2}{\mu_1^2 \eta_2^2} - \sin^2 \theta_i} + \cos \theta_i}$$

- El coeficiente de reflexión  $\rho_{TM}$  es cero para ángulos de incidencia que cumplen la relación:

$$\tan \theta = \frac{\mu_2 \eta_1}{\eta_2} \sqrt{\frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\mu_2^2 \eta_1^2 - \mu_1^2 \eta_2^2}}$$

Dado que para la mayoría de los casos de interés práctico:  $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$  la condición necesaria para la **no reflexión** es que  $\tan \theta = \eta_1 / \eta_2$ .

- Si el segundo medio (el medio de transmisión) es un **buen conductor**:

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \quad |\eta_2| \ll \eta_1 \Rightarrow \rho_{TM} \approx -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \sec(\theta_i), \quad \tau_{TM} \approx 2 \frac{\eta_2^2}{\eta_1} \sec(\theta_i)$$

donde hemos desarrollado las expresiones en serie de Taylor. El coeficiente de reflexión difiere muy poco del valor para la reflexión sobre un conductor perfecto, salvo cuando el án-



gulo de incidencia se acerca a  $\pi/2$  (incidencia rasante).

En el caso en que **ambos medios sean dieléctricos**:

$$\rho_{TM} = \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i} - \cos \theta_i}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i} + \cos \theta_i} \quad \tau_{TM} = 2 \frac{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i} + \cos \theta_i}$$

La condición de **no reflexión** para este caso se convierte en:

$$\tan \theta_B = \eta_1 / \eta_2 = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} = n_2 / n_1$$

El ángulo  $\theta_B$  se conoce como **ángulo de Brewster**. Como la tangente puede dar valores menores o mayores que 1, la condición de no reflexión se da independientemente del sentido de propagación entre dos medios.

El ángulo de Brewster se denomina también **ángulo de polarización**, ya que si una onda que tiene ambas componentes, una polarizada paralela y la otra polarizada normal al plano de incidencia, incide sobre una interfase formando el ángulo de Brewster, la componente polarizada paralela se transmite totalmente mientras que la componente polarizada normal sufre reflexión, de manera que la onda reflejada queda linealmente polarizada. Este procedimiento se llama **polarización por reflexión** y se usa en múltiples aplicaciones.

Si la onda se propaga desde un medio menos denso a otro más denso ( $\epsilon_2 < \epsilon_1$ ) existe, como en el otro tipo de polarización, un ángulo de reflexión total tal que:

$$|\rho| = 1 \text{ cuando } \theta_i \geq \theta_{ic} \text{ con } \sin \theta_{ic} = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}$$

Obsérvese que sólo hay reflexión total cuando  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , mientras que siempre existe una condición de no reflexión en la incidencia **TM**.

**El fenómeno de reflexión total ocurre independientemente de la polarización de la onda incidente.**

**Ejemplo 8.20:** Determinar el ángulo de Brewster (ángulo de no reflexión) para la incidencia de una onda sobre la interfase entre resina de poliestireno, con  $\epsilon_r = 2.6$  y aire.

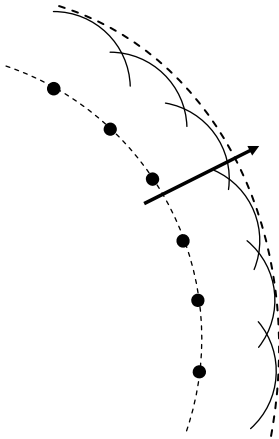
El ángulo de Brewster es:

$$\text{poliestireno} \rightarrow \text{aire: } \theta_B = \tan^{-1} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} \approx 31.8^\circ$$

$$\text{aire} \rightarrow \text{poliestireno: } \theta_B = \tan^{-1} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} \approx 58.2^\circ$$

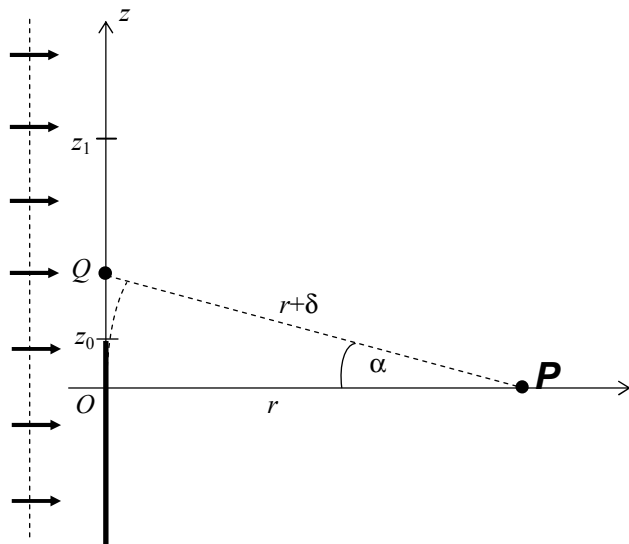
**Difracción. Principio de Huygens**

Se observa que la sombra proyectada por objetos no tiene una frontera definida. Esto contradice la imagen sencilla de que un obstáculo detiene el paso de la luz, como si ésta estuviera compuesta de rayos. En realidad, los bordes de los objetos emiten radiación en todas direcciones y sentidos, y las ondas radiadas por puntos cercanos del borde interfieren entre sí formando ese borde impreciso de la sombra. Este proceso, donde cambia la dirección de propagación de la onda por la presencia del borde del obstáculo, se conoce como **difracción**.



Para modelizar la difracción se usan diversos modelos, que generalmente se basan en el llamado **principio de Huygens**. Este principio dice que se puede describir la propagación de una onda en un medio cualquiera suponiendo que cada punto del frente de ondas se comporta como una fuente secundaria emisora de ondas esféricas. Estas ondas secundarias interfieren entre sí para conformar el nuevo frente de onda. El principio de Huygens se puede formular rigurosamente a partir de las propiedades matemáticas de las soluciones generales de las ecuaciones de onda. De esta manera quedan las llamadas **integrales de Kirchhoff**, que expresan el valor del campo en un punto del espacio en función de la integral sobre una superficie de funciones de onda que representan ondas esféricas. Esta formulación lleva al llamado **método de Kirchhoff**, que, a pesar de sus limitaciones de rigor matemático se usa con buenos resultados en la determinación de los campos radiados por aberturas radiantes o antenas de abertura, usadas en microondas y radar.

Vamos a presentar un ejemplo de uso de este método que permite describir un caso de difracción. Se trata de una onda plana que incide horizontalmente sobre un obstáculo vertical, que representamos como un plano conductor semi-infinito.



Colocamos un sistema de coordenadas con su eje vertical  $z$  coincidente con la traza del plano conductor y su eje horizontal a una altura  $z_0$  por debajo del borde del plano. Queremos calcular el campo en el punto  $P$  a una distancia  $r$  lejana ( $r \gg z_0$ ) del conductor, que, de no existir difracción, sería nulo. Según el principio de Huygens, cada punto del eje  $z$  por encima del conductor se convierte en un centro emisor de ondas esféricas secundarias. En particular, el punto  $Q$  genera en  $P$  un campo dado por:

En particular, el punto  $Q$  genera en  $P$  un campo dado por:

$$dE(P) = A \frac{e^{i[\omega t - k d_{QP}]}}{d_{QP}} dz = A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz$$

de modo que el campo total en  $P$  será:

$$E(P) = \int_{z_0}^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz$$

Podemos calcular esta integral como la suma de una integral entre  $z_0$  y  $z_1$ , con  $z_1 \ll r$  y una integral entre  $z_1$  e  $\infty$ :

$$E(P) = \int_{z_0}^{z_1} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz + \int_{z_1}^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz$$

Consideremos la primera integral, para la cual  $z_1 \ll r$ . De la figura se ve que en el triángulo rectángulo POQ:  $r^2 + z^2 = (r + \delta)^2 \Rightarrow \delta \cong \frac{z^2 - \delta^2}{2r}$

Pero además:  $\delta \cong z \text{ sen } \alpha \Rightarrow \delta \cong \frac{z^2 (1 - \text{sen}^2 \alpha)}{2r} \cong \frac{z^2}{2r} \Rightarrow \delta \ll r$

porque  $\alpha$  es un ángulo pequeño para todo  $z \leq z_1$ . Entonces nos queda:

$$E(P) = \int_{z_0}^{z_1} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz + \int_{z_1}^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz \approx \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{z_0}^{z_1} e^{-ik\delta} dz + \int_{z_1}^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz$$

$$= \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{z_0}^{z_1} e^{-i \frac{kz^2}{2r}} dz + \int_{z_1}^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz$$

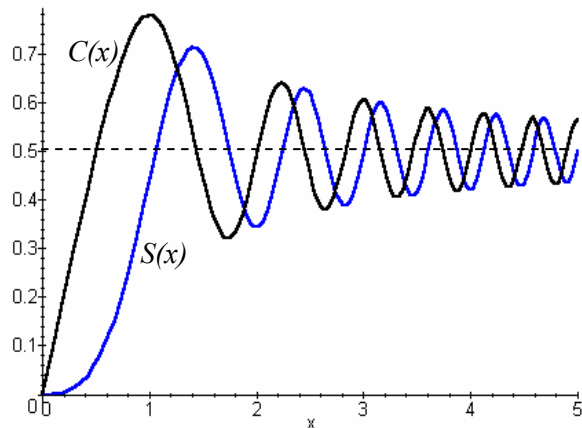
Con el cambio de variable:  $\frac{kz^2}{2r} = \frac{\pi u^2}{2} \Rightarrow z = \sqrt{\lambda r / 2} u$  ( $u$  es adimensional) la integral

$$\int_{z_0}^{z_1} e^{-i \frac{kz^2}{2r}} dz \text{ puede escribirse: } \int_{z_0}^{z_1} e^{-i \frac{kz^2}{2r}} dz = \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \int_{u_0}^{u_1} e^{-i \frac{\pi u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \left[ \int_0^{u_1} e^{-i \frac{\pi u^2}{2}} du - \int_0^{u_0} e^{-i \frac{\pi u^2}{2}} du \right]$$

Además, la integral:  $\int_0^u e^{-i \frac{\pi u^2}{2}} du = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du - i \int_0^u \text{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du = C(u) - i S(u)$

donde aparecen las llamadas **integrales de Fresnel**:

$$\begin{cases} C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \\ S(x) = \int_0^x \text{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \end{cases} \Rightarrow C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$$



Se ve de las gráficas que ambas funciones tienden a 0.5 cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Entonces, la primera integral resulta:

$$\frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{z_0}^{z_1} e^{-i \frac{kz^2}{2r}} dz = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \left[ C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_1\right) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_1\right) + iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) \right]$$

Si ahora tendemos  $z_1 \rightarrow \infty$  la segunda integral en el cálculo original se anula, mientras que en esta expresión nos queda:

$$E(P) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{z_0}^{\infty} e^{-i \frac{kz^2}{2r}} dz \rightarrow E(r, z_0) \approx \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \left[ \frac{1}{2}(1 - i) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) + iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) \right]$$

En esta expresión  $r$  es la distancia desde el plano al punto de observación y  $z_0$  es la distancia “detrás” del plano medida paralela al mismo. Para  $z_0$  negativo se tiene el campo en la región “libre”. Como  $C(-x) = -C(x)$  y  $S(-x) = -S(x)$ :

$$E(r, -z_0) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \left[ \frac{1}{2}(1 - i) + C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) \right]$$

La intensidad de la radiación en  $P$  es igual al valor medio del vector de Poynting:

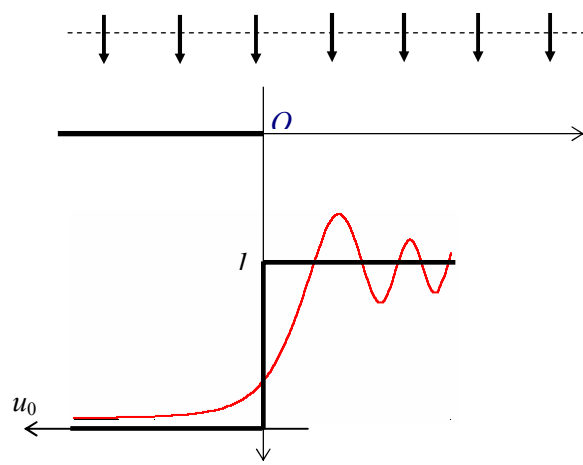
$$I(r, z_0) \approx \frac{\lambda |A|^2}{2\eta r} \left| \frac{1}{2}(1-i) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) + iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) \right|^2 = \frac{\lambda |A|^2}{2\eta r} \left[ \left(\frac{1}{2} - C(u_0)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S(u_0)\right)^2 \right]$$

$$I(r, -z_0) \approx \frac{\lambda |A|^2}{2\eta r} \left| \frac{1}{2}(1-i) + C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) \right|^2 = \frac{\lambda |A|^2}{2\eta r} \left[ \left(\frac{1}{2} + C(u_0)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S(u_0)\right)^2 \right]$$

con  $u_0 = \sqrt{2/\lambda r} z_0$ . Para  $-z_0 \rightarrow \infty$  se tiene la potencia plena de la onda:

$$I(r, -\infty) \rightarrow I_0(r) = \frac{\lambda |A|^2}{\eta r} \quad \text{y entonces tenemos:}$$

$$I(r, z_0) \approx \frac{I_0(r)}{2} \left[ \left(\frac{1}{2} - C(u_0)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S(u_0)\right)^2 \right] \quad I(r, -z_0) \approx \frac{I_0(r)}{2} \left[ \left(\frac{1}{2} + C(u_0)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S(u_0)\right)^2 \right]$$



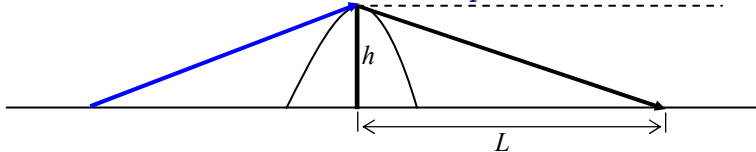
En la gráfica se observa la variación de la intensidad de la radiación en función de  $u_0$ , es decir de la profundidad hacia dentro o fuera del borde del plano. En negro (escalón) se dibuja la intensidad esperada en el límite de la óptica geométrica (óptica de rayos) y en rojo el valor obtenido con la ecuación anterior. Se observa que existen bandas más oscuras y más claras en la región alrededor, y hay iluminación “detrás” del obstáculo, todo lo cual constituye el fenómeno de la difracción.

Como la intensidad es proporcional a  $\lambda$ , el tamaño de los picos es inversamente proporcional a la

frecuencia de la radiación.

La existencia de la difracción hace posibles comunicaciones aún cuando haya un obstáculo en la línea directa entre el emisor y el receptor, pero naturalmente la potencia difractada suele ser pequeña frente a la potencia directa.

**Ejemplo 8.21:** Determinar la relación entre la potencia que recibe una antena receptora separada de la estación transmisora por una montaña.  $h = 800 \text{ m}$ ,  $L = 2 \text{ km}$ ,  $f = 1 \text{ MHz}$ .



Como se ve en la figura, el punto de recepción se halla en la zona de sombra. Suponiendo por simplicidad que la radiación incide horizontalmente sobre la montaña, que modelizamos como un plano conductor vertical, tenemos:

$$z_0 = h = 800 \text{ m}, \quad r = L = 2000 \text{ m}, \quad \lambda = c/f \approx 300 \text{ m}.$$

Entonces:  $u_0 = \sqrt{2/\lambda r} z_0 \approx 1.46 \Rightarrow \frac{I(r, z_0)}{I_0} \approx 0.022 \approx -33 \text{ dB}$

y entonces la recepción cae en más de  $30 \text{ dB}$  con respecto a la radiación que viaja en línea directa sin obstáculos.

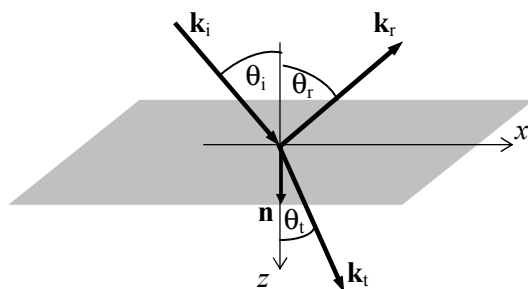
**RESUMEN**

*En este capítulo hemos analizado la incidencia de ondas electromagnéticas sobre interfaces entre medios diferentes.*

- En la **incidencia normal** se obtienen ecuaciones similares a las halladas en la propagación de ondas en líneas de transmisión cargadas, por lo que se pueden usar las herramientas de ese caso, como la carta de Smith, para el análisis de la propagación de ondas en medios inhomogéneos:

	<b>Líneas de transmisión</b>	<b>Incidencia normal</b>
Característica del medio	Impedancia característica: $Z_0$	Impedancia intrínseca: $\eta$
Magnitud física	tensión: $v(z,t)$ corriente: $i(z,t)$	campo eléctrico: $E(z,t)$ campo magnético: $H(z,t)$
Coefficiente de reflexión	$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$	$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$
Coefficiente de transmisión	$\tau = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0} = 1 + \rho$	$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \rho$
Reflexión de potencia Transmisión de potencia	$R =  \rho ^2$ $T = 1 - R$	$R =  \rho ^2$ $T = 1 - R$
Impedancia de campo	$Z(z) = Z_0 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$	$Z(z) = \eta_1 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$
Relación de onda estacionaria	$ROE = \frac{1 +  \rho }{1 -  \rho }$	$ROE = \frac{1 +  \rho }{1 -  \rho }$

- **Incidencia sobre una capa.** El análisis de capas dieléctricas es de interés en el diseño de superficies antirreflectantes usadas para aplicaciones ópticas y cámaras anecoicas. El caso de capas conductoras da las bases para el análisis de la efectividad y aplicación de los **blindajes** de alta frecuencia.
- Cuando la propagación no es normal la conservación de la fase sobre la superficie interfase lleva a las **leyes de Snell** de la óptica geométrica:



$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \frac{\mu_2 \eta_1}{\mu_1 \eta_2}$$

que en el caso de dieléctricos se convierte en:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los **índices de refracción** de los medios.

- El cálculo de los campos es más complicado y se simplifica en parte tratando por separado el caso en que el campo incidente está linealmente polarizado normal al plano de incidencia (caso **TE**) del caso en que se halla en el plano de incidencia (caso **TM**). La aplicación de las condiciones de contorno lleva a las expresiones que definen los coeficientes de reflexión y transmisión en la incidencia oblicua.
- Del análisis de estas expresiones surge que:
  - Si el medio de transmisión es un buen conductor el comportamiento es similar al de la incidencia normal, es decir, el coeficiente de reflexión es prácticamente igual a

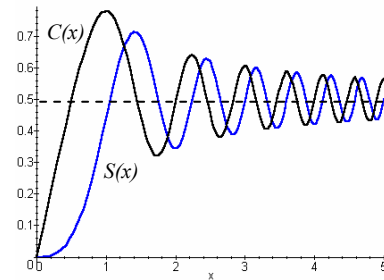
(-1). Se produce una onda estacionaria en la dirección normal a la interfase y hay un guiado de energía paralelo a la interfase.

- Si ambos medios son dieléctricos y la propagación se da desde el medio más denso al menos denso ( $n_2 < n_1$ ), existe un **ángulo crítico** de incidencia por encima del cual no hay transmisión (**reflexión total**):

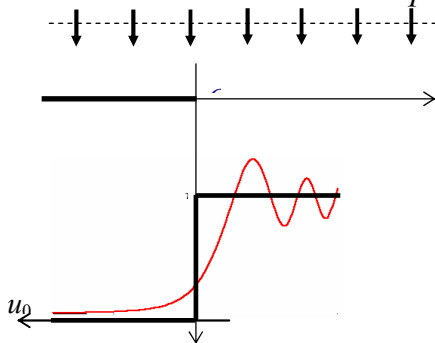
$$\theta_{ic} = \text{sen}^{-1} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}$$

- En el medio de transmisión se presentan **campos evanescentes** que no se propagan. Este efecto es la base del guiado de energía electromagnética por guías dieléctricas.
- En la incidencia TM solamente existe un ángulo (**ángulo de Brewster**) donde no hay reflexión:  $\tan \theta_B = \eta_1 / \eta_2 = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} = n_2 / n_1$
- Este efecto se usa para maximizar la eficiencia de las ventanas que dejan salir la radiación en los láseres gaseosos y para polarizar linealmente una onda, ya que la componente TE se refleja.
- Se introduce la descripción del fenómeno de **difracción**. El modelo utilizado es el de Huygens, que postula a cada punto del frente de onda como un hipotético centro secundario emisor de ondas esféricas coherentes. La interferencia de estas ondas constituye la nueva onda que se propaga.
- Se estudia un ejemplo, la **difracción por un borde**, de interés en las comunicaciones terrestres. El campo y la intensidad de radiación detrás del obstáculo se describe mediante las llamadas **integrales de Fresnel**:

$$\begin{cases} C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \\ S(x) = \int_0^x \text{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \end{cases} \Rightarrow C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$$



- Se observa una caída de tipo exponencial de la radiación detrás del obstáculo y la presencia de franjas brillantes y oscuras alternadas cerca del borde del lado iluminado, que disminuyen a medida que nos alejamos del borde tendiendo a la intensidad de la propagación libre.



En la óptica este fenómeno se conoce como **difracción de Fraunhofer**.

## PROBLEMAS

- 8.13) Considere un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  polarizado según la dirección  $x$ , cuyo vector de onda tiene la dirección  $z$ , e incide normalmente desde el vacío sobre un semiespacio conductor perfecto. Determine: a) Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio, b) la impedancia de campo para  $z < 0$  (vacío), c) Los valores instantáneos y promedio del vector de Poynting y c) la densidad de corriente que circula sobre la superficie del conductor, indicando su dirección y sentido.
- 8.14) Para un semiespacio material dieléctrico sin pérdidas, se observa que la reflexión de una onda de  $1\text{ MHz}$  y  $E_{\text{pico}} = 0.1\text{ V/m}$  en la dirección  $x$ , que incide normalmente desde el vacío, produce una relación de onda estacionaria de valor 2.7. Calcule: a) las expresiones de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio, b) la relación entre la potencia incidente y la que se transmite al dieléctrico y c) la posición para  $t = 0$  de los mínimos del campo eléctrico en el vacío.  
[Rta:  $k=0.021\text{ m}^{-1}$ ,  $\rho=-0.459$ ,  $\gamma=0.056\text{ m}^{-1}$ ,  $\eta=139.5\Omega$ ,  $\langle N_t \rangle / \langle N_i \rangle = 79\%$ ,  $z_{\text{min}} = (1-2n)75\text{ m}$ ]
- 8.15) Una onda plana de  $100\text{ MHz}$  y cuyo campo eléctrico posee una amplitud pico de  $0.5\text{ V/m}$  incide normalmente desde el vacío sobre un dieléctrico sin pérdidas, observándose que el coeficiente de reflexión de potencia (valor medio de la potencia reflejada sobre valor medio de la potencia incidente) es  $0.25$ . Hallar a) la permitividad del dieléctrico, b) la potencia media por unidad de área que se transmite al dieléctrico.  
[Rta:  $\epsilon = 9\epsilon_0$ ,  $\langle N_t \rangle = 2.49 \times 10^{-4}\text{ W/m}^2$ ]
- 8.16) Una onda plana de  $10\text{ MHz}$  incide normalmente desde el vacío sobre un semiespacio metálico de conductividad  $\sigma = 1000\text{ (1}/\Omega\text{m)}$ . Determinar: a) el porcentaje de la potencia incidente que se refleja en la interfase y b) ¿a qué distancia de la interfase la amplitud del campo que se propaga por el metal se reduce a  $10^{-6}$  de su valor inicial?  
[Rta:  $\langle N_r \rangle / \langle N_i \rangle = 99.79\%$ ,  $d = 6.95\text{ cm}$ ]
- 8.17) Detrás de una placa dieléctrica de  $1\text{ cm}$  de espesor y con una permitividad relativa  $\epsilon_r = 4 - i0.01$  se coloca un plano conductor perfecto. Determinar, para la frecuencia  $f = 3 \times 10^9\text{ Hz}$ , la impedancia de campo en la cara frontal del dieléctrico y el coeficiente de reflexión.  
[Rta:  $Z_i = (2.39 + i 581.43)\Omega$ ,  $\rho = 0.41 + i0.91$ ]
- 8.18) La permitividad del agua a frecuencias ópticas es  $1.75\epsilon_0$ . Se sabe que una fuente de luz isótropa a una distancia  $d$  bajo el agua produce un área circular iluminada de radio  $5\text{ m}$ . Determine  $d$ .  
[Rta:  $d = 4.32\text{ m}$ ]
- 8.19) Se puede usar una varilla dieléctrica o fibra de material transparente para guiar la luz o una onda electromagnética en condiciones de reflexión interna total. Determine la mínima constante dieléctrica del medio que sirve de guía para que una onda que incida con cualquier ángulo sobre un extremo quede confinada dentro de la varilla hasta que salga por el extremo opuesto.  
[Rta:  $\epsilon_r \geq 2$ ]