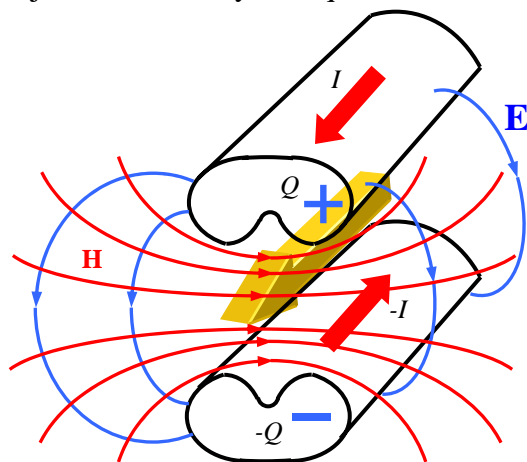


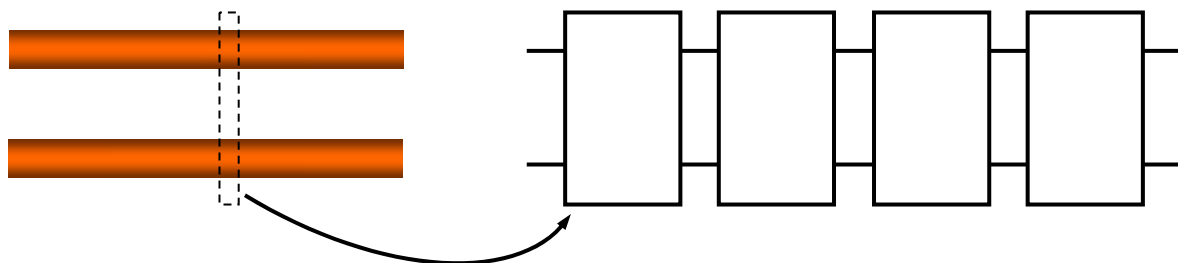
6 - Líneas de Transmisión

Guías de ondas y líneas de transmisión

Una **guía de ondas** es un dispositivo que se usa para transportar energía electromagnética y/o información de un sitio a otro. Generalmente se usa el término **línea de transmisión** a la guía de ondas usada en el extremo de menor frecuencia del espectro. **A estas frecuencias es posible utilizar un análisis cuasiestático.** Para frecuencias más elevadas la aproximación cuasiestática deja de ser válida y se requiere un análisis en términos de campos, que es de mayor complejidad. Veremos este tratamiento en el Capítulo 9.



Podemos pensar a una línea de transmisión básica como un par de electrodos que se extienden paralelos por una longitud grande (en relación con la longitud de onda) en una dada dirección. El par de electrodos se hallan cargados con distribuciones de carga (variables a lo largo de la línea) iguales y opuestas, formando un capacitor distribuido. Al mismo tiempo circulan corrientes opuestas (variables a lo largo de la línea) de igual magnitud, creando campo magnético que puede expresarse a través de una inductancia distribuida. La potencia fluye a lo largo de la línea. Los ejemplos más importantes de líneas de transmisión son el par bifilar, el coaxil y la microcinta.



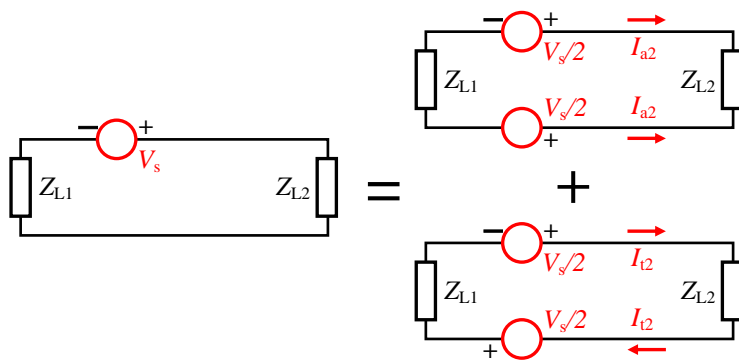
Para usar un modelo cuasiestático se representa a la línea como una cascada de cuadripolos. Cada cuadripolo representa un tramo de línea de pequeña longitud frente a la mínima longitud de onda de la señal. Por lo tanto cada tramo se puede modelizar como un circuito usando la aproximación cuasiestática, como veremos en la siguiente sección.

Este modelo se conoce como **modelo de constantes distribuidas**.

Esta descripción corresponde a una línea **bifilar**. En muchas aplicaciones es necesario considerar líneas **multifilares**, como por ejemplo en circuitos impresos e integrados. Para el análisis circuital es necesario usar coeficientes de capacidad/inducción e inductancias parciales.

La energía electromagnética puede ingresar a una línea de transmisión en forma de excitación **concentrada** o **distribuida**. Las fuentes concentradas se aplican en un punto determinado de la línea y la señal se propaga por la línea desde allí. Se simula este tipo de excitación mediante fuentes de tensión y/o corriente conectadas en el sitio de ingreso de la excitación (por ejemplo, la conexión de la línea a otro circuito).

En el caso de una fuente distribuida la excitación se distribuye a lo largo de la línea. Se simula esta situación mediante una onda, habitualmente plana, que ilumina a la línea en toda o parte de



su extensión.

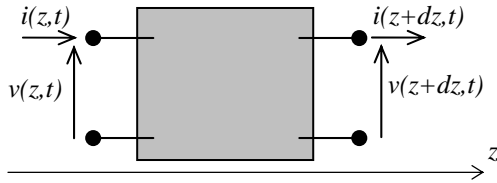
Una dada excitación puede generar distintas respuestas de la línea. En la figura se esquematiza una fuente concentrada en un punto de una línea cargada en ambos extremos. Esta fuente produce corrientes a lo largo de la línea que pueden representarse como la superposición de corrientes en modo común (**modo de antena**) y

corrientes en modo diferencial (**modo de línea de transmisión**).

La circulación de corrientes variables en el tiempo produce emisión de radiación electromagnética, como hemos visto en el Capítulo introductorio. En el modo de antena las corrientes circulan en el mismo sentido en ambos conductores, lo que refuerza los campos individuales radiados, mientras que en el modo de línea las corrientes tienen sentidos opuestos y la radiación neta es baja. Por este motivo es importante analizar el comportamiento de radiación de líneas para estimar la posible interferencia por radiación. Este fenómeno no se observa en los circuitos de parámetros concentrados ya que la eficiencia de radiación de tramos cortos de corriente (comparados con la longitud de onda de los campos) es muy baja, como veremos en el Capítulo 10.

Modelo circuital de la línea bifilar ideal

En una línea de transmisión hay dimensiones, las transversales, que cumplen la condición cuasiestática ($D \ll \lambda$), pero la otra dimensión (longitudinal) habitualmente no la cumple. Sin embargo, podemos ver a la línea como una sucesión o **cascada** de cuadripolos de longitud infinitesimal y para cada uno de ellos usar un modelo circuital, cuyos parámetros descriptivos son las tensiones y corrientes a la entrada y salida, ya que las dimensiones del cuadripolo satisfacen la condición cuasiestática. Elegimos la dirección del eje cartesiano z a lo largo de la línea. Cada tramo de longitud dz a lo largo de la dirección z puede asociarse a un cuadripolo, como se esquematiza en la figura.



Asumimos en esta sección que la línea no presenta pérdidas de energía (**línea ideal**). En tal caso los conductores de la línea serán perfectos ($\sigma \rightarrow \infty$) y el dieléctrico entre ellos tampoco tendrá pérdidas.

Las cargas y corrientes en los conductores crearán campos eléctricos y magnéticos cuya energía almacenada puede modelizarse por componentes reactivos puros: capacidad e inductancia. La capacidad está asociada al campo eléctrico creado por las cargas en los conductores de la línea y la inductancia al campo magnético generado por las corrientes que circulan por ella. Nos queda así el cuadripolo de la figura, donde Ldz es la inductancia del tramo y Cdz su capacidad.

Podemos aplicar ahora las leyes de Kirchhoff a este modelo cuasiestático. La primera ley, aplicada al nodo A lleva a:

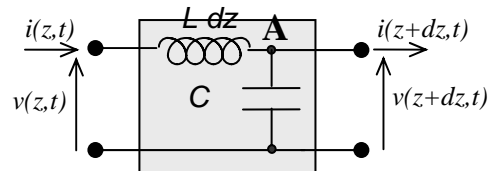
$$i(z + dz) - i(z) + Cdz \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_z = 0$$

donde el último término representa la corriente que sale de A por el capacitor. Pero, a primer orden: $i(z + dz) - i(z) \approx \left. \frac{\partial i}{\partial z} \right|_z dz \Rightarrow \left. \frac{\partial i}{\partial z} \right|_z \approx -C \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_z$

Análogamente, si aplicamos la segunda ley de Kirchhoff recorriendo la malla formada por el cuadripolo en sentido antihorario, tenemos: $v(z + dz) + Ldz \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_z - v(z) \approx 0$

de donde se obtiene, nuevamente a primer orden: $\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_z \approx -L \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_z$

En resumen: $\left. \frac{\partial i}{\partial z} \right|_z = -C \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_z \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_z \approx -L \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_z$



Estas dos ecuaciones diferenciales ligadas para la tensión y la corriente a la entrada del cuadripolo son las llamadas **ecuaciones del telegrafista** para la línea ideal.

Con el fin de analizar el significado de estas ecuaciones nos conviene desacoplar las ecuaciones diferenciales, para lo cual derivamos la primera respecto del tiempo y la segunda respecto de z :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z}$$

donde se ha sobreentendido que las cantidades se calculan en z . Pero las derivadas cruzadas son iguales, de manera que nos queda:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Esta ecuación diferencial para la tensión $v(z,t)$ se denomina **ecuación de ondas** o **ecuación de**

D'Alembert. Es una ecuación diferencial lineal homogénea a derivadas parciales, cuya solución (APENDICE 6) es cualquier función del tipo:

$$v(z,t) = f(z \mp ct) \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Esta función representa una onda que se propaga a lo largo del eje z con velocidad c , de comportamiento similar a las ondas en una cuerda vibrante.

Si se toma el signo (-) de la doble determinación, la onda se propaga en el sentido de $+z$ (onda progresiva), mientras que si se toma el signo (+) la propagación es según $-z$ (onda regresiva).

Se obtiene una ecuación idéntica para la corriente $i(z,t)$ a lo largo de la línea.

Se observa entonces que la solución a las ecuaciones del telegrafista en una línea ideal son ondas de tensión y corriente que se propagan a lo largo de la línea.

Además las ondas de tensión y corriente están vinculadas entre sí.

Consideremos una onda progresiva con: $v(z,t) = f(z - ct)$ y $i(z,t) = g(z - ct)$.

Entonces:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial g}{\partial u} \end{cases}$$

Luego: $\frac{\partial f}{\partial u} = Lc \frac{\partial g}{\partial u}$ e integrando: $f(z - ct) = \sqrt{\frac{L}{C}} g(z - ct)$

de donde: $v(z,t) = Z_0 i(z,t)$ con $Z_0 = \sqrt{L/C}$

La cantidad Z_0 tiene dimensiones de impedancia y se llama **impedancia característica** de la línea. Junto con la **velocidad de propagación** de las ondas $c = 1/\sqrt{LC}$ son los parámetros fundamentales que describen el comportamiento de la línea como dispositivo transmisor de energía.

Si ahora tomamos el par de funciones correspondiente a una onda regresiva:

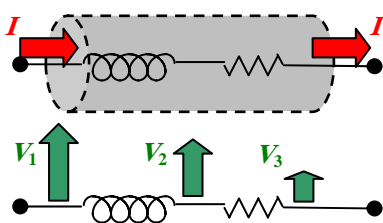
$$v(z,t) = f(z + ct) \quad \text{y} \quad i(z,t) = g(z + ct)$$

es fácil demostrar que: $v(z,t) = -Z_0 i(z,t)$ de modo que en general:

$$v_{\pm}(z,t) = \pm Z_0 i_{\pm}(z,t) \quad \text{con} \quad Z_0 = \sqrt{L/C}$$

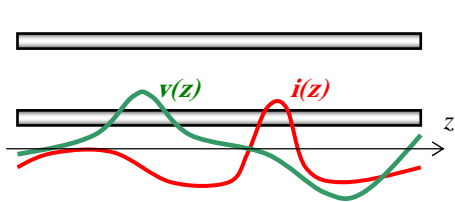
donde el signo + corresponde a la onda progresiva y el signo - a la regresiva.

Debemos señalar las diferencias de este modelo circuital de **constantes distribuidas** con el modelo de **constantes concentradas** que vimos en el Capítulo precedente.



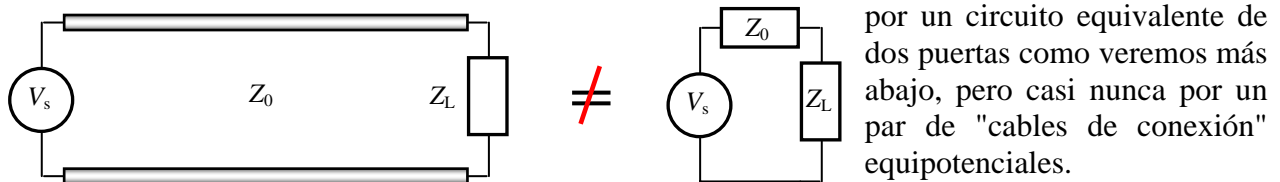
En un circuito de constantes concentradas, la corriente que entra en un "nodo" es la misma que la que sale (1ra. Ley de Kirchhoff), y las variaciones de tensión a lo largo del circuito se concentran en cada elemento concentrado, que desde el punto de vista geométrico no tiene extensión. No hay variación de tensión a lo largo de los "cables de conexión" entre elementos concentrados, que se consideran volúmenes equipotenciales.

En una línea de transmisión la situación es totalmente diferente. La corriente que cruza secciones transversales a la línea y la tensión entre los conductores medida sobre una sección transversal dependen de la posición. Así, no se cumplen las leyes de Kirchhoff. Hay acumulación de carga a lo largo de la línea. La tensión varía punto a punto a lo largo de la línea y no hay sitios (salvo que se conecte un elemento concentrado desde fuera de la línea) donde haya una "caída" abrupta de



tensión¹.

Por este motivo, la línea **no puede reemplazarse por una impedancia concentrada**, salvo en el caso particular en que su dimensión longitudinal sea despreciable frente a la mínima longitud de onda de la señal (condición cuasi-estacionaria), donde habitualmente se la puede reemplazar

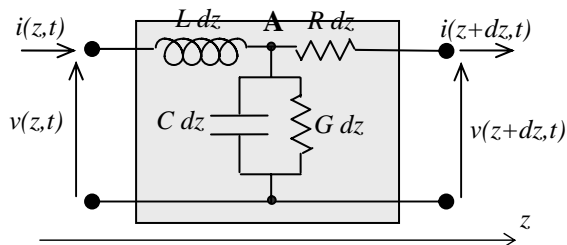


por un circuito equivalente de dos puertas como veremos más abajo, pero casi nunca por un par de "cables de conexión" equipotenciales.

Líneas con pérdidas

El modelo que hemos visto es un modelo ideal, es decir, sin pérdidas de energía. Sin embargo, todos los sistemas reales tienen pérdidas. En una línea de transmisión las pérdidas se dan por:

- pérdidas por efecto Joule en los conductores;
- pérdidas dieléctricas.



El modelo circuital de cuadripolo de la sección precedente puede incorporar estas pérdidas mediante una **resistencia en serie**, que modela las pérdidas por efecto Joule debidas a la circulación de corriente en los conductores de la línea y una **conductancia en paralelo**, que modela las pérdidas dieléctricas mediante una conductividad equivalente del material, como se ilustra en la figura.

Para obtener las ecuaciones del telegrafista para este modelo de la línea con pérdidas, aplicamos nuevamente la primera ley de Kirchhoff al nodo A:

$$i(z + dz) - i(z) = -G dz v(z) - C dz \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_z \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial z} \Big|_z = -Gv(z) - C \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_z$$

Recorriendo ahora la malla que forma el circuito, por la segunda ley de Kirchhoff:

$$v(z + dz) - v(z) = -R dz i(z) - L dz \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_z \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z = -Ri(z) - L \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_z$$

Las ecuaciones diferenciales acopladas son las nuevas **ecuaciones del telegrafista**. Para resolverlas nuevamente se desacoplan las ecuaciones a través de las derivadas cruzadas para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z = -Ri(z) - L \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_z &\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -R \frac{\partial i}{\partial z} - L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = RGv + RC \frac{\partial v}{\partial t} - L \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} \\ \frac{\partial i}{\partial z} \Big|_z = -Gv(z) - C \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_z &\Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -G \frac{\partial v}{\partial t} - C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= RGv + (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} &= RGi + (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{aligned}$$

¹ En la figura se puede ver que la relación entre tensión y corriente es variable a lo largo de la línea. Esto ocurre en general cuando la línea está conectada a una carga porque existen simultáneamente una onda progresiva y una onda regresiva y la relación entre tensión y corriente ya no es Z_0 .

Estas son ecuaciones diferenciales de tipo ondulatorio modificado. Quedan ecuaciones de onda de D'Alembert si consideramos pérdidas nulas ($R = G = 0$).

No existe solución general de estas ecuaciones como en el caso ideal. Sin embargo cualquier forma de onda físicamente realizable puede expresarse mediante una integral de Fourier² y la resolución es simple para **variaciones armónicas**:

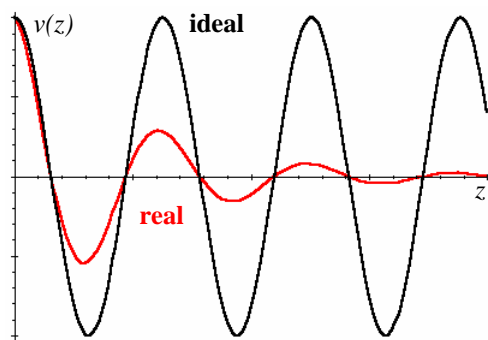
$$v(z,t) = v_s(z) e^{i\omega t} \quad i(z,t) = i_s(z) e^{i\omega t}$$

en notación fasorial. Con esta elección la ecuación diferencial para la tensión queda:

$$\frac{d^2 v_s}{dz^2} = [RG + i\omega(RC + LG) - \omega^2 LC] v_s \Rightarrow \frac{d^2 v_s}{dz^2} + \gamma^2 v_s = 0$$

con:
$$\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 LC - RG - i\omega(RC + LG)} = \sqrt{-(R + i\omega L)(G + i\omega C)}$$

y se obtiene una ecuación similar para la corriente. Estas ecuaciones son llamadas **ecuaciones de Helmholtz**, donde el **número de onda** $\gamma = \beta - i\alpha$ es **complejo**, indicando una **propagación con atenuación**, causada por las pérdidas. Las ondas de tensión y corriente con número de onda complejo quedan:



$$v(z,t) = v_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \quad i(z,t) = i_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

donde se ve que las amplitudes decrecen a medida que la onda se propaga por la atenuación producida por las pérdidas. En la figura se observan dos ondas armónicas de igual frecuencia, una en una línea ideal y la otra en una línea real con $\alpha = \beta/5$. La velocidad de propagación de las ondas es la velocidad de propagación de los planos de fase constante o velocidad de fase:

$$\omega t - \beta z = cte. \Rightarrow v_f = \omega / \beta$$

En general, la relación entre ω y β es **no lineal** por la presencia de la raíz cuadrada en la expresión de γ . Esto lleva a que la velocidad de las ondas (la velocidad de fase, en rigor, como se verá en el Capítulo 8) dependa de la frecuencia, fenómeno conocido como **dispersión** de un paquete de ondas porque algunas componentes de Fourier viajan más rápido que otras.

Como
$$\gamma = \sqrt{-(R + i\omega L)(G + i\omega C)} = \omega \sqrt{LC} \sqrt{(1 - iR/\omega L)(1 - iG/\omega C)}$$

si $R/\omega L = G/\omega C \Rightarrow \gamma = \beta - i\alpha = \omega \sqrt{LC} (1 - iR/\omega L)$ y se ve que en este caso la relación entre ω y β es **lineal** por lo que no hay dispersión. Las líneas que cumplen esta condición son entonces **no dispersivas** o **no distorsivas**.

Si definimos:

$$Z = R + i\omega L \quad (\text{impedancia serie por unidad de longitud})$$

$$Y = G + i\omega C \quad (\text{admitancia paralelo por unidad de longitud})$$

tenemos:
$$\gamma = \sqrt{-ZY}$$

Si vinculamos nuevamente las ondas de tensión y de corriente mediante las ecuaciones del telegrafista podemos obtener la expresión de la impedancia característica de la línea con pérdidas:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}} = Z_0' + iZ_0''$$

² Esto surge de que el cuadrado de cualquier onda de tensión y/o corriente, integrado en el tiempo es proporcional a la energía de la onda, que es acotada.

La impedancia característica compleja indica que hay un **desfasaje temporal** entre la onda de tensión y la onda de corriente para el mismo z en la línea.

Análogamente podemos demostrar que para una onda regresiva:

$$v(z,t) = v_0 e^{i(\omega t + k z)} \quad i(z,t) = i_0 e^{i(\omega t + k z)} \Rightarrow v_0 = -Z_0 i_0$$

- La impedancia característica de una línea de transmisión es la impedancia (relación entre la tensión y la corriente) que se mediría en un plano de $z = \text{cte.}$ sobre la línea infinita para una onda progresiva.
- En general Z_0 es compleja, lo que señala un desfasaje entre las ondas de tensión y de corriente.

Líneas de bajas pérdidas

En los casos prácticos, las líneas se usan para transmitir energía por medio de ondas guiadas. Por lo tanto es esencial minimizar las pérdidas de propagación.

Hablamos de una línea de **bajas pérdidas** cuando:

$$R \ll \omega L \quad G \ll \omega C$$

lo que equivale a decir que la potencia de pérdidas es mucho menor que la potencia media almacenada en el campo electromagnético (que se propagará como una onda) en la línea.

Podemos aproximar en este caso las expresiones de γ y Z_0 :

$$\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{-ZY} = \sqrt{-(R + i\omega L)(G + i\omega C)} = \sqrt{\omega^2 LC \left(1 - i\frac{R}{\omega L}\right) \left(1 - i\frac{G}{\omega C}\right)}$$

Si despreciamos el término de orden superior $RG/\omega^2 LC$ y luego desarrollamos en serie de Taylor para $i(R/\omega L + G/\omega C) \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\gamma = \beta - i\alpha \approx \omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - i\frac{R}{\omega L} - i\frac{G}{\omega C}} \approx \omega\sqrt{LC} \left[1 - \frac{i}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C}\right)\right]$$

de donde:

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} \quad \alpha \approx \frac{\beta}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C}\right) \ll \beta$$

En esta aproximación la velocidad de las ondas será:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y es la misma para cualquier frecuencia, de modo que para bajas pérdidas no hay dispersión.

Debido a la velocidad finita de propagación, existe un retardo de las señales al atravesar una línea. Este **retardo de propagación** se mide en s por m de línea y es la inversa de la velocidad en la línea: $\tau_p = 1/v_f = \sqrt{LC}$.

β tiene unidad de rad/m , mientras que la unidad de α son $neper/m$. Suele usarse la unidad dB/m , donde: $\alpha(dB/m) = 20 \log_{10}(e) \alpha(neper/m) \approx 8.686 \alpha(neper/m)$.

La impedancia característica es, con similares aproximaciones:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{1 - iR/\omega L}{1 - iG/\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\left(1 - i\frac{R}{\omega L}\right) \left(1 + i\frac{G}{\omega C}\right)} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 + \frac{i}{2} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}\right)\right]$$

de donde:

$$Z_0 = Z'_0 + iZ''_0 \quad \text{con:} \quad Z'_0 \equiv \sqrt{\frac{L}{C}} \quad Z''_0 \approx \frac{Z'_0}{2} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}\right) \ll Z'_0$$

Ejemplo 6.1: Calcular las constantes de propagación y de atenuación, la velocidad de fase y la impedancia característica a $f = 10 \text{ MHz}$ de una línea con los siguientes parámetros:

- a) $L = 1.2 \mu\text{Hy}/\text{m}$, $C = 30 \text{ pF}/\text{m}$,
- b) $L = 1.2 \mu\text{Hy}/\text{m}$, $C = 30 \text{ pF}/\text{m}$, $R = 0.1 \Omega/\text{m}$,
- c) $L = 1.2 \mu\text{Hy}/\text{m}$, $C = 30 \text{ pF}/\text{m}$, $R = 0.1 \Omega/\text{m}$, $G = 10^{-6} \text{ 1}/\Omega\text{m}$.

En el caso a) se trata de una línea ideal:

$$\gamma = \beta = \omega\sqrt{LC} \approx 0.377 \text{ m}^{-1} \quad v_f = 1/\sqrt{LC} \approx 1.67 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.55c \quad Z_0 = \sqrt{L/C} = 200 \Omega$$

En el caso b) hay pérdidas en los conductores, pero: $R = 0.1 \Omega/\text{m} \ll \omega L \approx 75.4 \Omega/\text{m}$ de modo que es una línea de bajas pérdidas, y tenemos:

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} \approx 0.377 \text{ m}^{-1} \quad \alpha \approx R\beta/2\omega L \approx 0.00025 \text{ m}^{-1} \quad v_f \approx 1/\sqrt{LC} \approx 1.67 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.55c$$

$$Z'_0 \approx \sqrt{L/C} = 200 \Omega \quad Z''_0 \approx -RZ'_0/2\omega L \approx 0.13 \Omega$$

En el caso c) hay pérdidas conductoras y dieléctricas. Usamos las fórmulas generales:

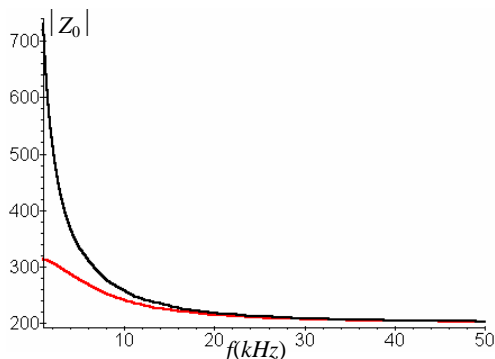
$$Z = R + i\omega L \quad Y = G + i\omega C$$

$$\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{-ZY} \approx (0.377 - i3.5 \times 10^{-4}) \text{ m}^{-1} \Rightarrow v_f = \omega/\beta \approx 1.67 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.56c$$

$$Z_0 = \sqrt{Z/Y} \approx (200 - i0.08) \Omega$$

Se observa que las pérdidas en b) y c) no introducen diferencias significativas en los valores de los parámetros fundamentales de la línea respecto del caso ideal.

Ejemplo 6.2: Graficar la variación del módulo de la impedancia característica en función de la frecuencia para la línea c) del Ejemplo previo.



El módulo de la impedancia característica es:

$$|Z_0| = \left| \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}} \right|$$

En el caso b) no hay pérdidas dieléctricas, de modo que la impedancia queda indefinida para $\omega \rightarrow 0$. Para $\omega \rightarrow \infty$, $Z_0 \rightarrow \sqrt{L/C} = 200 \Omega$. En la gráfica de la izquierda se presenta en negro la variación de $|Z_0|$ con la frecuencia. En el caso c), para $\omega \rightarrow 0$ $Z_0 \rightarrow \sqrt{R/G} \approx 316 \Omega$.

La gráfica es el trazo en rojo. En alta frecuencia el valor es el mismo que en el caso b). En ambos casos $|Z_0|$ decrece hacia el valor de alta frecuencia.

En estos ejemplos se pone en evidencia la fuerte dependencia del valor y el comportamiento de los parámetros de una línea con la frecuencia.

Potencia

Las ondas electromagnéticas transportan energía, que puede describirse mediante el vector de Poynting: $\mathbf{N}(z,t) = \mathbf{E}(z,t) \times \mathbf{H}(z,t)$. Dado que los campos pueden relacionarse con las ondas de tensión y corriente en la línea, es más sencillo derivar el transporte de energía usando el cuadripolo del modelo circuital de la línea. Podemos hallar un análogo del teorema de Poynting a partir de las ecuaciones del telegrafista:

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -Gv - C \frac{\partial v}{\partial t} \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t}$$

Multiplicamos la primera ecuación por v y la segunda por i y sumamos miembro a miembro para obtener:

$$v \frac{\partial i}{\partial z} = -Gv^2 - \frac{C}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t}, \quad i \frac{\partial v}{\partial z} = -Ri^2 - \frac{L}{2} \frac{\partial i^2}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(vi) = -(Gv^2 + Ri^2) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} Cv^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

de donde se ve que el flujo de potencia vi se convierte en potencia disipada en los **elementos activos** G y R o se almacena en los **elementos reactivos** L y C .

Al igual que en el caso de los campos, podemos calcular la potencia media transportada por la onda utilizando la notación fasorial:

$$\langle vi \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(vi^*)$$

Para una onda progresiva armónica en una línea sin pérdidas:

$$\langle vi \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(vi^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(v_0 e^{i(\omega t - kz)} i_0^* e^{-i(\omega t - kz)}) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(v_0 \frac{v_0^*}{Z_0^*} \right) = \frac{|v_0|^2 Z_0'}{2|v_0|^2}$$

En el caso de una línea **con pérdidas** la potencia va decayendo por la atenuación a medida que se propaga:

$$\langle vi \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(vi^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(v_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} i_0^* e^{-\alpha z} e^{-i(\omega t - \beta z)}) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(v_0 \frac{v_0^*}{Z_0^*} \right) e^{-2\alpha z} = \frac{|v_0|^2 Z_0'}{2|v_0|^2} e^{-2\alpha z}$$

De aquí se observa que la relación entre la potencia que fluye en z y en $(z+lm)$ es:

$$\frac{\langle vi \rangle|_z}{\langle vi \rangle|_{z+1}} = \frac{e^{-2\alpha z}}{e^{-2\alpha(z+1)}} = e^{2\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\langle vi \rangle|_z}{\langle vi \rangle|_{z+1}} \right)$$

La relación de potencias se puede expresar:

$$10 \log_{10} \left(\frac{\langle vi \rangle|_z}{\langle vi \rangle|_{z+1}} \right) = 10 \log_{10} (e^{2\alpha}) = 20 \log_{10} (e) \alpha$$

de donde surge la expresión de la atenuación en decibels por metro.

Ejemplo 6.3: Calcular la potencia activa que viaja por las líneas del **Ejemplo 6.1** si se propaga una onda progresiva con $v_0 = 10V$.

Tenemos, en general: $\langle vi \rangle = \frac{|v_0|^2 Z_0'}{2|Z_0|^2}$ Entonces:

a) $\langle vi \rangle = \frac{v_0^2}{2Z_0} \approx 0.25W$ b) $\langle vi \rangle = \frac{v_0^2 Z_0'}{2|Z_0|^2} \approx 0.25W$ c) $\langle vi \rangle = \frac{v_0^2 Z_0'}{2|Z_0|^2} \approx 0.447W$

El primer cable submarino. Thomson y Heaviside.

En la década de 1830 Samuel Morse había establecido la posibilidad práctica de enviar mensajes mediante corrientes eléctricas a lo largo de hilos conductores, enviando un mensaje desde Baltimore a Washington. Poco a poco gran parte de los países europeos y Estados Unidos tendieron redes de telegrafía que comunicaron las grandes ciudades. El siguiente paso sería establecer una comunicación intercontinental, para lo cual se requería instalar un cable submarino. En 1851 se estableció una conexión entre Inglaterra y Francia.

En 1856 se creó la Atlantic Telegraph Company con un capital de £ 350.000 (entonces equivalentes a unos u\$s 1.400.000), presidida por el empresario norteamericano Cyrus Field, cuyo único propósito era tender el primer cable transatlántico. Uno de sus diecisiete directores era el profesor de filosofía natural de la Universidad de Glasgow, **William Thomson** (izquierda).



En 1854 Thomson había aplicado el método de Fourier - quien había resuelto el problema de la transmisión del calor - a la propagación de los impulsos eléctricos en un cable largo. El modelo de Thomson era equivalente al que hemos propuesto para una línea con pérdidas, pero sin considerar los efectos inductivos ($L = 0$) ni pérdidas dieléctricas ($G = 0$). Llegaba así a ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RG v + (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RC \frac{\partial v}{\partial t}$$

que es una ecuación de difusión del tipo de la transmisión del calor.

No existe para una perturbación que siga esta ecuación diferencial una velocidad definida. Ante un estímulo en forma de escalón la respuesta es una función error:

$$i(z, t) = \sqrt{C/\pi Rt} \exp(-RCz^2/4t)$$

Para una línea de longitud L , el máximo de corriente se da para: $t_{\max} = \frac{1}{2} RCL^2$

Esta es la famosa “ley de cuadrados” que encontró Thomson. Significa que, si se aplica un pulso telegráfico a la entrada de la línea, el tiempo que tarda en llegar al otro extremo es proporcional al cuadrado de la longitud de la línea.

La tarea de colocar el cable se dividió entre dos barcos, la fragata norteamericana Niagara y el buque de guerra británico Agamemnon. El plan era navegar hasta el punto medio del tendido y desde allí el Niagara colocaría el cable hacia Norteamérica y el Agamemnon colocaría el cable hacia Inglaterra. El tendido comenzó el 30 de julio de 1857. Luego de muchas rupturas, la colocación se completó finalmente en el quinto intento más de un año después, el 5 de agosto de 1858. Los dos puntos extremos del tendido eran Valentia Harbour, en Irlanda, y Trinity Bay en Newfoundland.

El 16 de agosto se estableció la primera comunicación, con el mensaje: "Glory to God in the highest, and on earth, peace, good will to men". Sin embargo, el cable dejó de funcionar tres semanas después. El "electricista" a cargo, un aficionado llamado O. E. W. Whitehouse, era en realidad un médico retirado que se había dedicado a la electricidad y la telegrafía y no tenía una comprensión acabada de los fenómenos involucrados. Por ejemplo, dijo sobre el modelo teórico de Thomson y su ley de cuadrados:

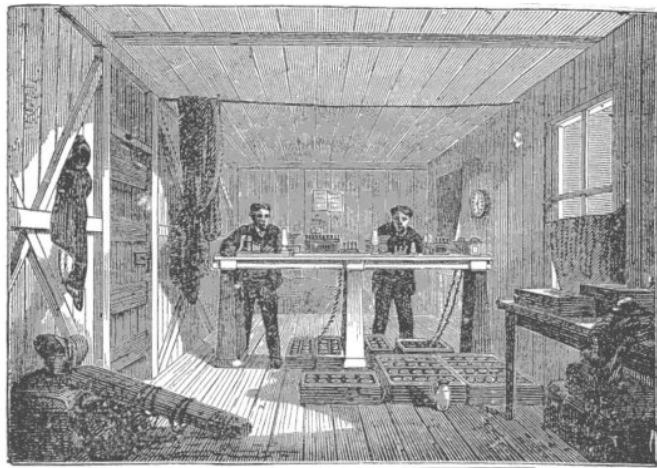
“Con toda honestidad, estoy obligado a responder que creo que la naturaleza no conoce tal aplicación de esa ley, y la puedo solamente considerar como una ficción de las escuelas, una forzada y violenta adaptación de un principio en Física, bueno y verdadero bajo otras circunstancias, pero mal aplicado aquí.”³

Para lograr detectar la muy débil señal telegráfica, en lugar de usar instrumentos más sensibles

³ Paul J. Nahin, *Oliver Heaviside: The Life, Work, and Times of an Electrical Genius of the Victorian Age* (1988)

Whitehouse optó por aumentar la tensión aplicada al cable, lo que causó que el cable se cortocircuitara en puntos débiles del aislante de gutapercha. Luego de un estudio de las causas de la salida de funcionamiento del cable transatlántico, Whitehouse fue despedido.

En un segundo intento se tomaron en cuenta los estudios de Thomson. Se utilizó cable de cobre de la mejor calidad disponible y con una sección casi tres veces mayor del cable original, lo que



disminuía la resistencia por unidad de longitud, mejorando la performance. También Thomson insistió en lograr una mayor fortaleza y mejorar el aislamiento para evitar la acción del agua de mar, así como disminuir las tensiones de trabajo, para lo cual desarrolló un nuevo instrumento, el galvanómetro de espejo, que podía medir corrientes muy pequeñas. El segundo intento de colocar el cable submarino, realizado entre el 14 de julio de 1865 y el 28 de julio de 1866, fue exitoso y se pudieron establecer comunicaciones transatlánticas permanentes. En la figura se muestra la estación

de recepción del telégrafo transatlántico en Valentia, Irlanda⁴. El primer mensaje enviado fue: "[A treaty of peace has been signed between Austria and Prussia](#)". Relatos de la época hablan de la fascinación de los operadores porque los mensajes se recibían horas antes de que fueran enviados, debido a la diferencia de huso horario entre los extremos del cable).

Casi inmediatamente, el uso del cable fue abierto comercialmente pero sólo los muy ricos podían utilizarlo: las tarifas iniciales eran desde u\$s 1 por carta, pagables en oro, en una época en que el salario mensual de un trabajador era del orden de u\$s 20. El cable original colocado en 1866 dejó de operar en 1872, pero ya había otros cuatro cables transatlánticos en uso para esa fecha. Para valorar la importancia de este desarrollo de la ingeniería, debe señalarse que para 1890 había ya más de 150 mil kilómetros de cables submarinos comunicando todo el mundo, y que recién en la década de 1960 el lanzamiento de los primeros satélites de comunicaciones presentaron una alternativa a los cables submarinos.

En noviembre de 1866 Thomson fue elevado a la categoría de par del reino británico bajo el título de Lord Kelvin of Largs por sus logros en relación al cable submarino. El Kelvin es el río que atraviesa el terreno de la Universidad de Glasgow y Largs es el pueblo sobre la costa escocesa donde Thomson construyó su residencia.



Dentro de la investigación en el electromagnetismo, Thomson introdujo en 1850 las nociones de susceptibilidad y permeabilidad magnética, junto con los conceptos de \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} , en 1853 usó la teoría magnética de Poisson para encontrar las ecuaciones de la energía magnética en términos de los campos, por una parte, y de la corriente circulante y la inductancia, por otra. Ese mismo año halló la ecuación del circuito RLC, lo que dio una descripción matemática a observaciones experimentales de Henry y Savery. Ya hemos hablado de su modelo mecánico del electromagnetismo que inspiró los primeros modelos de Maxwell.

En 1857 [Gustav Kirchhoff](#) (izquierda) encontró las ecuaciones del telegrafista para una línea coaxil. También halló que, si la resistencia del cable es pequeña, estas ecuaciones llevan a la ecuación de ondas con una velocidad

⁴ Figura tomada de D. Weaire, "The value of useless studies", Europhysics News, 33, No.5, 2002.

$v = 1/\sqrt{LC}$, que para un cable coaxial da un valor muy cercano a la velocidad de la luz. Kirchhoff se da cuenta de esta coincidencia y es así el primero en hallar que las señales electromagnéticas viajan a la velocidad de la luz.

Las ideas de la propagación de ondas en cables fueron retomadas y completadas, usando el método operacional que él mismo inventó, por **Oliver Heaviside** (izquierda).



Heaviside no tuvo educación formal, ya que abandonó sus estudios a los 16 años. Aprendió el código Morse y se dedicó a ser operador telegráfico. A pesar de su falta de rigor matemático, Heaviside estudió el Treatise de Maxwell y consiguió reducir las veinte ecuaciones (escalares) con veinte incógnitas halladas por Maxwell a sólo dos ecuaciones (vectoriales) con dos incógnitas en el vacío. Logró esta hazaña inventando el análisis vectorial⁵. Por este motivo las actuales ecuaciones de Maxwell deberían llamarse de Maxwell-Heaviside. Por su falta de rigor la idea revolucionaria de Heaviside tuvo pocos seguidores. Los físicos que trabajaban con las ecuaciones de Maxwell estaban influenciados por el modelo de cuaterniones, desarrollado por el mismo

Maxwell y Tait. Sólo Heinrich Hertz, que iba a alcanzar fama mundial por su comprobación experimental de que las ondas electromagnéticas se propagan a la velocidad de la luz, entendió la importancia de los trabajos de Heaviside y Gibbs y en 1892 publicó un trabajo riguroso donde llega a la notación actual de las ecuaciones del electromagnetismo.

Entre 1880 y 1887 Heaviside desarrolló el **cálculo operacional** para estudiar los circuitos eléctricos, que permite pasar de modelos basados en ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas. Este es el método de la transformada de Laplace que hoy en día es el método normal de análisis de circuitos. A pesar del evidente éxito de este método, la falta de rigor matemático de las presentaciones de Heaviside hizo que no tuviera aceptación amplia hasta 1906 en que su fundamentación rigurosa fue establecida por el matemático inglés **Thomas Bromwich**.

Heaviside también se dedicó a la propagación de ondas en las líneas telegráficas. Redescubrió las ecuaciones del telegrafista que ya había hallado Kirchhoff. Heaviside se dio cuenta que el efecto de la inductancia de la línea puede llevar a la condición de propagación sin distorsión (p.6.6) por lo que sugirió aumentar la inductancia agregando inductores a lo largo de la línea.

En 1883 comienza a analizar la propagación de ondas electromagnéticas en conductores. En forma independiente en 1885 Heaviside y el físico Horace Lamb describieron por primera vez el efecto pelicular en conductores, que hace que la distribución de corriente a altas frecuencias no sea uniforme y haya una concentración de corriente sobre la periferia del conductor, modificando así su resistencia, como veremos en el Capítulo 8.

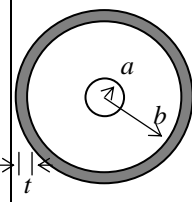
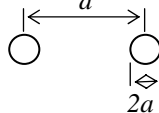
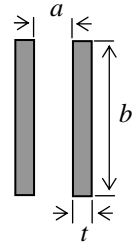
En 1902 y en forma casi simultánea Heaviside y el ingeniero norteamericano Arthur Kennelly anunciaron la probable existencia de una capa atmosférica de gas ionizado que afectaría la propagación de las ondas electromagnéticas. La capa de Heaviside-Kennelly es una de las capas de la ionosfera, cuya existencia fue corroborada experimentalmente en 1923.

⁵ En la misma época el físico norteamericano Joshua Willard Gibbs realizaba desarrollos similares.

Parámetros circuitales de líneas básicas comunes

El uso del modelo cuasi-estático de cuadripolo para cada tramo dz de la línea permite calcular, como en la situación estática, los parámetros circuitales del modelo. Para muy altas frecuencias el modelo cuasi-estático deja de ser válido y se debe usar el modelo de campos de las guías de onda. Para frecuencias no tan altas se puede usar el modelo cuasi-estático pero se debe tener en cuenta, por ejemplo, la distribución no homogénea de corriente en los conductores para el cálculo de las pérdidas por efecto Joule.

En el siguiente cuadro resumimos las propiedades de las líneas de uso común:

	Coaxil	Bifilar	Doble cinta	
				
C (F/m)	$\frac{2 \pi \epsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi \epsilon}{\ln(d/a)}$	$\frac{\epsilon b}{a}$	
L (Hy/m)	$\frac{\mu}{2 \pi} \ln(b/a)$	$\frac{\mu}{\pi} \ln(d/a)$	$\frac{\mu a}{b}$	
G (Ωm) ⁻¹	$\frac{2 \pi \sigma_{eq}}{\ln(b/a)}$	$\frac{2 \pi \sigma_{eq}}{\ln(d/a)}$	$\frac{\sigma_{eq} b}{a}$	
Alta frecuencia	R (Ω / m)	$\frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2 R_s}{b}$
	Z_0 (Ω)	$\frac{\eta}{2 \pi} \ln(b/a)$	$\frac{\eta}{\pi} \ln(d/a)$	$\frac{\eta a}{b}$
Baja frecuencia	R (Ω / m)	$\frac{\rho}{\pi} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2bt} \right)$	$\frac{2\rho}{\pi a^2}$	$\frac{2\rho}{bt}$
	Z_0 (Ω)	$\sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$		

donde ϵ , μ son los parámetros del material dieléctrico, $\sigma_{eq} = \omega\epsilon''$ es la conductividad equivalente del dieléctrico (que está asociada a las pérdidas dieléctricas), $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ρ es la resistividad de baja frecuencia de los conductores (supuestos del mismo material) y $R_s = \sqrt{\omega \mu / 2 \sigma}$ es la resistencia superficial de los conductores a alta frecuencia. Este parámetro surge del efecto pelicular de distribución no homogénea de corriente en un conductor a alta frecuencia, que hemos visto superficialmente en el Ejemplo 63 y trataremos en más detalle en el Capítulo de propagación de ondas en medios materiales. A baja frecuencias suponemos que la distribución de corriente es uniforme en la sección de los conductores. La inductancia por unidad de longitud es la inductancia externa solamente. Las fórmulas de la capacidad e inductancia por unidad de longitud son las cuasi-estáticas y se han hallado en los Ejemplos del Capítulo 2.

La impedancia característica a baja frecuencia se debe calcular con la fórmula general para no introducir errores (ver el **Ejemplo 6.2**).

Ejemplo 6.4: De acuerdo a tablas, el cable coaxil RG59 tiene un radio de la malla de 3.1 mm, impedancia característica $Z_0 = 75 \Omega$ y las ondas se propagan con velocidad $v = 0.66 c$. A 100 MHz la atenuación es 11.5 dB cada 100m. Hallar la permitividad del dieléctrico, el radio del conductor interior, la inductancia, capacidad y resistencia por unidad de longitud.

Como la velocidad de propagación en la línea es: $v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = c/\sqrt{\epsilon_r}$

ya que $\mu \approx \mu_0$, tenemos: $\epsilon_r = 1/(v/c)^2 \approx 2.3$

Además, a alta frecuencia: $Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 2\pi\sqrt{\epsilon_r} \frac{Z_0}{\eta_0} \approx 1.895$

y como $b = 3.1\text{ mm}$ $\ln(b/a) \approx 1.895 \Rightarrow a \approx 0.46\text{ mm}$

Con estos valores podemos calcular:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \approx 38 \mu\text{Hy} / m \quad C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \approx 67 \text{ pF} / m$$

La atenuación, suponiendo únicamente pérdidas conductoras o resistivas, es:

$$\alpha \approx \frac{\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2Z_0} \Rightarrow R = 2\alpha Z_0$$

Pasamos α de dB/m a neper/m: $\alpha(\text{neper/m}) \approx \alpha(\text{dB/m}) / 8.686 \approx 13.2 \times 10^{-3} \text{ neper/m}$

y entonces: $R = 2\alpha Z_0 \approx 2 \Omega / m$

Ejemplo 6.5: Calcular la impedancia característica a alta frecuencia de las siguientes líneas:

- a) Bifilar con dieléctrico de aire. $d = 1\text{ cm}$, $a = 0.6\text{ mm}$.
- b) Idem b) pero con dieléctrico de polietileno ($\epsilon_r = 2.2$).
- c) Doble cinta con dieléctrico de aire. $a = 5\text{ mm}$, $b = 3\text{ cm}$.
- d) Idem c) pero con dieléctrico de poliestireno ($\epsilon_r = 2.7$).

Usamos las expresiones de la tabla anterior:

$$\text{a) } Z_0 = \frac{\eta_0}{\pi} \ln(d/a) \approx 337.4 \Omega \quad \text{b) } Z_0 = \frac{\eta_0}{\pi} \ln(d/a) = \frac{\eta_0}{\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln(d/a) \approx 227.5 \Omega$$

$$\text{c) } Z_0 = \frac{\eta_0 a}{b} \approx 2260.4 \Omega \quad \text{d) } Z_0 = \frac{\eta_0 a}{b\sqrt{\epsilon_r}} \approx 1375.6 \Omega$$

La siguiente tabla presenta información sobre varios tipos de cables coaxiales⁶ de uso común en la electrónica:

Tipo	Diámetro exterior	Z ₀	v _f /c	Peso cada 100m	C	f(MHz) / Atenuación en dB cada 100 m									
						mm	ohm	kg	pF/m	10	14	28	50	100	144
Aircom Plus	10,8	50	0,80	15,0	84	0,9				3,3	4,5	8,2	14,5	21,5	
H2000 Flex®	10,3	50	0,83	14,0	80	1,1	1,4	2	2,7	3,9	4,8	8,5	15,7	21,8	
H 100	9,8	50	0,84	11,0	79			2	2,8		4,9	8,8	16	22,4	
H 500	9,8	50	0,81	13,5	82	1,3			2,9	4,1	5,6	9,3	16,8	24,1	
RG 213 US100	10,3	50	0,66	15,5	101			2,4	3,2		5,9	10,1	21,1		
RG 213 U	10,3	50	0,66	15,5	101	2,2		3,1	4,4	6,2	7,9	14,8	27,5	41	
Aircell 7	7,3	50	0,83	7,2	74		3,4	3,7	4,8	6,6	7,9	14,1	26,1	37,9	
H 155	5,4	50	0,79	3,9	100			4,9	6,5	9,4	11,2	19,8	34,9	50	
RG 58 CU	5,0	50	0,66	4,0	101	4,6	6,2	8	11	15,6	17,8	33,2	64,5	110	
RG 55	5,4	53	0,66	6,0	94						16	29	52		
RG 62 A/U	6,2	93	0,85	1,73	40			5,0				22,0			
RG 223	5,4	50	0,66	6,0	101		6,1	7,9	11	15,4	17,6	30	57	85	
RG 174	2,6	50	0,66	1,1	101	13		18		30	34	60	110	175	
RG 142	4,95	50	0,635								15	28	49	72	
H 43	9,8	75	0,85	9,1	52	1,2			2,5	3,7		8	14,8		
RG 11	10,3	75	0,66	13,9	67				4,6	6,9		17,5			
RG 59	6,15	75	0,66	5,7	67					11,5	15	25	49	72	

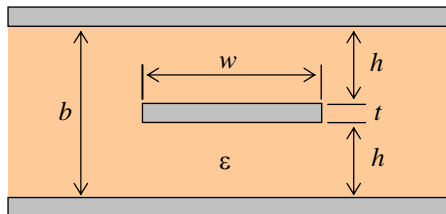
⁶ Datos tomados de <http://www.xs4all.nl/~hanvu/coaxkabel.html>.

Líneas de cinta

Las líneas de cinta se utilizan mucho en aplicaciones electrónicas. Se las usa por su facilidad de construcción en circuitos integrados y para crear componentes de circuitos como filtros, acopladores, resonadores, antenas y otros.

Hay diversas variantes de las líneas de cinta, de las que las más usadas son la línea de cinta propiamente dicha (stripline) y la línea de microcinta (microstrip).

Stripline



Las striplines están formadas por dos cintas conductoras paralelas de tierra, y una cinta conductora interna de señal entre ellas. El ancho w de la cinta de señal es pequeño frente al ancho de las cintas de tierra, de manera que éstas pueden considerarse planos infinitos. El espesor de la cinta de señal es t y la separación entre las cintas de tierra, llena con un dieléctrico de permitividad ϵ , es b . Hay fórmulas aproximadas en la literatura para calcular la impedancia característica de una línea stripline.

Sea $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} \approx \eta_0/\sqrt{\epsilon_r} \approx 120\pi/\sqrt{\epsilon_r} (\Omega)$. La fórmula que da mayor precisión cuando puede despreciarse el espesor t de la cinta de señal es: $Z_{01} \approx \frac{\eta}{4} \frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})}$ donde $k = 1/\cosh\left(\frac{\pi w}{2b}\right)$ y

$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$ es la integral elíptica completa de primera especie. Para $w/b > 0.56$

esta expresión se aproxima como: $Z_{02} \approx \frac{\pi\eta}{8} \frac{1}{\ln(2e^{\pi w/2b})}$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea se obtienen de las expresiones: $v = c/\sqrt{\epsilon_r}$ y $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$ donde c es la velocidad de la luz y λ_0 la longitud de onda en el vacío.

La atenuación debida a las pérdidas óhmicas en los conductores es aproximadamente (en dB/m):

$$\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{\eta b} \left[\frac{\pi w/b + \ln(4b/\pi t)}{\ln 2 + \pi w/2b} \right] \quad (\text{para } w > 2b \text{ y } t < b/10)$$

donde $R_s = \sqrt{\omega \mu / 2\sigma}$, mientras que la atenuación debida a las pérdidas dieléctricas es (también en dB/m): $\alpha_D \approx 8.686 \eta \sigma_{eq}$

donde $\sigma_{eq} = \omega \epsilon''$ es la conductividad equivalente del dieléctrico.

Ejemplo 6.6: Hallar la impedancia característica, la velocidad de propagación, la longitud de onda y los factores de atenuación a 100 MHz de una línea stripline de parámetros: $b = 1\text{ mm}$, $w = 2\text{ mm}$, $t = 10\mu\text{ m}$, $\epsilon_r = 2.5$, $\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega\text{ m})^{-1}$.

$$\begin{aligned} \eta &\approx 120\pi/\sqrt{\epsilon_r} \approx 238.43\Omega \\ k &= 1/\cosh\left(\frac{\pi w}{2b}\right) \approx 0.086 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} Z_{01} \approx \frac{\eta}{4} \frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})} \approx 24.417\Omega \\ Z_{02} \approx \frac{\pi\eta}{8} \frac{1}{\ln(2e^{\pi w/2b})} \approx 24.417\Omega \end{cases}$$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea son:

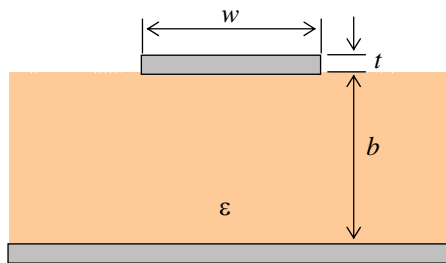
$$v = c/\sqrt{\epsilon_r} \approx 0.63 c \approx 1.9 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r} = v/f \approx 1.9 \text{ m}$$

El factor de atenuación por pérdidas conductoras es:

$$\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{\eta b} \left[\frac{\pi w/b + \ln(4b/\pi t)}{\ln 2 + \pi w/2b} \right] = \frac{8.686}{b} \sqrt{\frac{\omega\epsilon}{2\sigma}} \left[\frac{\pi w/b + \ln(4b/\pi t)}{\ln 2 + \pi w/2b} \right] \approx 0.33 \text{ dB/m}$$

Microstrip

A diferencia de la stripline, las líneas microstrip son estructuras abiertas, de forma que las líneas de campo no están confinadas y la propagación debe analizarse en rigor con las técnicas de campos de las guías de onda. Sin embargo, a bajas frecuencias es posible un análisis cuasi-estático con parámetros distribuidos como el que realizamos en este capítulo. Hay diversas variantes constructivas de estas líneas, y a modo de ejemplo presentamos la configuración clásica de la figura. Una cinta conductora muy ancha funciona como plano de tierra y sobre ella se coloca un sustrato dieléctrico de permitividad ϵ y espesor b . Sobre el sustrato hay una cinta de señal de espesor t y ancho w .



La impedancia característica de la línea es de difícil cálculo debido al campo disperso fuera de la región entre los conductores. Las expresiones más conocidas son las halladas por Wheeler⁷. A partir de ellas se han realizado aproximaciones y mejoras para diversas situaciones. En esta sección solamente presentamos las fórmulas más sencillas⁸ en las que se desprecia el espesor t de la cinta de señal.

Sea $\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 12b/w}} + 0.04 \left(1 - \frac{w}{b} \right)^2 \right]$ Entonces:

Sea $\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 12b/w}} + 0.04 \left(1 - \frac{w}{b} \right)^2 \right]$ Entonces:

▪ Si $w/b \leq 1 \Rightarrow Z_0 \approx \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_{eff}}} \ln\left(\frac{8b}{w} + \frac{w}{4b}\right)$

▪ Si $w/b \geq 1 \Rightarrow Z_0 \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \frac{1}{w/b + 1.393 + 0.667 \ln(w/b + 1.444)}$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea se obtienen de las expresiones:

$$v = c/\sqrt{\epsilon_{eff}} \quad \text{y} \quad \lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_{eff}}$$

donde c es la velocidad de la luz y λ_0 la longitud de onda en el vacío.

Las atenuaciones debidas a las pérdidas óhmicas en los conductores y dieléctricas son (en dB/m):

$$\alpha_c \cong 8.686 \frac{R_s}{wZ_0} \quad \alpha_d \cong 27.3 \frac{(\epsilon_{eff} - 1)\epsilon_r \tan \theta}{(\epsilon_r - 1)\epsilon_{eff} \lambda}$$

donde $\lambda = v/f$ es la longitud de onda en la línea y $\tan \theta = \sigma/\omega\epsilon$ es la tangente de pérdidas del sustrato. La constante de atenuación total es la suma de $\alpha_c + \alpha_d$.

Otras ecuaciones de interés son las de **diseño** de líneas microstrip: dado el material del sustrato y la impedancia característica deseada, determinar w/b :

• $w/b \leq 2 \Rightarrow \frac{w}{b} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} \quad \text{con} \quad A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}} (0.23 + 0.11/\epsilon_r)$

• $w/b \geq 2 \Rightarrow \frac{w}{b} = \frac{2}{\pi} \left\{ B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} [\ln(B - 1) + 0.39 - 0.61/\epsilon_r] \right\}$

con $B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}}$

⁷ H.A. Wheeler, "Transmission-Line Properties of Parallel Strips Separated by a Dielectric Sheet", IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, MTT-3, No.3, marzo 1965, pp. 172-185.

⁸ Tomadas de I.J.Bahl, D.K.Trivedi, "A Designer's Guide to Microstrip Line", Microwaves, Mayo 1977, p.174. Fórmulas más complejas, para mayores anchos de banda y situaciones de geometrías variadas, pueden encontrarse en el documento RT 3.1.2 de la firma Rogers Corp. (<http://www.rogers-corp.com/mwu/litintbl.htm>).

Ejemplo 6.7: Hallar la impedancia característica, la velocidad de propagación, la longitud de onda y los factores de atenuación a 100 MHz de una línea microstrip de parámetros: $b = 1\text{ mm}$, $w = 2\text{ mm}$, $t = 10\mu\text{m}$, $\epsilon_r = 2.5$, $\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$.

La permitividad efectiva es:
$$\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 12b/w}} + 0.04 \left(1 - \frac{w}{b} \right)^2 \right] \approx 2.06$$

Como $w = 2b$:
$$Z_0 \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \frac{1}{\frac{w}{b} + 1.393 + 0.667 \ln \left(\frac{w}{b} + 1.444 \right)} \approx 62.2 \Omega$$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea son:

$$v = c / \sqrt{\epsilon_{eff}} \approx 0.7 c \approx 2.09 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_r} = v / f \approx 2.09 \text{ m}$$

La atenuación por pérdidas óhmicas es:
$$\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{w Z_0} = \frac{8.686}{w Z_0} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \approx 0.18 \text{ dB/m}$$

Hay otros tipos de líneas de cinta. El programa **TXLINE**, de Applied Wave Research Inc. permite calcular los parámetros de distintos tipos de líneas de cinta para análisis o síntesis. El programa **ULTRACLK**, de Ultracad Design Inc. también permite analizar líneas de cinta, aunque en menos tipos.

Líneas de par trenzado



Una línea de par trenzado consiste en cables formados por hilos de cobre recubiertos de plata y rodeados por un aislador. Los cables se trenzan de a pares para disminuir la interferencia, y cada par forma un circuito que puede transmitir datos. La línea consiste en un grupo de uno o más pares. Esta línea se conoce

como **UTP (unshielded twisted pair)** y es el tipo más común de línea usada en redes de computadoras. Para mayor rechazo a interferencia (en particular el rechazo a modo común y la diafonía entre líneas) se rodean los pares con un aislador. Esta línea se conoce como **STP (shielded twisted pair)**. Tanto UTPs como STPs se usan en instrumentación electrónica, aviones y otras aplicaciones críticas de transmisión de datos.

De acuerdo a las características y calidad constructivas las líneas de par trenzado la **ANSI/EIA (American National Standards Institute/Electronic Industries Association)** las clasifica en las siguientes categorías:

Categoría	Máxima velocidad de datos	Aplicación usual
CAT 1	Hasta 1 Mbps	Voz análoga (telefonía tradicional) Portero eléctrico
CAT 2	Hasta 4 Mbps	Sistema de cableado de IBM para redes Token Ring
CAT 3	Hasta 16 Mbps	Transmisión de voz y datos sobre Ethernet 10BASE-T Es el tipo de cable más común en instalaciones corporativas antiguas y contiene cuatro pares de cables
CAT 4	Hasta 20 Mbps	Solamente en Token Ring de 16 Mbps. Cuatro pares de cables
CAT 5	Hasta 100 Mbps	Transmisión de voz y datos sobre Ethernet 10BASE-T, 100BASE-T4 y 100BASE-TX. Es el tipo de cable más común en instalaciones nuevas y contiene cuatro pares de cables Está en proceso de testeo para la especificación Gigabit Ethernet para distancias cortas (para distancias largas debe usarse fibra óptica).

Las características de una línea de par trenzado no son fáciles de determinar. Sin embargo, debido a su popularidad se han hecho estudios semi-empíricos para determinarlas⁹, donde se modeliza cada par como una doble hélice. Sea un UTP con:

- D : separación entre los conductores del par
 d : diámetro de cada conductor del par
 T : número de vueltas por unidad de longitud
 l : longitud de la línea
 ϵ_r : permitividad relativa del dieléctrico entre pares
 σ_1 : conductividad del alma de cobre de cada hilo
 σ_2 : conductividad del recubrimiento de plata de cada hilo
 $\tan(\delta)$: tangente de pérdidas del dieléctrico entre pares

Con estos datos se pueden determinar parámetros geométricos:

$$\vartheta = \tan^{-1}(T \pi D) \quad \text{ángulo de giro de la hélice}$$

$$l_0 = T l \pi D / \sin \vartheta \quad \text{longitud real de cable}$$

$$q = 0.45 + 10^{-3} \vartheta^2 \quad \text{factor de forma para el cálculo de la permitividad efectiva } (\vartheta \text{ en rads})$$

que permiten calcular los parámetros físicos para la línea ideal:

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_0 [1 + q(\epsilon_r - 1)] \quad \text{permitividad equivalente o efectiva}$$

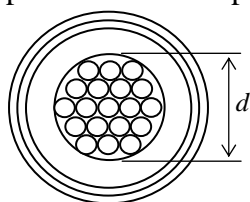
$$C = \frac{\pi \epsilon_{eff}}{\cosh^{-1}(D/d)} \quad \text{capacidad por unidad de longitud}$$

$$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}(D/d) \quad \text{inductancia por unidad de longitud}$$

$$v = c / \sqrt{\epsilon_{eff} / \epsilon_0} \quad \text{velocidad de propagación de las ondas}$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = \frac{\cosh^{-1}(D/d)}{\pi} \sqrt{\mu / \epsilon_{eff}} \quad \text{impedancia característica}$$

Para determinar los parámetros ligados con las pérdidas se requiere considerar que cada cable del par está formado por hilos separados (ver figura), y que hay una redistribución de la corriente en cada hilo debido al “efecto de proximidad” de los hilos y el comportamiento del conductor a alta frecuencia, que veremos en el Capítulo 8.



A baja frecuencia la resistencia por unidad de longitud que presenta cada cable del par es: $R_{cc} = f_P N f_S \frac{2}{\pi (d^2 / 4) \sigma_2}$

donde $f_P = 1.15$ es el factor de proximidad, N es el número de hilos en el cable (19 en el ejemplo), $f_S = 1/25$ es el factor de relación entre la superficie del cable (que aparece en el denominador) y la superficie de cada hilo y σ_2 es la conductividad del recubrimiento del hilo.

A alta frecuencia se debe tener en cuenta que los campos (y las líneas de corriente) se distribuyen fundamentalmente por la periferia del hilo conductor, debido al llamado efecto pelicular que veremos en el próximo capítulo. Con esta corrección se tiene:

$$R = R_{cc} \frac{d}{4} \sqrt{\pi f \mu \sigma_2}$$

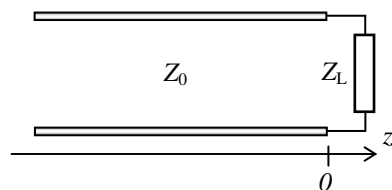
La conductancia por unidad de longitud es: $G = 2 \pi \tan(\delta) C$

⁹ P. Lefferson, “Twisted Magnet Wire Transmission Lines”, IEEE Trans. Parts, Hybrids and Pack. PHP-7, No.4, diciembre 1971, pp. 148-154.

J.H. Broxon II y D.K. Linhart, “Twisted-Wire Transmission Lines”, RF Design, junio 1990, pp. 73-75.

Línea cargada

Hasta el momento hemos analizado la modelización de líneas de transmisión y la propagación de ondas en líneas de longitud indefinida. En la práctica la línea termina en una impedancia de carga¹⁰ y tiene generador/es conectados. En esta sección analizamos la influencia de la carga sobre la distribución de tensión y corriente a lo largo de una línea de impedancia característica Z_0 se conecta a una carga Z_L , como se ve en la figura.



La solución general de la ecuación de ondas en la línea será la superposición de una onda progresiva y una regresiva:

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - \gamma z)} + V_- e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

$$i(z, t) = I_+ e^{i(\omega t - \gamma z)} + I_- e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

(obsérvese que se coloca el cero de z en la posición de la carga).

Pero sabemos que: $V_+ = Z_0 I_+$ y $V_- = -Z_0 I_-$

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - \gamma z)} + V_- e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

Entonces:

$$i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - \gamma z)} - \frac{V_-}{Z_0} e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

La carga impone la condición: $\left. \frac{v(z, t)}{i(z, t)} \right|_{z=0} = Z_L$, de manera que:

$$v(0, t) = (V_+ + V_-) e^{i\omega t} = Z_L i(0, t) = \frac{Z_L}{Z_0} (V_+ - V_-) e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{(V_+ + V_-)}{(V_+ - V_-)} = \frac{Z_L}{Z_0}$$

y de esta ecuación se obtiene la relación entre las amplitudes de las ondas de tensión progresiva y regresiva:

$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Esta relación se conoce como coeficiente de reflexión de tensión sobre la carga o **coeficiente de reflexión¹¹** a secas. En general podemos pensar en una onda que viaja hacia la carga y que se ve parcialmente “reflejada” en ella.

Se observa que $\rho_L = 0$ si $Z_L = Z_0$. En este caso no existe onda regresiva (no existe reflexión). La carga está **adaptada** a la línea, y esto ocurre cuando la impedancia de carga es igual a la impedancia característica de la línea.

La tensión sobre la carga será:

$$V_L = V_+ + V_- = (1 + \rho_L) V_+ \Rightarrow \tau_L = \frac{V_L}{V_+} = 1 + \rho_L = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0}$$

τ_L es el llamado coeficiente de transmisión de tensión sobre la carga o **coeficiente de transmisión** a secas, y relaciona la tensión sobre la carga con la tensión de la onda incidente, también medida sobre la carga.

Analizamos ahora la **propagación de la energía** en la línea. Consideramos Z_0 real por simplicidad matemática. Usamos la expresión del valor medio de un producto de fasores del Capítulo 1:

$$\text{Potencia incidente: } \langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(v_+ i_+^*) = \frac{|v_+|^2}{2Z_0} = \frac{|V_+|^2}{2Z_0}$$

¹⁰ Si hubiera múltiples cargas conectadas a la línea, cada tramo entre cargas se puede considerar como un tramo cargado en su extremo en cascada con otro, y así sucesivamente.

¹¹ En alguna literatura técnica el coeficiente de reflexión se denota con el símbolo Γ .

Potencia reflejada: $\langle P_r \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(v_- i_-^*) = \frac{|v_-|^2}{2 Z_0} = \frac{|V_-|^2}{2 Z_0} = \frac{|\rho_L V_+|^2}{2 Z_0} = |\rho_L|^2 \langle P_i \rangle$

Potencia transmitida: $\langle P_t \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_L I_L^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(V_L \frac{V_L^*}{Z_L}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_L) \left|\frac{V_L}{Z_L}\right|^2$
 $= \frac{R_L}{2 |Z_L|^2} |\tau_L V_+|^2 = \frac{R_L Z_0}{|Z_L|^2} |\tau_L|^2 \langle P_i \rangle$

donde R_L es la resistencia de carga (parte real de la impedancia de carga). Estas relaciones nos permiten definir los **coeficientes de transmisión y reflexión de potencia**:

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = |\rho_L|^2 \qquad T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{R_L Z_0}{|Z_L|^2} |\tau_L|^2$$

Ondas estacionarias

Si una línea **ideal** está abierta o cortocircuitada en el extremo de carga se producen ondas estacionarias. El coeficiente de reflexión vale:

$$Z_L = \infty \Rightarrow \rho_L = 1 \qquad Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = -1$$

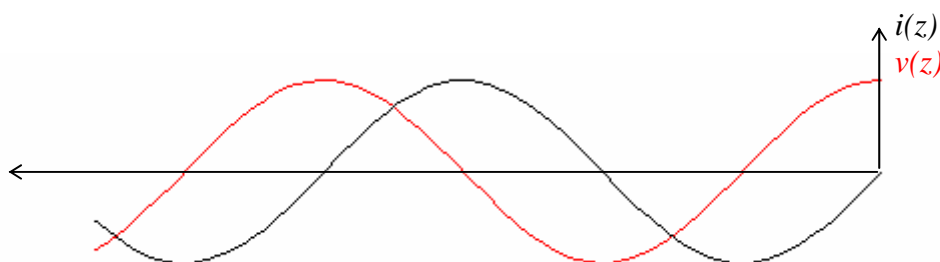
y la onda de tensión sobre la línea será:

$$v(z,t) = V_+ e^{i(\omega t - kz)} + V_- e^{i(\omega t + kz)} = V_+ e^{i(\omega t - kz)} + \rho_L V_+ e^{i(\omega t + kz)}$$

$$Z_L = \infty \Rightarrow \begin{cases} v(z,t) = V_+ e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2V_+ e^{i\omega t} \cos(kz) \\ i(z,t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = -2i \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} \sin(kz) \end{cases}$$

$$Z_L = 0 \Rightarrow \begin{cases} v(z,t) = V_+ e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = 2iV_+ e^{i\omega t} \sin(kz) \\ i(z,t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2 \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} \cos(kz) \end{cases}$$

que son **ondas estacionarias** ya que la onda deja de presentar la forma ondulatoria $f(\omega t \pm kz)$ y aparecen puntos (**nodos**) donde la magnitud (tensión o corriente) es siempre cero. En el caso de la línea abierta, los nodos de las ondas estacionarias se dan para $\cos(kz_n) = 0 \Rightarrow z_n = (2n+1)\pi/2$. En el caso de la línea cortocircuitada los nodos están en: $\sin(kz_m) = 0 \Rightarrow z_m = m\pi$



La gráfica muestra las ondas de tensión y corriente para $t = 0$ con carga abierta.

En general podemos decir que $|\rho_L| \leq 1$

Se observa que:

- para una **línea adaptada** $R = 0$ y $T = 1$.
- en el caso de **ondas estacionarias**, $R = 1$ y $T = 0$.

Es común expresar la reflexión de potencia, que da idea de la adaptación entre línea en carga en

decibeles (*dB*). Se define así la **pérdida de retorno (return loss)** - que es la misma idea de la pérdida de inserción en filtros que ya introducimos en el Capítulo 2 - en líneas como:

$$RL = -10 \log_{10}(R) = -20 \log_{10}(|\rho_L|)$$

Impedancia y admitancia de onda. Impedancia de entrada. ROE

En general, la tensión y la corriente en un punto cualquiera de la línea son:

$$v(z, t) = e^{i\omega t} [V_+ e^{-i\gamma z} + V_- e^{i\gamma z}] = V_+ e^{i\omega t} [e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}]$$

$$i(z, t) = e^{i\omega t} \left[\frac{V_+}{Z_0} e^{-i\gamma z} - \frac{V_-}{Z_0} e^{i\gamma z} \right] = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} [e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}]$$

de modo que podemos definir punto a punto una **impedancia de onda** como el cociente entre la tensión y la corriente:

$$Z(z) = \frac{v(z, t)}{i(z, t)} = Z_0 \frac{e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}}{e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}}$$

que podemos escribir en función de Z_L y Z_0 :

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L (e^{-i\gamma z} + e^{i\gamma z}) + Z_0 (e^{-i\gamma z} - e^{i\gamma z})}{Z_L (e^{-i\gamma z} - e^{i\gamma z}) + Z_0 (e^{-i\gamma z} + e^{i\gamma z})}$$

y finalmente:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \operatorname{sen}(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \operatorname{sen}(\gamma z)}$$

Como se ve, la impedancia de onda varía a lo largo de la línea y en general adopta valores complejos.

Por ejemplo, analicemos los casos de terminación más simples:

- | | | | |
|--------------------------|----------------|---------------|--------------------------------|
| a) línea adaptada | $Z_L = Z_0$ | \Rightarrow | $Z(z) = Z_0$ |
| b) línea cortocircuitada | $Z_L = 0$ | \Rightarrow | $Z(z) = -i Z_0 \tan(\gamma z)$ |
| c) línea abierta | $Z_L = \infty$ | \Rightarrow | $Z(z) = -i Z_0 \cot(\gamma z)$ |

Se observa que si la línea no tiene pérdidas (Z_0 y γ reales), la impedancia de onda resulta imaginaria pura.

En algunas circunstancias, especialmente cuando se trabaja con conexiones en paralelo, es conveniente trabajar con admitancias. Por ejemplo, es fácil demostrar que:

$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad \Rightarrow \quad \rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L}$$

y la impedancia de onda puede escribirse:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \operatorname{sen}(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \operatorname{sen}(\gamma z)} = \frac{1}{Y_0} \frac{Y_L \cos(\gamma z) - i \frac{1}{Y_0} \operatorname{sen}(\gamma z)}{\frac{1}{Y_0} \cos(\gamma z) - i \frac{1}{Y_L} \operatorname{sen}(\gamma z)} = \frac{1}{Y_0} \frac{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \operatorname{sen}(\gamma z)}{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \operatorname{sen}(\gamma z)}$$

de donde:

$$Y(z) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \operatorname{sen}(\gamma z)}{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \operatorname{sen}(\gamma z)}$$

es la **admitancia de onda** en la línea.

Si la línea tiene una longitud d , la impedancia que se ve a la entrada es la **impedancia de entrada** de la línea:

$$Z_{in} = Z(-d) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma d) + i Z_0 \operatorname{sen}(\gamma d)}{Z_0 \cos(\gamma d) + i Z_L \operatorname{sen}(\gamma d)}$$

y la **admitancia de entrada**:

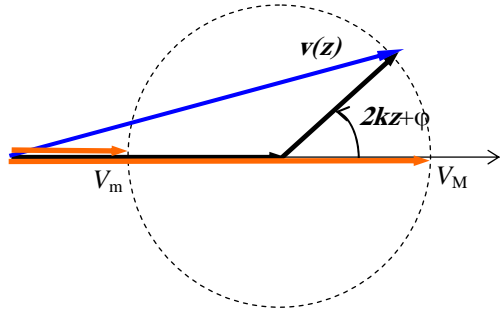
$$Y_{in} = Y(-d) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma d) + i Y_0 \operatorname{sen}(\gamma d)}{Y_0 \cos(\gamma d) + i Y_L \operatorname{sen}(\gamma d)}$$

Por otra parte, vemos que la tensión a lo largo de la línea **ideal** se puede escribir:

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - k z)} [1 + \rho_L e^{i 2 k z}] = V_+ [1 + |\rho_L| e^{i(2 k z + \varphi)}] e^{i(\omega t - k z)}$$

que puede interpretarse como una onda progresiva de tensión cuya amplitud depende de z como:

$$V_+ [1 + |\rho_L| e^{i(2 k z + \varphi)}]$$



Podemos pensar esta amplitud como la suma de dos fasores: uno constante de valor 1 y otro de valor variable con z , de manera que se puede representar gráficamente como en la figura, la suma de un fasor constante y un fasor cuyo ángulo de fase crece con z . Se observa que el fasor suma tendrá un máximo V_M y un mínimo V_m cuando el fasor móvil se halle en fase o en contrafase, respectivamente, del fasor fijo.

$$2k z_M + \varphi = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad V_M = V_+ (1 + |\rho_L|)$$

Estos valores son:

$$2k z_m + \varphi = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad V_m = V_+ (1 - |\rho_L|)$$

Definimos la **relación de onda estacionaria (ROE)**¹² como la relación entre el máximo valor y el mínimo valor de tensión sobre la línea:

$$ROE = \frac{V_M}{V_m} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$$

- En el caso de una onda puramente viajera, $\rho_L = 0 \Rightarrow ROE = 1$
- En el caso de una onda estacionaria pura, $|\rho_L| = 1 \Rightarrow ROE \rightarrow \infty$
- Como en general: $|\rho_L| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq ROE < \infty$

El coeficiente de reflexión y la ROE son parámetros relacionados con la existencia de reflexión de energía en la interfase línea-carga. En muchas situaciones esta reflexión es inconveniente, por lo que la medición y control de estos parámetros es una tarea de mantenimiento de importancia.

Ejemplo 6.8: Calcular la impedancia de entrada de líneas ideales cortocircuitadas o abiertas en el extremo de carga.

Hemos hallado las ondas de tensión y corriente en líneas cortocircuitadas y abiertas:

$$Z_L = 0 \Rightarrow \begin{cases} v(z, t) = V_+ e^{i \omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = 2i V_+ e^{i \omega t} \operatorname{sen}(kz) \\ i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i \omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2 \frac{V_+}{Z_0} e^{i \omega t} \cos(kz) \end{cases}$$

$$Z_L = \infty \Rightarrow \begin{cases} v(z, t) = V_+ e^{i \omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2 V_+ e^{i \omega t} \cos(kz) \\ i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i \omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = -2i \frac{V_+}{Z_0} e^{i \omega t} \operatorname{sen}(kz) \end{cases}$$

Por lo tanto, la impedancia de entrada es ($z = -d$):

$$Z_L = 0 \Rightarrow Z_{in} = \frac{v(-d, t)}{i(-d, t)} = -i Z_0 \tan(kd) \quad Z_L = \infty \Rightarrow Z_{in} = \frac{v(-d, t)}{i(-d, t)} = -i Z_0 \cotan(kd)$$

¹² En literatura inglesa **VSWR** (Voltage Standing Wave Ratio).

Se ve que la impedancia de entrada es puramente reactiva para líneas ideales. Para ciertos puntos (que corresponden a los nodos de la onda de tensión y a los antinodos de la onda de corriente) la impedancia es nula, mientras que para otros (nodos de corriente y antinodos de tensión) la impedancia es infinita. Para posiciones intermedias la impedancia recorre todos los valores intermedios.

De esta manera se pueden simular inductores y capacitores con líneas, lo que en ciertas circunstancias es más conveniente que usar los elementos concentrados normales.

Ejemplo 6.9: Se pueden determinar los parámetros fundamentales (la impedancia característica Z_0 y el número de onda k) de una línea a partir de la medición de la impedancia de entrada para un tramo de longitud d , en condiciones de circuito abierto $Z_{in\ ca}$ y de cortocircuito $Z_{in\ cc}$. Para una línea de 3m de longitud se mide $Z_{in\ ca} = (60.53 + i55.97)\Omega$ y $Z_{in\ cc} = (72.25 + i53.45)\Omega$. Hallar Z_0 y k .

La impedancia de entrada de la línea es: $Z_{in} = Z(-d) = Z_0 \frac{Z_L \cos(kd) + iZ_0 \sin(kd)}{Z_0 \cos(kd) + iZ_L \sin(kd)}$

En circuito abierto: $Z_L \rightarrow \infty \Rightarrow Z_{in\ ca} = -iZ_0 \cotan(kd)$

En cortocircuito: $Z_L = 0 \Rightarrow Z_{in\ cc} = iZ_0 \tan(kd)$

Multiplicando miembro a miembro: $Z_{in\ ca} Z_{in\ cc} = Z_0^2 \Rightarrow Z_0 = \sqrt{Z_{in\ ca} Z_{in\ cc}}$

y dividiendo miembro a miembro: $Z_{in\ cc} / Z_{in\ ca} = -\tan^2(kd) \Rightarrow k = d^{-1} \tan^{-1}(\pm \sqrt{-Z_{in\ cc} / Z_{in\ ca}})$

La impedancia característica resulta: $Z_0 = \sqrt{Z_{in\ ca} Z_{in\ cc}} \approx (66.3 + i54.9)\Omega$

El problema de la última expresión es que la función arcotangente de argumento complejo es multivaluada, de forma que $\tan(\alpha + n\pi) = \tan(\alpha)$ para n entero. Entonces:

$$k = d^{-1} \left[\tan^{-1}(\pm \sqrt{-Z_{in\ cc} / Z_{in\ ca}}) + n\pi \right]$$

Por ejemplo:

\pm	N	$k \text{ (m}^{-1}\text{)}$	\pm	n	$k \text{ (m}^{-1}\text{)}$	\pm	n	$k \text{ (m}^{-1}\text{)}$	\pm	n	$k \text{ (m}^{-1}\text{)}$
+	0	0.37 + i 0.56	+	-1	-0.67 + i 0.56	-	1	0.67 - i 0.56	-	1	0.67 - i 0.56
-	0	-0.37 - i 0.56	+	1	1.42 + i 0.56	-	-1	-1.42 - i 0.56	-	-1	-1.42 - i 0.56

Como $k = \beta - i\alpha$ la parte real debe ser positiva y la parte imaginaria negativa, para que el valor de k calculado sea posible. Se observa que el primer valor que cumple esta propiedad se da para la determinación negativa del doble signo y $n = 1$.

Valores máximo y mínimo de tensión y corriente sobre una línea

Para propósitos de diseño muchas veces es necesario saber cuáles son los valores máximos de tensión y corriente sobre la línea, de manera de no superar los valores admitidos por la construcción de la línea.

La onda de tensión en una línea **ideal** cargada puede escribirse, como hemos visto en la sección precedente:

$$v(z,t) = V_+ e^{i(\omega t - kz)} [1 + \rho_L e^{i2kz}] = V_+ [1 + |\rho_L| e^{i(2kz + \varphi)}] e^{i(\omega t - kz)}$$

y la onda de corriente:

$$i(z,t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - kz)} [1 - \rho_L e^{i2kz}] = \frac{V_+}{Z_0} [1 - |\rho_L| e^{i(2kz + \varphi)}] e^{i(\omega t - kz)}$$

Los extremos de tensión/corriente en la línea tienen las propiedades:

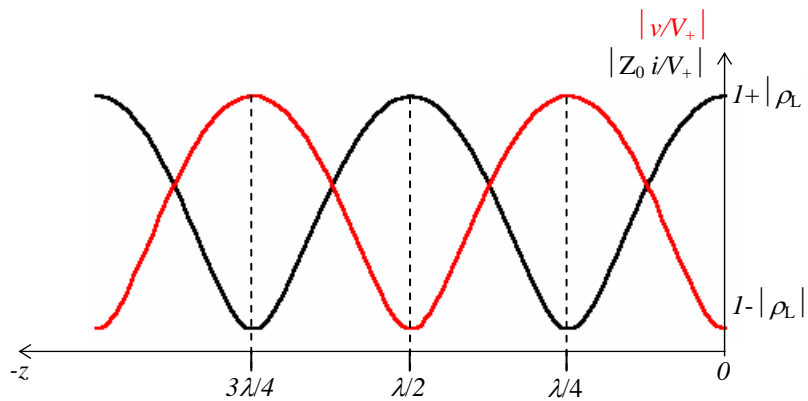
Tensión	Posición	Valor
Máximo	$z_{V_M} = \frac{2n\pi - \varphi}{2k}$	$V_M = V_+ (1 + \rho_L)$
Mínimo	$z_{V_m} = \frac{(2n+1)\pi - \varphi}{2k}$	$V_m = V_+ (1 - \rho_L)$

Corriente	Posición	Valor
Máximo	$z_{I_M} = \frac{(2n+1)\pi - \varphi}{2k}$	$I_M = \frac{V_+}{Z_0} (1 + \rho_L)$
Mínimo	$z_{I_m} = \frac{2n\pi - \varphi}{2k}$	$I_m = \frac{V_+}{Z_0} (1 - \rho_L)$

En la posición en que se da el máximo de tensión se da el mínimo de corriente y viceversa. En estos extremos el fasor $e^{i(2kz+\varphi)}$ pasa por valores reales. La impedancia de onda en estos extremos es:

$$\text{Máximo de tensión: } \begin{cases} V_M = V_+ (1 + |\rho_L|) \\ I_M = \frac{V_+}{Z_0} (1 - |\rho_L|) \end{cases} \Rightarrow Z_M = Z_0 \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = Z_0 ROE$$

$$\text{Mínimo de tensión: } \begin{cases} V_m = V_+ (1 - |\rho_L|) \\ I_m = \frac{V_+}{Z_0} (1 + |\rho_L|) \end{cases} \Rightarrow Z_m = Z_0 \frac{1 - |\rho_L|}{1 + |\rho_L|} = \frac{Z_0}{ROE}$$



y la impedancia de onda adopta todos los valores entre estos dos extremos a lo largo de la línea.

En la figura se muestra los módulos de la tensión y la corriente a lo largo de la línea, que forman **ondas cuasi-estacionarias**. Nótese que estos módulos **no dependen del tiempo**. Las distribuciones se acercan a una onda estacionaria pura cuando $|\rho_L| \rightarrow 1$.

Ejemplo 6.10: Por una línea de $Z_0 = 300 \Omega$, y $v_f = c/3$, con una carga $Z_L = (100 + i 15) \Omega$ viaja una onda de tensión pico $V_+ = 10 V$ y frecuencia $10 MHz$. Hallar los valores de los máximos de tensión, corriente y de impedancia a lo largo de la línea.

El coeficiente de reflexión es: $\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \approx -0.49 + i 0.056 \Rightarrow |\rho_L| \approx 0.5$

Los extremos de tensión son: $V_M = V_+ (1 + |\rho_L|) \approx 15V$
 $V_m = V_+ (1 - |\rho_L|) \approx 5V$

Se ve que el máximo de la onda de tensión es un 50 % mayor que la tensión pico de la onda incidente.

los extremos de corriente: $I_M = V_M / Z_0 \approx 0.05 A = 50 mA$
 $I_m = V_m / Z_0 \approx 0.017 A = 17 mA$

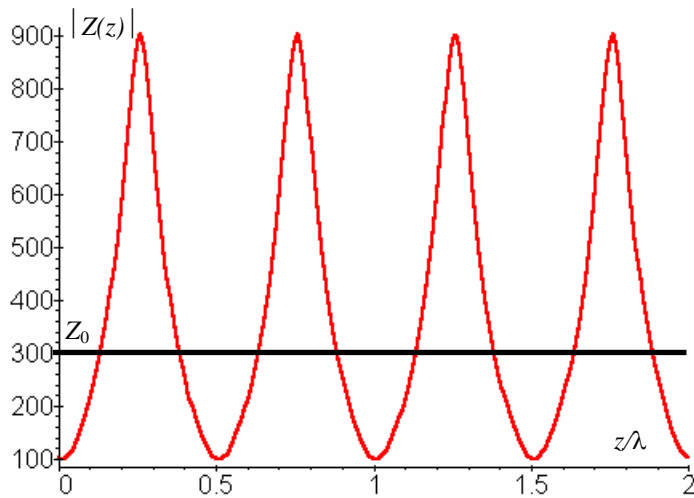
Para comparación calculamos la corriente sobre la carga:

$$i_L = \frac{v_L}{Z_L} = \frac{\tau_L v_+}{Z_L} = \frac{(1 + \rho_L) v_+}{Z_L} \Rightarrow I_L = \left| \frac{1 + \rho_L}{Z_L} \right| V_+ \approx 49.96 mA$$

de donde se observa que la corriente pico es similar a la corriente de carga.

y las impedancias extremas: $Z_M = V_M / I_m \approx 902.53 \Omega$
 $Z_m = V_m / I_M \approx 99.72 \Omega$

también: $ROE = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = 3 \Rightarrow \begin{cases} Z_M = Z_0 ROE = 900\Omega \\ Z_M = Z_0 / ROE = 100\Omega \end{cases}$



Si graficamos la impedancia de onda a lo largo de la línea:

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{i2kz}}{1 - \rho_L e^{i2kz}}$$

con $k = \frac{\omega}{v_f} = \frac{2\pi f}{v_f} \approx 0.628 \text{ rad/m}$

obtenemos la figura de la izquierda donde se observa la variación periódica del módulo de la impedancia de onda, entre los valores mínimo y máximo hallados.

Coefficiente de reflexión generalizado

En las secciones precedentes hemos usado el coeficiente de reflexión definido como la relación entre la tensión reflejada y la tensión incidente, medidas sobre la carga ($z = 0$). Podemos generalizar esta expresión definiendo un coeficiente de reflexión generalizado como la relación entre la onda de tensión reflejada y la incidente, medidas sobre cualquier punto de la línea:

$$\rho(z) = \frac{V_- e^{i\gamma z}}{V_+ e^{-i\gamma z}} = \rho_L e^{i2\gamma z}$$

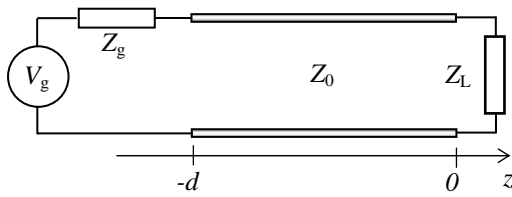
A partir de este coeficiente podemos expresar otros resultados como:

$$Z(z) = Z_0 \frac{e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}}{e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}} = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{i2\gamma z}}{1 - \rho_L e^{i2\gamma z}} \Rightarrow Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}$$

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - kz)} [1 + \rho_L e^{i2kz}] \Rightarrow v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - kz)} [1 + \rho(z)]$$

$$i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - kz)} [1 - \rho_L e^{i2kz}] \Rightarrow i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - kz)} [1 - \rho(z)]$$

Línea con generador y carga



En general, una línea conecta un generador a una carga. En la figura, una línea de impedancia característica Z_0 y longitud d conecta un generador de impedancia Z_g a una carga Z_L .

Las ecuaciones de tensión y corriente sobre la línea son, como en el caso previo:

$$v(z, t) = e^{i\omega t} [V_+ e^{-ikz} + V_- e^{ikz}] = V_+ e^{i\omega t} [e^{-ikz} + \rho_L e^{ikz}]$$

$$i(z, t) = e^{i\omega t} \left[\frac{V_+}{Z_0} e^{-ikz} - \frac{V_-}{Z_0} e^{ikz} \right] = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} [e^{-ikz} - \rho_L e^{ikz}]$$

Estas ecuaciones satisfacen la condición de borde para $z = 0$ (sobre la carga). Falta plantear la condición de borde sobre la entrada:

$$v(-d, t) = V_g e^{i\omega t} - i(-d, t) Z_g = V_+ e^{i\omega t} [e^{ikd} + \rho_L e^{-ikd}]$$

Luego:

$$V_g e^{i\omega t} - \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} [e^{ikd} - \rho_L e^{-ikd}] Z_g = V_+ e^{i\omega t} [e^{ikd} + \rho_L e^{-ikd}]$$

de donde:

$$V_+ = \frac{Z_0}{(Z_g + Z_0) e^{ikd} + \rho_L (Z_0 - Z_g) e^{-ikd}} V_g$$

o también:

$$V_+ = \frac{Z_0(Z_L + Z_0)}{(Z_L + Z_0)(Z_g + Z_0) e^{ikd} + (Z_L - Z_0)(Z_0 - Z_g) e^{-ikd}} V_g$$

Así se conoce la distribución de corrientes y tensiones sobre toda la línea en función de la tensión pico del generador y de las impedancias involucradas.

Ejemplo 6.11: Un tramo de $3m$ de una línea coaxil de impedancia característica $Z_0 = 75 \Omega$ conecta un generador de tensión pico $125 V$, frecuencia $1 MHz$ y resistencia interna 19Ω a una carga RL serie con $R = 150 \Omega$ y $L = 25 \mu Hy$. Calcule la potencia media que se disipa en la carga y los máximos valores de tensión y corriente en la línea y su ubicación.

Para responder es necesario determinar la amplitud de las ondas de tensión y corriente en la línea. Para ello usamos la expresión de V_+ que hallamos en esta sección:

$$V_+ = \frac{Z_0(Z_L + Z_0)}{(Z_L + Z_0)(Z_g + Z_0) e^{ikd} + (Z_L - Z_0)(Z_0 - Z_g) e^{-ikd}} V_g$$

Como: $V_g = 125 V$ $Z_0 = 75 \Omega$ $Z_L = R_L + i X_L = R_L + i \omega L = (150 + i 157) \Omega$
 $Z_g = 19 \Omega$ $d = 3 m$ $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega \eta_0}{c Z_0} = 0.1 m^{-1}$

con estos datos tenemos: $V_+ \approx (69.57 - i20.31)V$

La potencia media que se disipa en la carga es: $\langle P_L \rangle = T \langle P_i \rangle = (1 - |\rho_L|^2) |V_+|^2 / 2Z_0$

con: $\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \approx 0.55 + i0.31 \Rightarrow |\rho_L|^2 \approx 0.4$ de donde: $\langle P_L \rangle = (1 - |\rho_L|^2) \frac{|V_+|^2}{2Z_0} \approx 20.93 W$

Los valores máximos de tensión y de corriente son:

$$|V_{max}| = |V_+| (1 + |\rho_L|) \approx 118.45 V \quad |I_{max}| = |V_+| (1 + |\rho_L|) / Z_0 \approx 1.58 A$$

mientras que las posiciones de los máximos de tensión se dan para:

$$z_{V_m} = \frac{2n\pi - \varphi}{2k} = \frac{\lambda}{2} \left(n - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \text{ con } n \text{ entero y } \varphi \text{ fase del coeficiente de reflexión.}$$

En nuestro caso: $\varphi \approx 0.5159 \text{ (radianes)} \Rightarrow z_n = \frac{c Z_0}{2 \eta_0 f} \left(n - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \approx 29.84 (n - 0.0821) m$

Los máximos de la onda de corriente se dan para:

$$z_m = \frac{\lambda}{4} \left(2m + 1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \approx 14.29 (2m + 0.836) m \quad \text{con } m \text{ entero.}$$

APENDICE 6 – Ondas elementales 1D

Sea una función $f(z, t)$ que cumple la ecuación unidimensional de D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Vamos a utilizar las nuevas variables: $u = z - ct \quad v = z + ct$.

Entonces, calculando la derivada de una función de función:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{porque} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad \text{porque} \quad -\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = c$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) c \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)$$

Entonces la ecuación de D'Alembert se convierte en:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{1}{c^2} c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$$

Integramos sobre v : $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = C_1(u)$

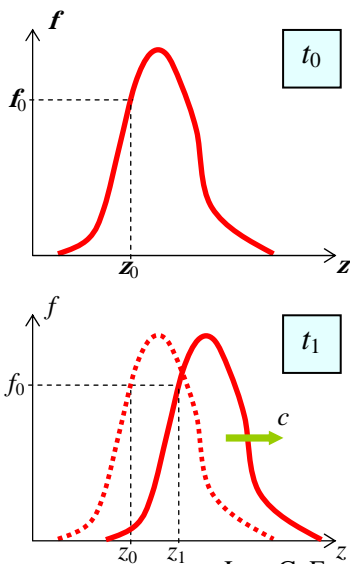
El resultado de la integración es una constante (respecto de v), que en general es entonces una función de u . Si integramos de nuevo:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = C_1(u) \Rightarrow f(u, v) = \int C_1(u) du + f_2(v) = f_1(u) + f_2(v) = f_1(z - ct) + f_2(z + ct)$$

la nueva "constante" de integración depende sólo de v y finalmente queda demostrado que la solución es una superposición de una función de u y una función de v .

Luego: $f(z, t) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f(z, t) = f(z \mp ct)$

Analicemos el comportamiento de la solución $f(z, t) = f(z - ct)$



Como f es una función de dos variables para los gráficos es conveniente tomar "fotos" a t constante. Por ejemplo, para $t = t_0$ se tiene la figura de la izquierda.

Para $z = z_0$ la función vale $f(z_0, t_0) = f_0$.

Si ahora tomamos un instante posterior $t_1 > t_0$, existirá una posición z_1 para la cual se vuelve a tener el mismo valor de la función f_0 . Esto ocurre cuando coinciden los argumentos: $f(z_0, t_0) = f(z_1, t_1) \Rightarrow z_0 - ct_0 = z_1 - ct_1$ de donde: $z_1 = z_0 + c(t_1 - t_0) \Rightarrow z_1 > z_0$.

Este razonamiento se puede hacer para cada posición original z_0 , de manera que se observa que cada punto de la curva original se desplaza a la derecha una cantidad uniforme $c(t_1 - t_0)$.

Esto es equivalente a decir que la función misma se desplaza hacia la derecha con velocidad constante c . Una magnitud física cuya

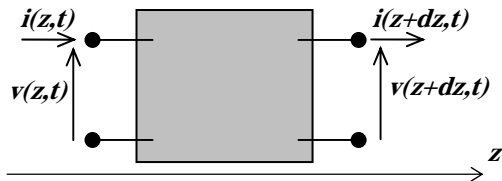
función representativa se “traslada” se denomina una **onda**.

En el caso de la solución $f(z, t) = f(z + ct) = f[z - (-c)t]$ se ve fácilmente que el comportamiento es el mismo que el descrito, pero con una velocidad $(-c)$. Por lo tanto esta solución implica una onda que se propaga en el sentido decreciente de z .

Convencionalmente se denomina onda **progresiva** a la que se propaga en el sentido elegido como positivo o de crecimiento de las posiciones y **regresiva** a la que se propaga en el sentido opuesto.

RESUMEN

- Las líneas de transmisión son guías de onda donde se puede aplicar la aproximación cuasi-estática de parámetros distribuidos. Se modelizan como cuadripolos en cascada de extensión infinitesimal. Las variables significativas son la tensión y corriente a lo largo de la línea.



Las líneas ideales no tienen pérdidas de energía y el cuadripolo exhibe solamente elementos reactivos. Resultan las ecuaciones del telegrafista para tensión y

corriente a lo largo de la línea:

$$\left. \frac{\partial i}{\partial z} \right|_z = -C \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_z \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_z \approx -L \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_z$$

que llevan a las ecuaciones de onda:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

- Estas ecuaciones tienen soluciones ondulatorias:

$$v(z,t) = f(z \mp ct) \quad i(z,t) = v(z,t) / Z_0 \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z_0 = \sqrt{L/C}$$

donde c es la velocidad de propagación de las ondas y Z_0 la impedancia característica de la línea.

- En el caso de las líneas reales se incorporan las pérdidas en los conductores y en el dieléctrico. Esto lleva a ecuaciones de propagación más complicadas:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} - RGv = 0 \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} - RGi = 0$$

En el caso de ondas armónicas es fácil resolver las ecuaciones de ondas. Se obtiene una constante de propagación compleja – que indica la propagación con atenuación – y una impedancia característica compleja:

$$Z = R + i\omega L \quad Y = G + i\omega C \quad \Rightarrow \quad \gamma = \beta + i\alpha = \sqrt{-ZY} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{Z/Y}$$

- La velocidad de propagación de la onda es la velocidad de fase: $v_f = \omega / \beta$

Esta velocidad depende generalmente de la frecuencia, lo que produce el fenómeno de la dispersión, que implica la distorsión de pulsos o paquetes de onda que se propaguen por la línea.

- En la práctica son de interés las líneas de bajas pérdidas: $R \ll \omega L$ y $G \ll \omega C$ donde:

$$\beta \equiv \omega \sqrt{LC} \quad , \quad \alpha \approx \frac{\beta}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \ll \beta \quad \text{y se tiene:}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_0 = Z'_0 + iZ''_0 \quad \text{con:} \quad Z'_0 \equiv \sqrt{\frac{L}{C}} \quad , \quad Z''_0 \approx \frac{Z'_0}{2} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right) \ll Z'_0$$

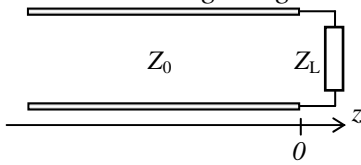
La potencia que viaja por la línea es: $\langle v i \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(v i^*)$

Cuando hay pérdidas la potencia va decreciendo a medida de que se propaga. Se tiene en

db/m:

$$10 \log_{10} \left(\frac{\langle v i \rangle|_z}{\langle v i \rangle|_{z+1}} \right) = 10 \log_{10} (e^{2\alpha}) = 20 \log_{10} (e) \alpha$$

- Una línea cargada generalmente presenta reflexión de ondas. La relación entre las amplitudes de las ondas de tensión reflejada y la transmitida a la carga con la incidente son los coeficientes de reflexión y transmisión:



$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L} \quad \tau_L = \frac{V_L}{V_+} = 1 + \rho_L = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0}$$

y los coeficientes de reflexión y transmisión de potencia:

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = |\rho_L|^2 \quad T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{R_L Z_0}{|Z_L|^2} |\tau_L|^2$$

La reflexión de potencia se expresa normalmente en db mediante el coeficiente de pérdida de retorno: $RL = -10 \log(R) = -20 \log(|\rho_L|)$

- La relación entre tensión y corriente en cualquier punto del circuito es la impedancia de onda o impedancia de campo:

$$Z(z) = \frac{v(z,t)}{i(z,t)} = Z_0 \frac{e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}}{e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}} = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \sin(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \sin(\gamma z)}$$

y también la admitancia de onda o admitancia de campo:

$$Y(z) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \sin(\gamma z)}{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \sin(\gamma z)}$$

- Para líneas de transmisión de energía o información, la reflexión de potencia es habitualmente perjudicial, y está acompañada de sobretensiones y sobrecorrientes en la línea que pueden dañarla. El parámetro que define usualmente la importancia de la reflexión es la relación de onda estacionaria:

$$ROE = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$$

que es la relación entre los valores máximo $V_M = V_+(1 + |\rho_L|)$ y mínimo $V_m = V_+(1 - |\rho_L|)$ de tensión a lo largo de la línea. Los correspondientes valores máximo y mínimo de corriente son:

$$I_M = \frac{V_+}{Z_0} (1 + |\rho_L|) \quad \text{y} \quad I_m = \frac{V_+}{Z_0} (1 - |\rho_L|)$$

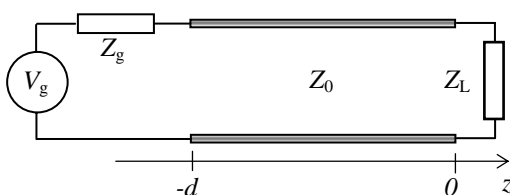
- Definimos el coeficiente de reflexión generalizado, dependiente de la posición como:

$$\rho(z) = \frac{V_- e^{i\gamma z}}{V_+ e^{-i\gamma z}} = \rho_L e^{i2\gamma z}$$

A partir de este coeficiente podemos escribir:

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} \quad v(z,t) = V_+ e^{i(\omega t - kz)} [1 + \rho(z)] \quad i(z,t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - kz)} [1 - \rho(z)]$$

- En una línea conectada a un generador y carga se tienen las dos condiciones de borde (sobre la carga y sobre la entrada) para determinar los coeficientes de las ondas:



$$V_+ = \frac{Z_0(Z_L + Z_0)}{(Z_L + Z_0)(Z_g + Z_0) e^{ikd} + (Z_L - Z_0)(Z_0 - Z_g) e^{-ikd}} V_g$$

$$V_- = \rho V_+$$

PROBLEMAS

- 6.1) Una línea coaxil ideal con conductores de radios $a = 0.5 \text{ mm}$, $b = 0.5 \text{ cm}$ y dieléctrico de $\epsilon_r = 4$ lleva una onda de corriente progresiva de amplitud $I_0 = 0.1 \text{ A}$ y frecuencia 10 MHz . Si la línea está terminada en su impedancia característica, calcular: a) la impedancia característica, b) la velocidad de propagación de las ondas, c) la onda de tensión en cada punto de la línea, d) los campos eléctrico y magnético, e) el valor medio del vector de Poynting y la potencia media transportada por la onda y f) recalculer la potencia media del punto e) a partir de la corriente y la tensión.

[Rta: 69.03Ω , $1.5 \times 10^8 \text{ m/seg}$]

- 6.2) Se carga una línea ideal de impedancia característica $Z_0 = 50 \Omega$ con una impedancia $Z_L = (100 + i100) \Omega$. Calcular ρ en módulo y fase y la relación de onda estacionaria.

[Rta: $0.62 e^{i0.52}$, 4.26]

- 6.3) Una línea con $R = 0.1 \Omega/m$, $G = 0$, $C = 3 \text{ pF/m}$ y $(L/C)^{1/2} = 300 \Omega$ tiene a su entrada una tensión $V_0 = 10 e^{i\omega t} \text{ V}$, $f = 100 \text{ MHz}$. Si la longitud de la línea es 30 m y $Z_L = 100 \Omega$, 300Ω y $(0.4 + i0.5) (L/C)^{1/2}$, hallar la potencia media transmitida en los tres casos.

[Rta: 0.06 W , 0.168 W , 0.054 W]

- 6.4) La relación de onda estacionaria en una línea de transmisión sin pérdidas de 50Ω terminada en una impedancia de carga desconocida es 3.0 . La distancia entre dos mínimos consecutivos del voltaje es 20 cm y el primer mínimo se encuentra a 5 cm de la carga. Determine a) el coeficiente de reflexión y b) la impedancia de carga Z_L .

- 6.5) Una línea de transmisión sin pérdidas de longitud 0.434λ y cuya impedancia característica es de 100Ω está terminada con una impedancia de $(260 + i180) \Omega$. Calcule a) el coeficiente de reflexión, b) la ROE, c) la impedancia de entrada y d) la posición del máximo de voltaje más cercano a la carga.

[Rta: $\rho = 0.6/21.6^\circ$, $S = 4$, $Z_i = (69 + i120) \Omega$, a 0.03λ de la carga]

- 6.6) Considere una línea ideal de impedancia Z_0 y longitud L abierta en los extremos y excitada en forma que la tensión en el centro de la línea es $V(0, t) = V_0 e^{i\omega t}$. a) Calcular las ondas de tensión y corriente en todo punto de la línea. b) Si $L = 3 \text{ m}$ y la velocidad de las ondas en la línea es de $2.7 \times 10^8 \text{ m/s}$, ¿cuáles son las frecuencias permitidas de excitación?

[Rta: $f_n = 90 n \text{ MHz}$; $n = 1, 2, 3, \dots$]

- 6.7) Una línea ideal de $Z_0 = 50 \Omega$, $v_f = c$ y $L = 10 \text{ m}$ está excitada senoidalmente con una frecuencia de 10 MHz y conectada a una carga resistiva $Z_L = 10 \Omega$. a) Hallar la relación de onda estacionaria. b) Calcular el desfase entre tensión y corriente a la entrada de la línea. c) Diseñar un tramo de línea de adaptación (cuarto de onda) sabiendo que en esta $v_f = 0.8 c$. ¿Cuál es la impedancia que ve el generador?.

[Rta: $-64^\circ 18'$, 22.3Ω con 6 m]

- 6.8) Una línea de microcinta tiene un dieléctrico de cuarzo fundido ($\epsilon_r = 3.8$). Calcular ϵ_{eff} , Z_0 y λ a 10 GHz , para: a) $w/h = 4.5$ y b) $w/h = 1.1$.

[Rta: a) $\epsilon_{eff} = 3.18$, $Z_0 = 29.92 \Omega$, $\lambda = 16.8 \text{ mm}$, b) $\epsilon_{eff} = 2.69$, $Z_0 = 73.93 \Omega$, $\lambda = 18.28 \text{ mm}$]

6.9) A 10 GHz una línea de microcinta tiene los siguientes parámetros: $h = 0.8\text{ mm}$, $w = 1\text{ mm}$, $\epsilon_r = 6.6$, $\tan \theta = 10^{-4}$ y $\sigma_c = 5.8 \times 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$. Calcule la atenuación por pérdidas conductoras y por pérdidas dieléctricas.

[Rta: $\alpha_c = 4.2\text{ dB/m}$, $\alpha_d = 0.177\text{ dB/m}$]

6.10) Se desea construir una línea de microcinta de $20\ \Omega$ sobre zafiro ($\epsilon_r = 10$). Calcule el valor requerido de w/h , la permitividad relativa efectiva y la velocidad de las ondas en la línea.