

1 - Ecuaciones de Maxwell

Introducción

En este Capítulo haremos una introducción general a los problemas que se desarrollarán a lo largo del texto. Muchas descripciones serán necesariamente cualitativas ya que los detalles y aplicaciones a la ingeniería serán material de Capítulos posteriores.

El electromagnetismo ha sido la base de la llamada Segunda Revolución Industrial, fundamentalmente en los aspectos de la conversión electromecánica de energía y las comunicaciones. Actualmente las aplicaciones electromagnéticas dominan toda la técnica moderna y la miniaturización y creciente velocidad de los circuitos electrónicos hacen cada vez más necesaria la modelación de estos fenómenos mediante la teoría de campos.

El electromagnetismo es una **teoría de campos**, es decir, las explicaciones y predicciones que provee se basan en magnitudes físicas cuya descripción matemática son campos vectoriales dependientes de la posición en el espacio y del tiempo. La característica vectorial dificulta notablemente la resolución de las ecuaciones que describen el comportamiento, por lo que se trata en la medida de lo posible de simplificar el problema a ecuaciones escalares, y si no es posible, se utilizan sofisticados métodos numéricos que han explotado en número y variedad en los últimos años. Este texto presentará formulaciones analíticas en casos simples que brindan un trasfondo conceptual y modelos simplificados cuando sea posible, y finalmente daremos una breve introducción a los métodos numéricos de mayor uso en bajas y altas frecuencias.

El objetivo es que el lector adquiera la comprensión conceptual de los problemas que deberá enfrentar en aplicaciones de la ingeniería electromagnética así como las herramientas de modelación más adecuadas para las variadas situaciones. Por otra parte, se dará énfasis a las aplicaciones a la ingeniería y, cuando sea el caso, a las normas de diseño y seguridad vigentes en la explotación de sistemas y equipos electromagnéticos.

Una vez analizados los modelos y problemas generales, cada Capítulo siguiente analizará en detalle teoría, modelos y aplicaciones en cada caso particular, desde los casos más sencillos hasta los más elaborados. Esta organización permite profundizar en los temas de mayor interés y pasar por alto temas y aplicaciones que no son prioritarios, y al lector, una vez que ha dominado las ideas fundamentales, estudiar en detalle las aplicaciones de su interés.

Así, una primera parte se ocupa de los campos estáticos y/o de baja frecuencia, que pueden modelarse mediante circuitos de constantes concentradas, una segunda parte presenta teoría y aplicaciones de los sistemas descritos por circuitos de parámetros distribuidos (líneas de transmisión) y una tercera parte presenta los sistemas donde es necesaria la teoría de campos, como la propagación libre y guiada y la generación de ondas electromagnéticas. Finalmente se destina un último Capítulo a problemas de compatibilidad electromagnética y a analizar los posibles riesgos de los campos electromagnéticos sobre la salud humana.

Ecuaciones de Maxwell

Todos los fenómenos electromagnéticos clásicos (no cuánticos) se pueden describir a partir de las **ecuaciones de Maxwell**¹:

$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$	(ley de Gauss eléctrica)
$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$	(ley de Gauss magnética)
$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$	(ley de Faraday)
$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$	(ley de Maxwell-Ampère)

donde generalmente las incógnitas son los campos vectoriales:

- **E**: **campo eléctrico** (V/m),
- **D**: **campo de desplazamiento** (C/m^2),
- **H**: **campo magnético** (A/m) y
- **B**: **campo de inducción magnética** (T).

Estos campos conforman el **campo electromagnético**. Las dos ecuaciones del rotor (Faraday y Maxwell-Ampère) aseguran que hay una **dependencia mutua** entre campos eléctricos y magnéticos **variables en el tiempo**, de manera que en este caso ambos campos están interrelacionados. Sólo en el caso de **campos estáticos** (que no varían en el tiempo) campo eléctrico y magnético son independientes entre sí.

Llamamos **fuentes de campo** a los sistemas físicos que crean campos en el espacio. En el caso electromagnético, **cargas y corrientes eléctricas** crean campo². En las ecuaciones de Maxwell las fuentes de campo son entonces:

- ρ : la **densidad de carga** eléctrica (C/m^3) y
- \mathbf{j} : la **densidad de corriente** (A/m^2).

En nuestra descripción consideramos a cargas y corrientes como funciones continuas de la posición. Sin embargo, se conoce que la carga eléctrica se presenta en unidades elementales (a las energías de interés en las aplicaciones tecnológicas actuales) cuyo valor es la carga del electrón:

$$e \approx 1.602 \times 10^{-19} C$$

Esta estructura granular de la carga eléctrica no admitiría la descripción de su distribución como una función continua de la posición, pero la extrema pequeñez de los portadores elementales de carga, en relación al tamaño de los objetos de interés tecnológico, permite usar funciones continuas entendidas como un promedio sobre un gran número de entes discretos, en volúmenes pequeños frente al tamaño de esos objetos, pero grandes en relación al tamaño de los portadores de carga elementales. Podemos escribir entonces:

$\rho(\mathbf{r}, t) = N(\mathbf{r}, t)e$ donde $N(\mathbf{r}, t)$ es el número de portadores elementales de carga por unidad de volumen.

El mismo razonamiento se aplica a las funciones continuas que describen la distribución de corrientes, que son en última instancia grupos de cargas elementales en movimiento.

Todas las cantidades que intervienen en las ecuaciones de Maxwell se describen, entonces y en general, como funciones de la posición espacial y del tiempo.

¹ En el Apéndice 1 se presenta un resumen de los operadores vectoriales usados en las ecuaciones de Maxwell.

² Hay otras fuentes de campo electromagnético que no se describen en las ecuaciones de Maxwell ya que dependen de fenómenos no electromagnéticos "puros", como baterías, pilas solares, etc.

Este es un conjunto de **ecuaciones diferenciales vectoriales lineales acopladas inhomogéneas**. En general su resolución es bastante difícil, por lo que gran parte de nuestra presentación se dedicará a presentar modelos simplificados que permitan soluciones sencillas.

Una primera propiedad que se deduce de las ecuaciones de Maxwell es que las fuentes de campo (cargas y corrientes) están generalmente ligadas entre sí.

Si tomamos la divergencia de la ley de Maxwell-Ampère obtenemos:

$$\nabla \cdot \left[\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)$$

Pero la divergencia de un rotor siempre es cero, con lo que queda: $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)$

La expresión del segundo miembro dice que hay que realizar primero la derivada temporal de \mathbf{D} y luego las derivadas espaciales. Pero como el tiempo y las variables espaciales son independientes entre sí se puede cambiar el orden de la derivación:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t))$$

Usamos ahora la ley de Gauss eléctrica para escribir: $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho(\mathbf{r}, t))$

de donde finalmente nos queda la llamada **ecuación de continuidad**: $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0$

Esta ecuación indica que las fuentes de campo (cargas y corrientes eléctricas) están interrelacionadas en el caso dependiente del tiempo. Como veremos en el Capítulo de corrientes eléctricas, esta ecuación representa el principio de conservación de la carga eléctrica.

Soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Potenciales retardados

En el vacío es posible hallar una solución general de las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales electrodinámicos o **potenciales retardados** vectorial \mathbf{A} y escalar Φ^3 , que se pueden deducir de las ecuaciones de Maxwell:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Estos potenciales no son independientes entre sí⁴, sino que están relacionados por la llamada **condición de Lorentz**:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Con la introducción de los potenciales electrodinámicos, las ecuaciones de Maxwell llevan a las siguientes ecuaciones de onda vectoriales inhomogéneas:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

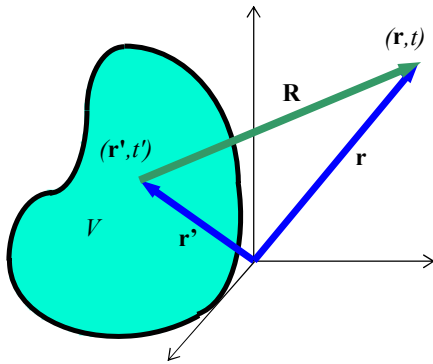
donde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Estas ecuaciones tienen las soluciones particulares:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} dV'$$

La figura ilustra el significado de los símbolos. Los campos se miden u observan en el **punto campo**, definido por sus coordenadas espacio-temporales (\mathbf{r}, t) , mientras que las integrales se

³ Capítulo 10.

⁴ Esta relación surge de la relación entre las fuentes de campo, que se explicita en la ecuación de continuidad.



realizan sobre los **puntos fuentes**, de coordenadas (\mathbf{r}', t') . Se usa esta doble notación porque el denominador de los integrandos usa la distancia entre punto fuente y punto campo $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

La particularidad fundamental de estas expresiones es que el tiempo en el punto fuente y el tiempo en el punto campo **no son iguales**: $t' = t - R/c$. Por lo tanto, las variaciones en la fuente en el instante t' se reflejan en un instante **posterior** t en el campo observado. Hay un **retardo entre causa y efecto**, por lo que estos potenciales se llaman **potenciales retardados**. Este retardo se explica por el prin-

cipio de que existe una velocidad máxima de propagación de las interacciones (**principio de relatividad**), que es la velocidad de la luz en el vacío. El intervalo $\Delta t = R/c$ es el tiempo que tarda la interacción en trasladarse desde el punto fuente al punto campo. Maxwell obtuvo este resultado en 1864 y como $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, que es un valor similar al valor medido de la velocidad de la luz en el vacío, formuló la tesis que la luz era un fenómeno electromagnético, tesis recién corroborada experimentalmente por Hertz en 1887.

El retardo de tiempo entre la señal fuente y el campo producido es un hecho fundamental en la modelación de los fenómenos de radiación, como se muestra en el Capítulo 10.

El modelo de campo presentado en esta sección es el modelo más general, aplicable a todas las situaciones⁵, aunque en situaciones prácticas sólo es posible obtener las soluciones mediante métodos numéricos.

Punto fuente y punto campo

La notación de **punto fuente** (posición donde hay fuente de campo - variables primadas descritas por el vector posición \mathbf{r}') y **punto campo** (posición donde se desea calcular el campo - variables no primadas descritas por el vector posición \mathbf{r}) que introducimos en esta sección es básica en muchos cálculos del electromagnetismo y será usada consecuentemente a lo largo del texto.

Representación en los dominios del tiempo y de la frecuencia

Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell son campos vectoriales cuyas componentes son funciones de la posición y del tiempo. Decimos en este caso que los campos están representados en el **dominio del tiempo**:

En la representación en el **dominio del tiempo** campos y fuentes dependen de la posición y del tiempo: $F = F(\mathbf{r}, t) = F(x, y, z, t)$

donde F es una componente cualquiera de los campos. Debido a que las ecuaciones de Maxwell son lineales, una forma de simplificar su resolución es utilizar la representación en el **dominio de la frecuencia**. En esta técnica se usa la **representación de Fourier**⁶ (**transformada de Fourier**) de las componentes de los campos:

$$F(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow \mathfrak{F}(\mathbf{r}, \omega) \Rightarrow F(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

⁵ Eventualmente en medios donde los parámetros dependen de la frecuencia se desarrolla la función temporal fuente en una integral de Fourier y se calculan los campos para cada armónica, como se describe en la siguiente sección.

⁶ En el Apéndice 1 se presenta un breve resumen sobre sistemas lineales y la representación de Fourier.

(salvo un factor de normalización). Se ve fácilmente que:

$$F(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow \mathfrak{F}(\mathbf{r}, \omega) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} \Leftrightarrow i\omega \mathfrak{F}(\mathbf{r}, \omega)$$

y las ecuaciones de Maxwell quedan:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \rho(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)\end{aligned}$$

donde todos los campos son las transformadas de los campos electromagnéticos. Como el contexto evita habitualmente confusiones, usamos la misma notación para el campo en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

Parámetros dependientes de la frecuencia

En la representación en el dominio de la frecuencia es posible establecer otras relaciones entre los campos que simplifican la resolución. Estas relaciones se denominan leyes o **relaciones constitutivas** y dependen del medio en el que se desarrollan los fenómenos y de la **frecuencia**:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_{\omega} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) & \varepsilon &: \text{permitividad (dieléctrica)} \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) &= \sigma_{\omega} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) & \sigma &: \text{conductividad} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= \mu_{\omega} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) & \mu &: \text{permeabilidad (magnética)}\end{aligned}$$

En general estos parámetros son **tensores** (matrices) que relaciones dos campos vectoriales, dependientes de la posición en medios inhomogéneos y de la dirección en el espacio para medios anisótropos. En este texto analizaremos fundamentalmente **medios isótropos** y que se pueden dividir en regiones macroscópicas donde las propiedades son **homogéneas**. En estos casos los parámetros materiales se reducen a escalares funciones de la frecuencia⁷.

Un caso particular importante es el medio **vacío** (el aire puede considerarse como vacío, desde el punto de vista electromagnético) donde los parámetros constitutivos son constantes:

$$\varepsilon_{\omega} = \varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad \mu_{\omega} = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hy/m} \quad \sigma_{\omega} = 0$$

lo que simplifica aún más la resolución de las ecuaciones de Maxwell.

Con estas relaciones, y si se conocen las fuentes, las ecuaciones de Maxwell tienen dos incógnitas: el campo **E** y el campo **H**. Las aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell pueden clasificarse en dos tipos:

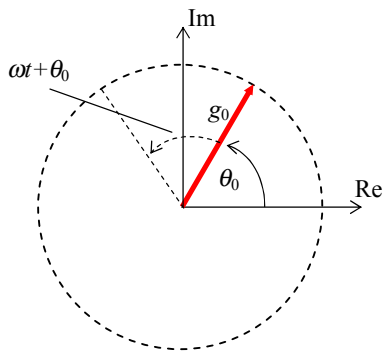
- dadas las fuentes, hallar los campos (**problema directo**);
- dados los campos, hallar las fuentes (**problema inverso**).

Los problemas directos son los más comunes y sencillos para resolver, y surgen en todo tipo de situaciones tecnológicas.

Los problemas inversos ocurren en situaciones donde se desea hallar la fuente de perturbaciones y son habitualmente mucho más difíciles que los problemas directos.

⁷ Analizamos algunos modelos sencillos de la respuesta de medios materiales a los campos electromagnéticos en el Capítulo 8, modelos que llevan a parámetros dependientes de la frecuencia.

Fasores



La integral de Fourier representa la superposición o adición de un número indefinido de funciones **armónicas** elementales $\mathfrak{S}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}$. Para distintos valores de ω estas funciones son independientes y ortogonales, porque forman un conjunto base (ver el Apéndice 1). Cada uno de estos términos es en general una cantidad compleja, pero su suma debe ser real porque lo es la función original.

Por la linealidad de las ecuaciones de Maxwell y de la mayoría de las operaciones realizadas sobre los campos⁸ es posible escribir, para la aplicación de un operador lineal a la función en el dominio del tiempo:

$$\mathcal{E}[F(\mathbf{r}, t)] = \mathcal{E} \int_0^{\infty} \mathfrak{S}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} \mathcal{E}[\mathfrak{S}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}] d\omega$$

de donde vemos que:

la aplicación de un operador lineal a la función en el dominio del tiempo equivale a la superposición de la aplicación del operador a las armónicas de la representación.

En el caso de una operación lineal, la representación de Fourier nos permite trabajar con cada armónica de la representación por separado y al final recomponer por superposición el resultado, lo que habitualmente simplifica notablemente los cálculos.

Esto lleva a que el análisis de las propiedades de las señales armónicas sea de interés y será el tipo de señales que usaremos en el texto con mayor frecuencia.

En la electrotecnia se denomina **fasores** a las funciones armónicas, porque se las puede pensar como un cantidad cuya fase varía en el tiempo. Por ejemplo: $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \theta_0)$ representa un fasor de amplitud g_0 y fase inicial θ_0 .

Podemos pensar que el fasor se mueve en un plano complejo, de modo que las proyecciones sobre el eje real y el eje imaginario son, respectivamente:

$$\mathfrak{g}(t) = g_0 e^{i(\omega t + \theta_0)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}[\mathfrak{g}(t)] = g_0 \cos(\omega t + \theta_0) \\ \text{Im}[\mathfrak{g}(t)] = g_0 \text{sen}(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

Luego se ve que: $g(t) = \text{Re}[\mathfrak{g}(t)]$.

En muchas aplicaciones de los fasores se deben aplicar sobre ellos operadores **lineales**. Como para dos complejos cualesquiera, $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2)$ se puede operar con los fasores y tomar la parte real para reconstruir las funciones físicamente significativas al final de la operación. Como los fasores tiene exponenciales complejas, es más fácil generalmente trabajar con

La suma algebraica, la derivación y la integración son operaciones lineales y en ellas se pueden usar fasores. El producto de dos funciones no es una operación lineal, y por lo tanto se debe trabajar desde el principio con la forma real de las funciones.

ellas que con las operaciones trigonométricas asociadas a las funciones originales. Sin embargo:

Promedio temporal

En muchas ocasiones la cantidad físicamente significativa es el **promedio temporal** o **valor**

⁸ Existe la muy importante excepción de los cálculos que involucran potencia y energía, que son productos de campos y por lo tanto operaciones no lineales.

medio de las magnitudes en estudio:

- Si $f(t)$ es una función **periódica** de periodo T , definimos el valor medio como:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- Si $f(t)$ es una función **no periódica**, definimos el valor medio como:

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Se puede demostrar que, para dos funciones **armónicas de igual frecuencia** representadas por fasores: $f(t) = \text{Re}\{f_0 e^{i\omega t}\}$ y $g(t) = \text{Re}\{g_0 e^{i\omega t}\}$ el promedio temporal es:

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt = \frac{1}{4} [f_0 g_0^* + f_0^* g_0] = \frac{1}{2} \text{Re}\{f_0 g_0^*\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{f_0^* g_0\}$$

Para demostrar esta propiedad consideremos dos funciones armónicas de igual frecuencia:

$$f(t) = \text{Re}\{f_0 e^{i\omega t}\} \text{ y } g(t) = \text{Re}\{g_0 e^{i\omega t}\}$$

que expresamos por los fasores $\tilde{f}(t) = \tilde{f}_0 e^{i\omega t}$ y $\tilde{g}(t) = \tilde{g}_0 e^{i\omega t}$, respectivamente, donde sobreentendemos que se debe tomar la parte real. Las cantidades \tilde{f}_0 y \tilde{g}_0 son generalmente complejas a fin de introducir un eventual ángulo de fase inicial.

Queremos calcular el valor medio temporal del producto $f(t)g(t)$, que es:

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt \quad \text{con } T = 2\pi / \omega$$

Podemos escribir la parte real de los fasores como: $f(t) = \text{Re}\{f_0 e^{i\omega t}\} = \frac{1}{2} [f_0 e^{i\omega t} + f_0^* e^{-i\omega t}]$

Luego: $\langle fg \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt = \frac{1}{4T} \int_0^T [f_0 e^{i\omega t} + f_0^* e^{-i\omega t}] [g_0 e^{i\omega t} + g_0^* e^{-i\omega t}] dt$

y tenemos: $\langle fg \rangle = \frac{1}{4T} \int_0^T [f_0 g_0 e^{i2\omega t} + f_0 g_0^* + f_0^* g_0 + f_0^* g_0^* e^{-i2\omega t}] dt$

Las integrales que tienen los factores exponenciales tienen valor medio cero, y entonces:

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{4} [f_0 g_0^* + f_0^* g_0] = \frac{1}{2} \text{Re}\{f_0 g_0^*\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{f_0^* g_0\}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 1-1: La tensión sobre una carga tiene una dependencia temporal:

$V(t) = V_0 \cos(2\pi t / T)$ con t en s. a) Calcular el valor medio de la tensión sobre la carga. b) Calcular el valor medio de la potencia disipada en la carga.

a) Para calcular el valor medio de la tensión dato usamos su definición:

$$\langle V \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_0 \cos(2\pi t / T) dt = 0$$

ya que la integral del coseno sobre un periodo completo es cero.

b) La potencia instantánea disipada en la carga es: $P(t) = \frac{V^2(t)}{R} = \frac{V_0^2}{R} \cos^2(2\pi t / T)$

Y la potencia media puede calcularse mediante definición o usando la notación fasorial. Por definición:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{R} \cos^2(2\pi t / T) dt = \frac{V_0^2}{RT} \int_0^T \cos^2(2\pi t / T) dt$$

Si hacemos el cambio de variables: $u = 2\pi t / T \Rightarrow du = 2\pi dt / T$

$$\text{nos queda: } \langle P \rangle = \frac{V_0^2}{RT} \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(u) du = \frac{V_0^2}{2\pi R} \pi = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{V_{ef}^2}{R}$$

donde hemos definido la tensión eficaz: $V_{ef} = V_0 / \sqrt{2}$

Para usar la notación fasorial, escribimos la tensión en forma fasorial:

$$V(t) = \Re\{V_0 e^{i2\pi ft}\} = V_0 e^{i2\pi ft}$$

donde sobreentendemos que debe tomarse la parte real. Usando esta notación podemos escribir:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2R} \Re\{V V^*\} = \frac{1}{2R} \Re\{V_0 e^{i2\pi ft} V_0^* e^{-i2\pi ft}\} = \frac{1}{2R} \Re\{V_0^2\} = \frac{V_0^2}{2R}$$

ya que V_0 es real. Se ve que obtenemos el mismo valor que antes, como debe ser.

Entornos de modelación en el dominio de la frecuencia

Las ecuaciones de Maxwell y sus soluciones generales permiten describir cualquier problema electromagnético, pero la resolución práctica de estas soluciones es difícil y habitualmente no es posible obtener soluciones analíticas.

Por otra parte, el mismo nivel de generalidad de este análisis esconde a veces las características fundamentales de los fenómenos que son las que habitualmente importan desde el punto de vista del análisis y diseño en la ingeniería. Por ello se introducen, cuando es posible, modelos que lleven a simplificar el tratamiento matemático y a enfatizar las propiedades esenciales del comportamiento del fenómeno en estudio.

La modelación en el dominio de la frecuencia es la técnica más usada por su sencillez conceptual y matemática. El comportamiento de los sistemas en distintas frecuencias lleva a los paradigmas usuales en la ingeniería eléctrica. Siempre debe tenerse en cuenta que el modelado en el dominio de la frecuencia describe el **comportamiento dominante** en un cierto ancho de banda, pero tal modelo no es universal y puede ser inaplicable si cambia la frecuencia de los fenómenos o se generan fenómenos no deseados por interferencia o inexactitudes del diseño.

Por ejemplo, un circuito cuyo objetivo es amplificar señales de audio se diseñará aplicando el modelo circuital cuasi-estacionario que describimos más abajo, pero la eventual presencia de oscilaciones de alta frecuencia por caminos de realimentación no puede describirse mediante este modelo.

Veremos a lo largo del texto tres entornos de modelado fundamentales de los fenómenos electromagnéticos: el modelo o entorno cuasi-estático (bajas frecuencias), que puede describirse modelando al sistema mediante un circuito de parámetros concentrados, el modelo de parámetros distribuidos y finalmente el modelo de campos. A continuación describimos las características esenciales de cada modelo.

Caso estático

Consideramos primero como introducción el **caso estático** puro: los campos y sus fuentes **no dependen del tiempo**. Se trata de distribuciones de cargas en reposo⁹ y corrientes **estacionarias** o continuas.

Las ecuaciones de Maxwell se escriben en este caso:

⁹ En reposo en un sistema de referencia inercial.

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

y se ve que los campos eléctrico y magnético están **desacoplados**. La mutua dependencia que surge de las leyes de Faraday y de Maxwell-Ampère sólo opera cuando los campos dependen del tiempo. El campo eléctrico (**electrostático**) depende solamente de la distribución de cargas y el campo magnético (**magnetostático**) depende solamente de la distribución de corrientes (**estacionarias** o continuas). En el caso general estas distribuciones están acopladas entre sí por la ecuación de continuidad, pero en el caso estático no:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

En términos de los potenciales electrodinámicos, los campos se pueden escribir como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

y los potenciales electrodinámicos se convierten en los correspondientes **potenciales estáticos**:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

Obsérvese que toda referencia al tiempo se ha eliminado y ya no existe retardo entre la fuente y el campo. Existe una acción a distancia instantánea. Por otra parte, al estar desvinculadas las distribuciones de cargas y corrientes, estos potenciales estáticos son independientes, como lo son los campos entre sí.

De estas ecuaciones surgen las propiedades de los circuitos eléctricos elementales de corriente continua, como veremos en el Capítulo 2.

Modelo cuasi-estático o cuasi-estacionario

La teoría de circuitos es sencilla, fácil de visualizar y ha sido durante años el paradigma básico del análisis de los equipos electrónicos. **Pero sólo es rigurosamente válida para frecuencia cero** (fenómenos estáticos o estacionarios). Para fenómenos variables en el tiempo se requiere el análisis de campos con los potenciales retardados, las corrientes dejan de ser estacionarias, y las reglas de Kirchhoff dejan de cumplirse. Sin embargo, podemos pensar que para **frecuencias muy bajas** el comportamiento de los sistemas no debe diferir demasiado del comportamiento a corriente continua, y que el pasaje de los fenómenos circuitales puros a los fenómenos de radiación debe ser gradual y paulatino a medida que aumenta la frecuencia.

Este razonamiento nos lleva a analizar el **caso cuasi-estático** o **cuasi-estacionario**, donde la frecuencia es tan baja que podemos aproximar las ecuaciones de Maxwell a su formato estático/estacionario, **pero conservando la dependencia temporal**:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad \nabla \cdot \mathbf{j} \approx 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R} dV'$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{R} dV'$$

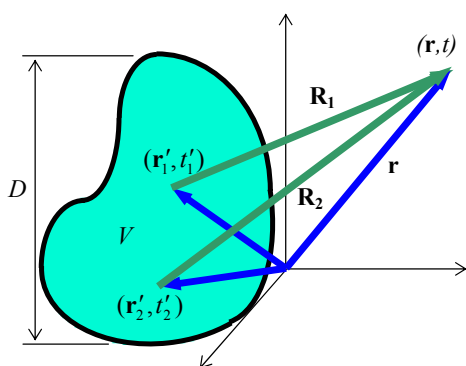
Obsérvese que ha desaparecido la distinción entre tiempo fuente y tiempo campo, es decir que en la aproximación cuasi-estática los efectos son **instantáneos**, como en el caso estático.

Como las ecuaciones que dan lugar a la teoría de circuitos se mantienen en esta aproximación,

sigue siendo válidas las reglas de Kirchoff, aunque ahora los elementos de circuito incorporan reactancias. Este es el modelo de los **circuitos de parámetros concentrados**, que introducimos en el Capítulo 5.

La aproximación cuasi-estática es válida para bajas frecuencias, pero ¿cuán baja debe ser la frecuencia para que esta aproximación sea válida?

La clave para responder esta pregunta reside en analizar la validez del uso de potenciales electrodinámicos cuasi-estáticos. Veamos el potencial escalar para variaciones armónicas de la fuente de frecuencia $f = \omega/2\pi$.



$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \quad t' = t - R/c \quad \text{con:}$$

$$\rho(\mathbf{r}', t') = \rho_s(\mathbf{r}') e^{i\omega t'} = \rho_s(\mathbf{r}') e^{i\omega t} e^{-i\omega R/c}$$

$$\text{Entonces: } \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_s(\mathbf{r}') e^{-ikR}}{R} dV' \quad \text{con } k = \omega/c$$

Para pasar a la descripción cuasi-estática se debería eliminar el retardo $\Delta t = R/c$ o lo que es lo mismo, el factor e^{-ikR} . Una posible situación donde esto ocurre es cuando el punto de observación (el punto campo) se halla muy cerca del recinto de integración, con lo que R

es pequeño. Sin embargo, aún en este caso el retardo será diferente para distintos puntos fuente.

Se ve en la figura que:

$$\Delta t_1 = R_1/c \neq \Delta t_2 = R_2/c$$

Esta diferencia de retardo se traduce en una diferencia de fase $k|R_1 - R_2|$, que, en general, producirá interferencia. En el caso estático no hay retardo ni interferencia.

Esta interferencia se vuelve despreciable cuando la separación entre los puntos fuente más alejados es suficientemente pequeña para que $k|R_1 - R_2| \ll 2\pi$. Sea D la máxima dimensión de la fuente. Como para una señal armónica de frecuencia angular ω :

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k|R_1 - R_2| \leq kD = 2\pi \frac{D}{\lambda}$$

y entonces:

$$k|R_1 - R_2| \ll 2\pi \Rightarrow D/\lambda \ll 1$$

Esta es la condición para que el defasaje introducido por la posición relativa de los puntos fuente no genere interferencias en el punto campo, y todo ocurre como si la velocidad de propagación de las interacciones fuera infinita.

Concluimos que es posible aplicar la aproximación cuasi-estática cuando la máxima dimensión de la fuente de campo es muy pequeña frente a la longitud de onda de los campos emitidos.

¿Qué sucede cuando tenemos una señal no armónica? En este caso descomponemos la señal por Fourier y aplicamos la condición que acabamos de hallar en el peor caso: la mínima longitud de onda (máxima frecuencia) significativa del espectro. Si la condición de cuasi-estaticidad se cumple para esa armónica se cumplirá también para toda otra armónica del espectro. En resumen:

Es posible aplicar la aproximación cuasi-estática o cuasi-estacionaria de las ecuaciones del electromagnetismo cuando la mínima longitud de onda significativa del espectro de Fourier de los campos involucrados (que en medios lineales es el espectro de Fourier de la fuente de campo), es muy grande frente a las dimensiones de la fuente:

$$\lambda_{\min} \gg D$$

¿Cuánto es muy grande? La respuesta depende de la precisión que se desee para el análisis. En la práctica se toma habitualmente $\lambda_{\min} \geq 10D$ como valor testigo.

Tres entornos

El estudio precedente de la validez de la aproximación cuasi-estática define tres entornos de modelación diferentes en el dominio de la frecuencia:

- Las tres dimensiones del sistema fuente de campo son pequeñas frente a la mínima longitud de onda del espectro de Fourier de la fuente. Este es el caso de la aproximación cuasi-estática. Vale la teoría de circuitos y se modela el sistema mediante elementos de **parámetros concentrados** (resistores, capacitores, inductores, etc.).
- Dos de las tres dimensiones del sistema fuente de campo son pequeñas frente a la mínima longitud de onda del espectro de Fourier de la fuente. En este caso se modela al sistema como una cascada de elementos de longitud infinitesimal a lo largo de la dimensión que no cumple la condición cuasi-estática. Como cada elemento infinitesimal de la cascada cumple esta condición, se lo modela mediante un circuito equivalente. Se tiene entonces un modelo de **parámetros distribuidos**. El caso típico es el de las líneas de transmisión.
- Al menos dos de las tres dimensiones no cumplen la condición cuasi-estática. Se requiere usar el **modelo de campo** en toda su generalidad. Esto ocurre por ejemplo en antenas y circuitos de microondas.

A lo largo del texto analizaremos los modelos utilizados en estos tres entornos en el dominio de la frecuencia.

Apéndice 1 - Sistema Internacional de Unidades

Introducción matemática

Sistema Internacional de Unidades

Para el estudio científico o el desarrollo de tecnologías, se separa del universo el grupo de objetos de interés. Este grupo constituye un **sistema físico**, y el resto del universo se considera el **ambiente** o **medio ambiente** en que el sistema en estudio se encuentra. En el **análisis** del sistema se desea hallar una descripción del comportamiento del sistema y/o de sus interacciones con el ambiente. En la **síntesis** de un sistema se desea diseñar tal sistema de manera que, por sí mismo y/o en interacción con su medio ambiente produzca una serie de respuestas a determinados estímulos.

Para describir estas respuestas se utilizan las **magnitudes físicas** del sistema.

Una **magnitud física** define una dada característica observable de un sistema físico. Son magnitudes físicas la longitud, la velocidad, la fuerza, el campo eléctrico, etc.

A cada magnitud le corresponde una **unidad** de medida, de manera de poder expresar cuantitativamente su valor en una medición o cálculo referido a un sistema físico. Un **sistema de unidades** es el conjunto de unidades asignadas a cada magnitud básica o derivada que se use en la ciencia o la técnica.

La normalización internacional de pesos y medidas se halla bajo el control de la Conferencia General de Pesos y Medidas. Las conferencias se realizan en la actualidad cada cuatro años. La Conferencia designa el Comité Internacional de Pesos y Medidas, formado por 18 miembros de países diferentes, se reúne cada año y controla la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (**Bureau International des Poids et Mesures - BIPM**), que es el organismo encargado de asegurar la unificación mundial de las mediciones físicas. El BIPM se creó en 1875 con la adhesión de 17 estados. Actualmente (1997) 47 estados, entre ellos la Argentina, adhieren al sistema. Debido a la creciente complejidad de la definición, control y adecuación de los patrones de medida a los avances científicos, la Conferencia ha creado Comités Consultivos (nueve, en la actualidad) sobre diferentes aspectos metrológicos y desde 1965 publica una revista científica propia, llamada Metrología, además de las publicaciones realizadas por sus expertos en distintas revistas científicas internacionales y los distintos informes de sus cuerpos consultivos y laboratorios propios.

En 1960 la Conferencia General de Pesos y Medidas adoptó el llamado **Sistema Internacional de Unidades (SI)** que fue adoptado luego por cada país adherente con particularidades propias. En la Argentina se adoptó el SI con la denominación **SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino)** en el año 1972, por ley 19511, agregando algunas unidades derivadas de uso habitual en el país. Debe notarse que las unidades del SIMELA conservan la grafía del SI cuando el original deriva del nombre de una persona (p.ej., debe decirse volt y no voltio, watt y no vatio, etc.).

El **SI** (y el **SIMELA**) tiene unidades básicas (consideradas por convención dimensionalmente independientes) y derivadas (que surgen algebraicamente de combinaciones de las unidades básicas):

Unidades básicas

<i>Magnitud</i>	<i>Unidad</i>	<i>Definición</i>
Longitud	metro (m)	Longitud del camino recorrido por la luz en el vacío en un intervalo de $1/299\,792\,458$ segundos ¹⁰ .
Tiempo	segundo (s)	Duración de $9\,192\,631\,770$ periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo cesio-133 a 0K.
Masa	kilogramo (kg)	Masa del prototipo internacional, un cilindro de platino-iridio conservado por el BIPM en Sévres, Francia. Este es el único artefacto o patrón que define una unidad básica del SI.
Corriente eléctrica	ampere (A)	Corriente eléctrica constante que, si se mantiene en dos conductores rectos paralelos de longitud infinita y despreciable sección circular recta, separados en 1 metro, produciría entre estos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} newtons por unidad de longitud.
Temperatura termodinámica	kelvin (K)	Es la fracción $1/273.16$ de la temperatura termodinámica del punto triple del agua ¹¹ .
Intensidad luminosa	candela (cd)	Es la intensidad luminosa, en una dada dirección, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de $1/683$ watt por esterradián.
Cantidad de sustancia	mol (mol)	Es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como el número de átomos en 0.012 kilogramos de carbono-12.

Nótese que los nombres (no el símbolo, que se da entre paréntesis) de las unidades se escriben en minúsculas.

Unidades derivadas

Las unidades derivadas se obtienen de las básicas mediante combinaciones dadas por leyes científicas. Hay unidades derivadas que tienen nombres especiales (p.ej., la unidad de fuerza newton: $1\text{ N} = 1\text{ Kg.m/s}^2$, la de energía: $1\text{ joule} = 1\text{ N.m} = 1\text{ Kg.m}^2/\text{s}^2$, etc.). Hay otras que no tienen nombres especiales (p.ej., la unidad de aceleración: 1 m/s^2). La legislación sólo da ejemplos de estas unidades, dado que nuevas unidades derivadas pueden agregarse a medida que el uso las hace necesarias y que distintas magnitudes a veces comparten las mismas unidades (p.ej., joule/K corresponde a la magnitud capacidad calorífica y a la magnitud entropía).

La Conferencia realizada en 1960, que creó el SI, incluyó al radián (unidad de ángulo plano) y al esterradián (unidad de ángulo sólido) como una clase separada de unidades, llamadas unidades complementarias. La Conferencia de 1996 eliminó esta categoría de unidades e incluyó al radián y al esterradián dentro de la clase de unidades derivadas, en una subclase especial, llamada de unidades con nombres y símbolos especiales.

Prefijos

Además de las unidades, el SI (y el SIMELA) define los prefijos de múltiplos y submúltiplos de las unidades, y recomienda que estas cantidades se presenten en cifras de 10^3 o 10^{-3} . De esta forma, se prefiere expresar longitudes en m , mm o km y no usar las unidades intermedias, aunque éstas se siguen usando en la práctica.

Los prefijos tabulados son:

<i>Prefijo</i>	<i>Valor</i>	<i>Símbolo</i>		<i>Prefijo</i>	<i>Valor</i>	<i>Símbolo</i>
yotta	10^{24}	Y ¹²		deci	10^{-1}	d
zetta	10^{21}	Z ⁵		centi	10^{-2}	c
exa	10^{18}	E		mili	10^{-3}	m

¹⁰ ¡Esto convierte a la unidad de longitud en una especie de unidad derivada de la de tiempo!...

¹¹ Nótese que el signo de grados (°) no se usa en kelvin. Se define también en el SI la temperatura Celsius como: $t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - T_0$ donde T es la temperatura en kelvin y $T_0 = 273.16$.

¹² No existe en el SIMELA.

peta	10^{15}	P		micro	10^{-6}	μ
tera	10^{12}	T		nano	10^{-9}	n
giga	10^9	G		pico	10^{-12}	p
mega	10^6	M		femto	10^{-15}	f
kilo	10^3	K		atto	10^{-18}	a
hecto	10^2	h				
deca	10^1	da				

Unidades eléctricas

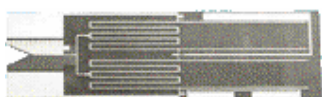
Las unidades eléctricas fundamentales son las unidades de corriente (unidad básica), de carga eléctrica, de diferencia de potencial y fuerza electromotriz, de resistencia, de capacidad, de inductancia y de flujo magnético (unidades derivadas) que se describen en la Resolución 2 de la Conferencia de 1946 de la siguiente manera:

<i>Magnitud</i>	<i>Unidad</i>	<i>Definición</i>
Carga	coulomb	Cantidad de electricidad transportada en 1 segundo por una corriente de 1 ampere.
ddp y fem	volt	Diferencia de potencial entre dos puntos de un alambre conductor que lleva una corriente constante de 1 ampere, cuando la potencia disipada entre estos dos puntos es igual a 1 watt.
Resistencia	ohm	Resistencia eléctrica entre dos puntos de un conductor cuando una ddp constante de 1 volt, aplicada entre estos puntos, produce en el conductor una corriente constante de 1 ampere. El conductor no debe ser el sitio de ninguna fem.
Capacidad	farad	Capacidad de un capacitor entre cuyas placas aparece una ddp de 1 volt cuando se carga con una cantidad de electricidad de 1 coulomb.
Inductancia	henry	Inductancia de un circuito cerrado en el que se produce una fem de 1 volt cuando la corriente eléctrica en el circuito varía uniformemente a razón de 1 ampere por segundo.
Flujo magnético	weber	Flujo magnético que, concatenado por un circuito de una sola vuelta, produciría sobre él una fem de 1 volt si se redujera a cero a velocidad uniforme en 1 segundo.

La realización práctica del ampere (unidad básica) y del volt y del ohm (unidades derivadas) para obtener una buena precisión a partir de sus definiciones es difícil y laboriosa, por lo que diversas Conferencias han recomendado la búsqueda de métodos más precisos y reproducibles. En los últimos años se han desarrollado dos métodos basados en fenómenos cuánticos: el **efecto Josephson** (que da un estándar para el volt) y el **efecto Hall cuántico** (que da un estándar para el ohm). Estos métodos dan mayor reproducibilidad y estabilidad que los métodos tradicionales.

En 1962 Brian Josephson, entonces estudiante de posgrado del Trinity College, Cambridge, Inglaterra, predijo que los electrones pueden agruparse en pares de Cooper para pasar por efecto túnel una barrera aislante delgada (unos pocos *nm*) colocada entre dos superconductores. Si se aplica una corriente alterna de frecuencia *f* a esta juntura Josephson se observa un conjunto de niveles discretos de diferencias de potencial continua entre los dos superconductores de la juntura, proporcionales a la frecuencia de la corriente aplicada: $\Delta V_n = n(h/2e)f = nf/K_J$. Para una corriente de microondas de 10 GHz el salto entre niveles adyacentes es de unos 41.4 μV .

Se ha asignado para propósitos metrológicos en la Conferencia de 1988 el valor a la constante de Josephson $K_J = 2e/h = 483\,597.9 \text{ GHz/V}$. Se pueden crear chips con muchas junturas Josephson conectadas en serie (figura) para producir estándares de 1V y 10V, que se usan actualmente en varios laboratorios metrológicos como estándares primarios de tensión. Se han logrado precisiones de alrededor de 1 parte en 10^{10} .



En 1980 el físico alemán Klaus Von Klitzing descubrió un nuevo fenómeno en el efecto Hall generado por estructuras MOS de AsGa/AlAsGa a bajas temperaturas en altos campos magnéti-

cos. Observó que la ddp de Hall se cuantifica en niveles proporcionales a la corriente que circula. La resistencia de Hall (cociente de la ddp de Hall y la corriente circulante) resulta: $R = (h/e^2)/n = R_K/n$. Debido a la generalización del uso de este efecto para producir patrones de resistencia, la Conferencia de 1988 ha asignado para propósitos metrológicos a la constante de Von Klitzing el valor $R = 25812.807 \Omega$. Este método permite lograr precisiones de alrededor de 1 parte en 10^{10} .

La adopción de estos métodos como definiciones del volt y el ohm modificarían el status de μ_0 de ser una constante con un valor exactamente definido - modificando así la definición del amperre - y produciría unidades eléctricas incompatibles con la definición del kilogramo y las unidades derivadas de él. Sin embargo, para usar estos métodos nuevos se han dado en la Conferencia de 1988 valores convencionales a las constantes de Josephson y von Klitzing que aparecen en los efectos cuánticos en relación al volt y al ohm. En 1991 la Conferencia recomendó continuar la investigación básica en la teoría del efecto Josephson y el efecto Hall cuántico.

El archivo **SI.ZIP**, ubicado en el ftp de la materia, contiene los siguientes documentos:

- **Brochure-si.pdf**. Publicación oficial del BIPM. 7ma. Edición (1998). En francés.
- **Si-supplement2000.pdf**. Publicación oficial del BIPM. En francés e inglés.
- **SP330.PDF**. Publicación del NIST (National Institute of Standards and Technology, USA): Describe el SI. Edición 2001. En inglés.
- **SP811.PDF**. Publicación del NIST. Es una guía de uso. El uso correcto del SI no es trivial y hay un número de reglas para su utilización en publicaciones técnicas o científicas. Edición 1995.

Enlaces a sitios de interés

Bureau International des Poids et Mesures (BIPM):

<http://www.bipm.fr>

National Institute of Standards and Technology (NIST):

<http://physics.nist.gov/cuu/Units>

Depto. de Patrones Nacionales de Medida - INTI:

<http://www.inti.gov.ar/dpnm>

(aquí se puede consultar una traducción al castellano de la séptima edición del original francés (brochure-si.pdf) y de la correspondiente versión en inglés (1998) y del Suplemento 2000, elaboradas por el BIPM. Este documento no incluye la traducción del Anexo 2: Realización Práctica de las Definiciones de las Principales Unidades ni las notas al margen del documento original).

Introducción Matemática

La siguiente introducción no reemplaza a textos especializados. Su objetivo es tener un resumen de conocimientos necesarios empleados en el texto e introducir la notación usada.

Campos escalares y vectoriales. Notación.

Un **campo** es una función que asigna un valor de una propiedad física o matemática a cada punto del espacio.

Si el valor asignado es un **escalar** (un único número - real o complejo) se dice que el campo es escalar (p.ej., el campo de temperaturas en una barra uno de cuyos extremos se halla dentro de una llama: a cada punto de la barra el campo le asigna un número real asociado a la propiedad temperatura).

Si el valor asignado es un **vector** (un ente que tiene magnitud, dirección y sentido - generalmente definido por sus tres componentes en un sistema de referencia) decimos que el campo es vectorial (p.ej., el campo gravitatorio en los alrededores de un planeta, el campo eléctrico generado por un cuerpo conductor cargado, etc.).

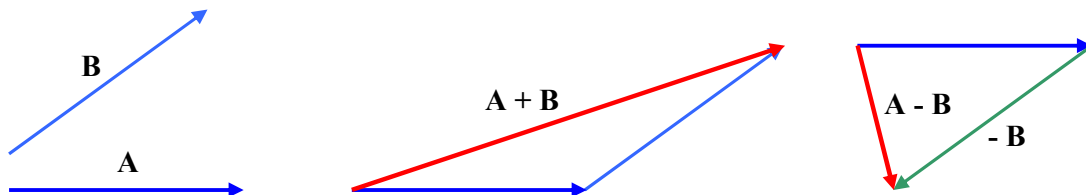
En este texto usaremos una notación para distinguir escalares de vectores. Las cantidades escalares se escribirán en *cursiva*, mientras que las cantidades vectoriales se escribirán en **negrita**. Por ejemplo, el campo de temperaturas en la barra será dado por la función escalar $T(\mathbf{r})$ donde \mathbf{r} es el vector de posición que define la posición de cada punto de la barra respecto de un sistema de coordenadas dado.

Los **versores** (vectores de magnitud unitaria) se distinguen usando un acento circunflejo:

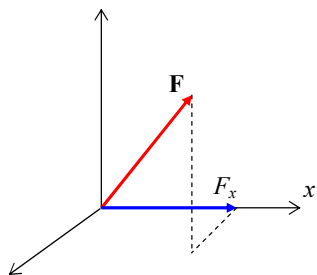
$$\hat{\mathbf{x}} \Rightarrow |\hat{\mathbf{x}}| = 1$$

Operaciones con vectores

Suma algebraica de vectores: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$



La suma algebraica de dos (o más) vectores es otro vector.



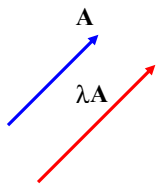
En un sistema de coordenadas dado se puede expresar un vector como la suma de sus **componentes**, que son los vectores proyección sobre cada dirección coordenada. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}$$

La suma algebraica de dos (o más) vectores implica sumar algebraicamente sus componentes homólogas:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x) \hat{\mathbf{x}} + (A_y \pm B_y) \hat{\mathbf{y}} + (A_z \pm B_z) \hat{\mathbf{z}}$$

Multiplicación de un vector por un escalar: $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{A}$.



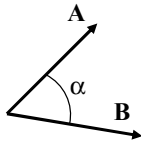
Es otro vector cuya magnitud es λ veces la del vector original: $|\mathbf{C}| = |\lambda \mathbf{A}|$, y se conserva la dirección (el vector resultante es paralelo al vector original). El sentido del vector resultante coincide con el del vector original o cambia según λ sea positivo o negativo.

Producto escalar: $f = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A B \cos \alpha$

donde α es el ángulo formado entre \mathbf{A} y \mathbf{B} . Es un escalar. **Ejemplo: trabajo de una fuerza.**

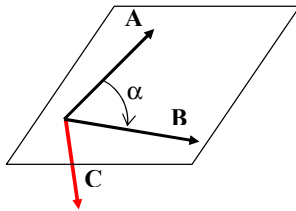
La expresión del producto escalar según las componentes de los vectores es:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



A partir del producto escalar se puede obtener el **ángulo** entre dos vectores:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \right)$$



Producto vectorial: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{C}| = C = A B \sin \alpha$

donde α es el ángulo formado entre \mathbf{A} y \mathbf{B} . El producto vectorial es un vector, cuyo sentido surge de la regla de la mano derecha.

Ejemplo: momento de una fuerza.

La expresión del producto vectorial según las componentes de los vectores es:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$$

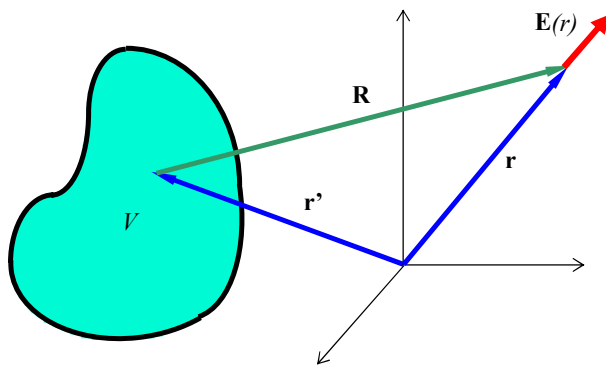
Producto mixto: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ Es un escalar.

Doble producto vectorial: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Es un vector.

Los paréntesis son importantes: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$

Sistemas de referencia o referenciales

La posición de eventos en el espacio se define respecto de un punto fijo llamado **origen de coordenadas**. La definición de un origen de coordenadas y un origen de tiempos¹³ crea un **sistema de referencia** o **referencial**. El **vector posición** es el vector que se dirige desde el origen de coordenadas hasta la posición a definir. La posición de un punto en el espacio respecto a un origen de coordenadas se determina mediante el vector posición. Por las necesidades de la descripción de los campos, es necesario distinguir entre las posiciones de puntos fuente y puntos campo.



El **punto fuente** describe la posición de las fuentes de campo (p.ej., las cargas). Se distingue por **coordenadas primadas**: $\mathbf{r}' = (x', y', z')$

El **punto campo** describe la posición del punto donde se desea calcular el campo. Se distingue por usar **coordenadas no primadas**: $\mathbf{r} = (x, y, z)$

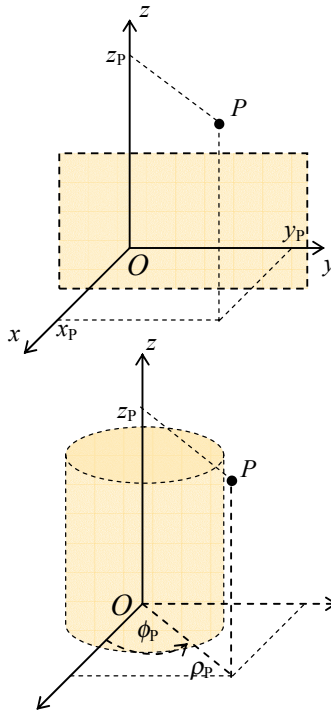
¹³ En este texto consideraremos solamente referenciales inerciales, donde se cumplen las ecuaciones de la mecánica de Newton. Dentro de la perspectiva de las aplicaciones a la ingeniería, consideramos solamente velocidades pequeñas respecto a la velocidad de la luz, por lo que no es necesario usar correcciones relativistas y entonces la posición y el tiempo siguen las reglas de la mecánica de Newton.

Sistemas de coordenadas: cartesiano, cilíndrico y esférico.

Para operar en un sistema de referencia es útil definir coordenadas, que son variables escalares que permiten expresar los campos escalares y vectoriales así como los elementos de arco, superficie y volumen que aparecen en las ecuaciones integrales.

La elección de un **sistema de coordenadas** depende de la **simetría** del problema físico en cuestión. En general se trata de elegir un sistema donde las superficies de potencial y/o campo constante sean superficies de coordenadas constantes. Por ejemplo, en un problema electrostático donde hay un conductor esférico cargado es conveniente usar un sistema de coordenadas esférico centrado en el conductor, ya que la superficie esférica del conductor (que en tal elección de coordenadas es una superficie de coordenada r constante) es una superficie equipotencial. En muchos problemas de ingeniería no existen estas superficies físicas de alta simetría y entonces es necesario recurrir a métodos numéricos. Sin embargo, el estudio de los sistemas de alta simetría brinda un marco conceptual para definir aproximaciones y criterios cualitativos para el análisis preliminar de los problemas.

De los múltiples sistemas de coordenadas que se pueden definir, la práctica ha privilegiado aquellos sistemas llamados de **coordenadas separables**. Estos son sistemas que permiten pasar de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, que surgen de las ecuaciones físicas (en nuestro caso las ecuaciones de Maxwell), a ecuaciones diferenciales a derivadas totales, que son más sencillas de resolver, como veremos en los Capítulos dedicados a la resolución numérica de las ecuaciones del electromagnetismo. Para cada ecuación diferencial a derivadas parciales, hay un número limitado de sistemas donde la ecuación es separable. Por ejemplo, para las ecuaciones de Laplace y Helmholtz, que son las esenciales en el análisis de los problemas electromagnéticos, hay 11 sistemas separables que corresponden a superficies de coordenada constante en la forma de cuádricas confocales¹⁴. De estos sistemas los más conocidos y usados en la práctica de la ingeniería son los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico.



En el **sistema cartesiano** la posición de un punto P en el espacio se describe mediante las proyecciones del vector posición sobre tres ejes rectos mutuamente perpendiculares que se cruzan en el origen de coordenadas¹⁵:

$$P = (x_p, y_p, z_p)$$

Las superficies de coordenada constante son en este caso **planos** normales a la coordenada constante, como el indicado de coordenada x constante.

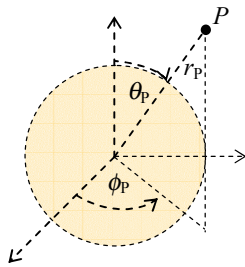
En el **sistema cilíndrico** la posición de un punto P en el espacio se describe mediante las proyecciones del vector posición sobre un eje recto (que habitualmente se asocia al eje z del sistema cartesiano correspondiente) y el plano perpendicular al eje antedicho que pasa por el origen de coordenadas y además por el ángulo formado por la proyección sobre el plano y un eje recto del plano que pasa por el origen de coordenadas (que habitualmente se asocia al eje x del sistema cartesiano correspondiente):

$$P = (z_p, \rho_p, \phi_p)$$

Las superficies de coordenada constante son en este caso **planos** "horizontales" normales a la coordenada z constante, **planos** "verticales" que contienen al eje z para la coordenada ϕ constante y **cilindros** coaxiales de radio variable ρ y eje coincidente con z , como el indicado en la figura.

¹⁴ P.M. Morse y H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", McGraw-Hill Book Co., New York, (1953) p.518.

¹⁵ En la figura se muestra una **terna derecha**, que es la que usaremos a lo largo del texto.

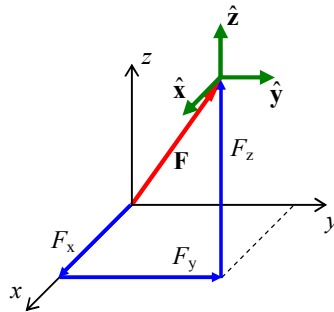


En el **sistema esférico** la posición de un punto P en el espacio se describe mediante el módulo del vector posición y los ángulos que forma con dos ejes perpendiculares que pasan por el origen de coordenadas, que coinciden con los ejes z y x del sistema cartesiano correspondiente.

$$P = (r_p, \theta_p, \phi_p)$$

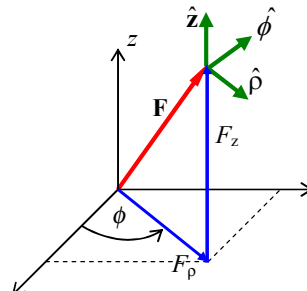
Las superficies de coordenada constante son en este caso **conos** de eje z y cuyo vértice pasa por el origen de coordenadas para θ constante, **planos** "verticales" que contienen al eje z para la coordenada ϕ constante y **esferas** de radio variable r y origen en el origen de coordenadas, como la indicada en la figura.

En un sistema de coordenadas, los vectores se expresan por sus componentes escalares y los versores asociados a cada coordenada: $\mathbf{F} = F_1 \hat{e}_1 + F_2 \hat{e}_2 + F_3 \hat{e}_3$.



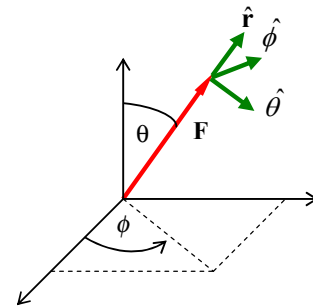
$$\mathbf{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$$

Cartesiano



$$\mathbf{F} = F_\rho \hat{\rho} + F_z \hat{z}$$

Cilíndrico



$$\mathbf{F} = F_r \hat{r}$$

Esférico

En el **sistema cartesiano** los versores son **constantes** (no dependen de la posición). En los sistemas cilíndrico y esférico los versores **sí** dependen de la posición.

La dependencia de los versores con la posición en sistemas de coordenadas distintos del cartesiano debe tenerse en cuenta al integrar una función vectorial.

Veamos las expresiones matemáticas del vector posición y los elementos de arco, superficie y volumen en los tres sistemas coordenados básicos:

Vector posición

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
$\mathbf{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$	$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$	$\mathbf{r} = r \hat{r}$

Elementos de arco, área y volumen

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
$d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
$dS_x = dy dz$	$dS_\rho = \rho d\phi dz$	$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$
$dS_y = dx dz$	$dS_\phi = d\rho dz$	$dS_\theta = r \sin \theta dr d\phi$
$dS_z = dx dy$	$dS_z = \rho d\rho d\phi$	$dS_\phi = r dr d\theta$
$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\phi dz$	$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

El subíndice en los elementos de área representan la coordenada normal a la superficie en consideración.

En el siguiente cuadro se presentan las relaciones entre las coordenadas de los distintos sistemas básicos:

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
x	$= \rho \cos \phi$	$= r \text{sen } \theta \cos \phi$
y	$= \rho \text{sen } \phi$	$= r \text{sen } \theta \text{sen } \phi$
z	$= z$	$= r \cos \theta$
\hat{x}	$= \cos \phi \hat{\rho} - \text{sen } \phi \hat{\phi}$	$= \text{sen } \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \text{sen } \phi \hat{\phi}$
\hat{y}	$= \text{sen } \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi}$	$= \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{r} + \cos \theta \text{sen } \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$
\hat{z}	$= \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{r} - \text{sen } \theta \hat{\theta}$
CILINDRICAS	CARTESIANAS	ESFERICAS
ρ	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r \text{sen } \theta$
ϕ	$= \tan^{-1}(y/x)$	$= \phi$
z	$= z$	$= r \cos \theta$
$\hat{\rho}$	$= \cos \phi \hat{x} + \text{sen } \phi \hat{y}$	$= \text{sen } \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}$
$\hat{\phi}$	$= -\text{sen } \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$	$= \hat{\phi}$
\hat{z}	$= \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{r} - \text{sen } \theta \hat{\theta}$
ESFERICAS	CARTESIANAS	CILINDRICAS
r	$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$= \sqrt{\rho^2 + z^2}$
θ	$= \cos^{-1}(z/r)$	$= \cos^{-1}(z/r)$
ϕ	$= \cotan^{-1}(x/y)$	$= \phi$
\hat{r}	$= \text{sen } \theta \cos \phi \hat{x} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$	$= \text{sen } \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z}$
$\hat{\theta}$	$= \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \text{sen } \phi \hat{y} - \text{sen } \theta \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{\rho} - \text{sen } \theta \hat{z}$
$\hat{\phi}$	$= -\text{sen } \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$	$= \hat{\phi}$

Análisis vectorial

Gradiente

Definición: Sea $f(\mathbf{r})$ un campo escalar diferenciable. El **gradiente** de $f(\mathbf{r})$ es un campo vectorial que se define a través del cambio de la función en un desplazamiento diferencial:

$$f(\mathbf{r}) \Rightarrow df = \mathbf{grad}(f) \cdot d\mathbf{r} = \text{grad}(f)_x dx + \text{grad}(f)_y dy + \text{grad}(f)_z dz$$

El producto escalar entre el vector gradiente de una función escalar y el diferencial de arco es igual al diferencial de la función escalar de la que se calcula el gradiente.

El operador gradiente se puede escribir usando el operador vectorial **nabla** o **del**:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \Rightarrow \mathbf{grad}(f) = \nabla f \Rightarrow df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

Las expresiones del gradiente en los sistemas básicos de coordenadas se muestran en la tabla de la derecha:

CARTESIANAS

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

CILINDRICAS

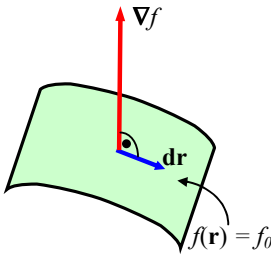
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

ESFERICAS

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

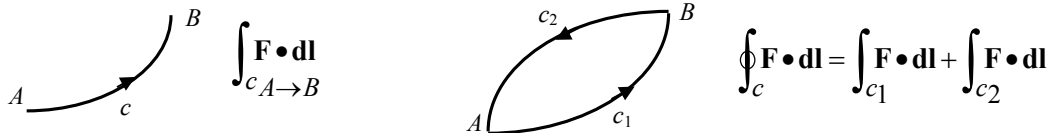
Propiedades del campo gradiente

Una **equipotencial** del campo escalar $f(\mathbf{r})$ es una superficie espacial tal que para todos sus puntos: $f(\mathbf{r}) = f_0$ (constante). Si el vector elemental $d\mathbf{r}$ pertenece a una superficie equipotencial, $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$ y se deduce que el vector gradiente es normal a $d\mathbf{r}$. Como $d\mathbf{r}$ es cualquiera, el gradiente es normal a la superficie misma.



El gradiente del campo escalar $f(\mathbf{r})$ es un campo vectorial normal a las superficies equipotenciales de $f(\mathbf{r})$ en todo punto.

La **circulación de un campo vectorial** a lo largo de una curva c (abierta o cerrada) en el espacio es una **integral de línea** cuyo integrando es la proyección del campo vectorial sobre el elemento de arco punto a punto a lo largo de la línea. En la figura se ilustran dos circulaciones, una sobre una curva abierta y otra sobre una curva cerrada, que puede interpretarse como la suma de dos circulaciones sobre dos curvas sucesivas.



Cuando el campo que circula es un **gradiente**, por definición: $\int_{c_1 \rightarrow c_2} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 df = f_2 - f_1$

y la circulación del gradiente depende **exclusivamente** de los valores del campo escalar origen en los **extremos** del intervalo. En particular: $\oint_c \nabla f \cdot d\mathbf{l} = 0$

Campos conservativos: Un campo vectorial se dice conservativo si su circulación entre dos puntos no depende del camino que se use:

$$\int_{c_1 A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{c_2 A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Por lo tanto **el gradiente es un campo conservativo**.

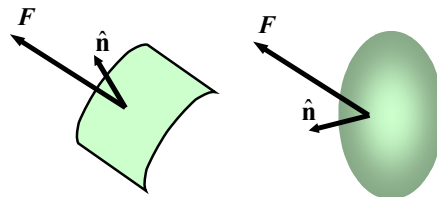
En resumen:

- Gradiente:**
- **campo vectorial normal en todo punto a las superficies equipotenciales de la función escalar origen.**
 - **campo vectorial conservativo.**

Flujo y divergencia

Flujo de un campo vectorial:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

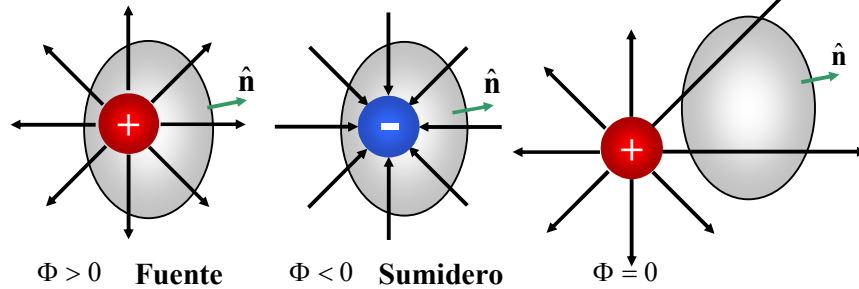


El **flujo de un campo vectorial** a través de una superficie (abierta o cerrada) se define como la integral donde el integrando es la proyección del campo vectorial sobre la normal a la superficie punto a punto de la misma. La propiedad matemática más importante del flujo de una campo vectorial es el

Teorema de Gauss: $\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \text{div} \mathbf{F} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$

Este teorema lleva a la definición de la **divergencia** de un campo vectorial cuando $V \rightarrow 0$.

Interpretación física:



Una carga eléctrica produce un campo eléctrico. A su vez, las líneas de campo producen flujo a través de una superficie cerrada. Si la superficie encierra carga, el flujo es no nulo, y su signo coincide con el signo de la carga encerrada. Si la superficie no encierra carga, el flujo es cero.

Por lo tanto el flujo (y la divergencia) está asociado a existencia de carga o fuente de campo. En general podemos demostrar que:

Fuentes escalares del campo: $div \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \rho_F(\mathbf{r})$

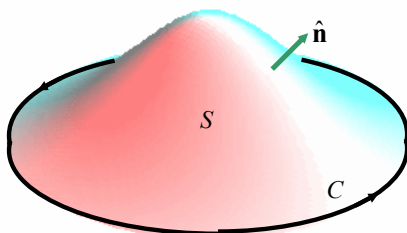
que significa que la divergencia del campo es proporcional a la **densidad de fuentes escalares** de campo punto a punto. La siguiente tabla presenta las expresiones de la divergencia en los distintos sistemas coordenados básicos:

CARTESIANAS	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
CILINDRICAS	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
ESFERICAS	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$

Decimos que un campo es **solenoidal** si su divergencia es nula: $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. En este caso **no existen fuentes escalares del campo**, y como las líneas de campo no tienen fuentes o sumideros, **deben ser cerradas**. Un ejemplo de campo solenoidal es el campo magnético.

Rotor

Teorema de Stokes: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$



El teorema de Stokes lleva a la definición del **rotor** de un campo vectorial cuando $S \rightarrow 0$. En esta expresión es importante notar que:

- La superficie S es abierta. Se “apoya” en la curva C
- El sentido de circulación y el sentido de la normal están ligados entre sí por la regla de la mano derecha.

Interpretación física

Así como la divergencia está asociada a las fuentes escalares del campo, el rotor está asociado a sus **fuentes vectoriales**:

Fuentes vectoriales del campo: $rot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_F(\mathbf{r})$

En la siguiente tabla se presentan las expresiones del rotor en los sistemas coordenados básicos:

CARTESIANAS	
$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$	
CILINDRICAS	
$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}$	
ESFERICAS	
$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\phi \end{vmatrix}$	
$= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$	

Decimos que un campo es **irrotacional** cuando su rotor se anula: $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. En este caso **no existen fuentes vectoriales del campo**. Un ejemplo de campo irrotacional es el campo eléctrico. Por el teorema de Stokes un campo irrotacional da circulación nula sobre una curva cerrada. Entonces decir que un campo es irrotacional es lo mismo que decir que es **conservativo**.

Laplaciano

El **laplaciano** es el operador que resulta de tomar la divergencia del gradiente. Opera sobre un campo escalar: $\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \text{div}[\text{grad}(f(\mathbf{r}))] = \nabla \cdot [\nabla f(\mathbf{r})]$

El laplaciano es un operador fundamental de las ecuaciones del electromagnetismo.

La siguiente tabla presenta las expresiones del laplaciano en los sistemas de coordenadas básicos:

CARTESIANAS	$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$
CILINDRICAS	$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$
ESFERICAS	$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}$

Ecuaciones de Poisson y Laplace

La ley de Gauss de la electrostática y la relación entre el campo y el potencial electrostáticos lleva a la **ecuación de Poisson**:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \Rightarrow \nabla \cdot [-\nabla\phi(\mathbf{r})] = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

La ecuación de Poisson relaciona el potencial eléctrico con sus **fuentes escalares**.

Para puntos del espacio **sin fuentes**, se obtiene la **ecuación de Laplace**: $\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0$

Desde el punto de vista matemático, la ecuación de Poisson es una ecuación diferencial lineal inhomogénea. Su **solución general** es la suma de la solución general de la ecuación homogénea (ecuación de Laplace) más una solución particular de la ecuación inhomogénea original:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \\ \nabla^2\phi_h(\mathbf{r}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \phi_h(\mathbf{r}) + \phi_p(\mathbf{r})$$

La solución particular más usada es la llamada **integral de Poisson**:

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r}')}{R} dV \quad \text{con} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

donde el recinto de integración debe contener por completo a las fuentes de campo cuya influencia se quiera determinar y se ha usado la notación de punto fuente (donde están distribuidas las fuentes) y punto campo (donde se desea calcular el efecto, o sea el potencial).

Teorema de Green

Las llamadas **identidades de Green** son expresiones matemáticas derivadas del teorema de la divergencia que son de utilidad para analizar problemas de potencial y de radiación.

Sea V una región cerrada del espacio cuya frontera es S . Sean además $\phi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ dos campos escalares que junto con sus derivadas primeras y segundas son funciones continuas dentro de V .

Consideremos el teorema de la divergencia aplicado al campo vectorial $\psi\nabla\phi$:

$$\int_V \nabla \cdot (\psi\nabla\phi) dV = \oint_S (\psi\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Como: $\nabla \cdot (\psi\nabla\phi) = \nabla\psi \cdot \nabla\phi + \psi\nabla^2\phi$ se obtiene la llamada **primera identidad de**

Green:

$$\int_V \nabla\psi \cdot \nabla\phi dV + \int_V \psi\nabla^2\phi dV = \oint_S (\psi\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$$

donde $\partial\psi/\partial n$ es la derivada direccional normal a la superficie.

Consideremos ahora en esta expresión que $\psi = \phi$, y que ϕ sea solución de la ecuación de Laplace dentro de V , de manera que nos queda:

$$\int_V (\nabla\phi)^2 dV = \oint_S (\phi\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$$

Intercambiamos los roles de los campos escalares, y escribimos ahora la primera identidad de Green al campo vectorial $\phi\nabla\psi$:

$$\int_V \nabla\phi \cdot \nabla\psi dV + \int_V \phi\nabla^2\psi dV = \oint_S \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS$$

Restamos las dos expresiones de la primera identidad para obtener la **segunda identidad o teo-**

rema de Green:

$$\int_V (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi) dV = \oint_S \left(\psi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) dS$$

Fuentes del campo y teorema de Helmholtz

El **teorema de Helmholtz**, que presentamos sin demostración¹⁶, relaciona a un campo vectorial con sus fuentes:

Si	$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r})$	y	$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r})$
Entonces	$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \Psi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{K}(\mathbf{r})$		
con	$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{R} dV'$	y	$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r}')}{R} dV'$
donde	$R = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2}$		

El teorema de Helmholtz muestra que todo campo vectorial está unívocamente definido si se conocen su divergencia (fuentes escalares) y su rotor (fuentes vectoriales).

Identidades vectoriales

A continuación se presenta una tabla de identidades matemáticas que surgen de la aplicación de los operadores vectoriales vistos.

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= 0 & \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3 & \nabla \times \mathbf{r} &= 0 & \nabla \mathbf{r} &= \mathbf{r}/r & \nabla(1/r) &= -\mathbf{r}/r^3 \\ \nabla(\phi\psi) &= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi & \nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) &= \phi\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla\phi & \nabla \times (\phi\mathbf{F}) &= \phi\nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla\phi \\ \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \\ \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \\ \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \\ \nabla^2 \mathbf{F} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (\text{Laplaciano vectorial}) \end{aligned}$$

Expresiones integrales:

$$\begin{aligned} \text{Gauss} \quad \oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV & \oint_S f \hat{\mathbf{n}} dS &= \int_V \nabla f dV \\ \text{Stokes} \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS & \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) dS &= \int_V \nabla \times \mathbf{F} dV \end{aligned}$$

¹⁶ Ver, por ejemplo, W.K.H.Panofsky & M.Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", 2nd. Ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1962), p.2-5.

Sistemas lineales

Muchos fenómenos físicos pueden describirse matemáticamente mediante magnitudes funciones del espacio y del tiempo. En muchas situaciones podemos separar estas magnitudes como **estímulos** (causas) y **respuestas** (efectos). También en muchas situaciones de interés tecnológico la relación causal entre estímulos y respuestas es lineal, es decir, la respuesta a un conjunto de estímulos aplicados simultáneamente es la suma de las respuestas obtenidas si cada estímulo opera en solitario. Estas relaciones se pueden implementar matemáticamente mediante **mapeos lineales** entre el conjunto de funciones estímulo y el conjunto de funciones respuesta. Estos mapeos son la representación matemática del fenómeno y se conocen como **sistemas lineales**.

La posibilidad de describir fenómenos de la naturaleza mediante sistemas lineales es ventajosa porque existe una amplia y relativamente sencilla doctrina matemática para tratar a estos sistemas, fundamentalmente mediante la representación de las magnitudes como la suma de funciones elementales cuyas respuestas son bien conocidas o pueden ser estimadas con facilidad.

Las magnitudes que representan el fenómeno pueden ser magnitudes descriptas mediante funciones reales de sus argumentos o magnitudes descriptas mediante funciones complejas. En el primer caso podemos señalar la óptica de procesos incoherentes, y en el segundo la óptica de procesos coherentes, donde es necesario usar campos con módulo y fase. Como el tratamiento vectorial es más general, lo usaremos en nuestra introducción a los sistemas lineales.

Consideremos entonces un sistema definido por un mapeo S entre un conjunto de funciones estímulo¹⁷:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = [f_1(\mathbf{r}, t), f_2(\mathbf{r}, t), \dots, f_N(\mathbf{r}, t)]^T$$

y un conjunto de funciones respuesta:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = [g_1(\mathbf{r}, t), g_2(\mathbf{r}, t), \dots, g_M(\mathbf{r}, t)]^T$$

Todas estas funciones deben considerarse, en general, funciones complejas de sus argumentos reales.

Entonces, la relación causal se escribe:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = S \{ \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \}$$

donde el **operador** matemático $S \{ \}$ representa la relación. Esta relación entre ambos conjuntos de funciones es del tipo "muchas a una", es decir, diversos conjuntos estímulo pueden llevar al mismo conjunto respuesta.

En el caso de un sistema lineal: $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{L} \{ \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \}$

el operador lineal $\mathcal{L} \{ \}$ satisface la propiedad básica:

$$\mathcal{L} \{ \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 \} = \alpha_1 \mathcal{L} \{ \mathbf{f}_1 \} + \alpha_2 \mathcal{L} \{ \mathbf{f}_2 \}$$

donde α_1 y α_2 son constantes (respecto de los argumentos de las funciones) generalmente complejas.

Autovalores y autofunciones

Consideremos una función estímulo que depende de sus variables y de un cierto parámetro α : $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r}, t)$. Decimos que esta función estímulo es una **autofunción** de un cierto operador lineal \mathcal{L} si:

$$\mathcal{L} \{ \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r}, t) \} = H(\alpha) \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r}, t)$$

donde $H(\alpha)$ es un valor complejo dependiente de α pero independiente de las variables \mathbf{r} y t , llamado **autovalor** asociado con la autofunción.

Como el autovalor es una constante compleja, se puede escribir en forma polar:

$$H(\alpha) = A(\alpha) e^{-i\phi(\alpha)}$$

donde $A(\alpha)$ es la amplitud y $\phi(\alpha)$ es la fase del complejo $H(\alpha)$. Entonces:

$$\mathcal{L} \{ \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r}, t) \} = H(\alpha) \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r}, t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \{ \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r}, t) \} = A(\alpha) \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r}, t) e^{-i\phi(\alpha)}$$

¹⁷ Usamos la notación vectorial para los conjuntos de funciones estímulo y respuesta porque es la más natural.

y se observa que la aplicación de un operador lineal a una autofunción tiene como resultado una versión escalada y eventualmente desfasada de esta misma autofunción.

Otro aspecto fundamental de los sistemas lineales surge de la posibilidad de la representación de estímulos y respuestas mediante superposición de funciones más sencillas. Consideremos que podemos expresar el estímulo como una suma o superposición de funciones (ejemplificamos para una relación estímulo-respuesta escalar):

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_k \alpha_k h_k(\mathbf{r}, t)$$

Si $g(\mathbf{r}, t) = \mathcal{L}\{f(\mathbf{r}, t)\}$ representa un sistema lineal, entonces podemos escribir:

$$g(\mathbf{r}, t) = \mathcal{L}\{f(\mathbf{r}, t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_k \alpha_k h_k(\mathbf{r}, t)\right\} = \sum_k \alpha_k \mathcal{L}\{h_k(\mathbf{r}, t)\}$$

Se ve entonces que:

La linealidad permite representar una función estímulo mediante una suma o **superposición lineal de otras funciones elementales, calcular la respuesta para cada estímulo elemental y luego sumar los resultados para obtener la respuesta original.**

Esto es sumamente conveniente desde el punto de vista del cálculo ya que se puede elegir el conjunto de funciones elementales que representa a la función estímulo original de manera que sean sencillas las respuestas obtenidas al aplicar el operador.

Representación de funciones por conjuntos completos de funciones ortogonales

Las representaciones más útiles son las que utilizan **conjuntos completos de funciones ortogonales**.

En general, existen representaciones en el **dominio del tiempo** y representaciones en el **dominio del espacio**. Habitualmente, las funciones matemáticas que se usan en la descripción de sistemas de ingeniería son separables, es decir, podemos escribir para cualquiera de ellas:

$$f(\mathbf{r}, t) = f_s(\mathbf{r}) T(t)$$

donde el subíndice "s" indica que la función describe el comportamiento espacial, y entonces la representación de la función original como superposición de funciones elementales resulta en un producto de dos series que pueden considerarse por separado.

Dado que es común en los cursos de ingeniería la representación en el dominio del tiempo (representación de Fourier) ejemplificaremos esta sección con representaciones en el dominio del espacio, menos conocidas.

Así tenemos, entonces la representación: $f_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n h_n(\mathbf{r})$ dentro de un recinto V del espacio, donde todas las cantidades son generalmente complejas.

Decimos que dos funciones $\phi_1(\mathbf{r})$ y $\phi_2(\mathbf{r})$ son **ortogonales** en V si:

$$\int_V \phi_1(\mathbf{r}) \phi_2^*(\mathbf{r}) dV = \begin{cases} = 0 & \text{si } \phi_1(\mathbf{r}) \neq \phi_2(\mathbf{r}) \text{ dentro de } V \\ \neq 0 & \text{si } \phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r}) \text{ dentro de } V \end{cases}$$

donde el asterisco simboliza el complejo conjugado.

Si además la integral vale 1 cuando las dos funciones coinciden, se dice que las funciones son **ortonormales**.

Suponemos en lo que sigue que el conjunto de funciones $\{h_n(\mathbf{r})\}$ de la representación son ortogonales:

$$\int_V h_n(\mathbf{r})h_m^*(\mathbf{r})dV = \begin{cases} = 0 & \text{si } n \neq m \\ = \Delta_n & \text{si } n = m \end{cases}$$

Entonces los coeficientes α_n del desarrollo se pueden calcular sencillamente:

calculamos
$$\int_V h_k(\mathbf{r})f_s(\mathbf{r})dV = \int_V h_k(\mathbf{r})\left[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n h_n(\mathbf{r})\right]dV = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \int_V h_k(\mathbf{r})h_n(\mathbf{r})dV = \Delta_k\alpha_k$$

de donde:

$$\alpha_k = \frac{1}{\Delta_k} \int_V h_k(\mathbf{r})f_s(\mathbf{r})dV$$

Definimos el **error cuadrático medio** de la representación como:

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \int_V \left[f_s(\mathbf{r}) - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n h_n(\mathbf{r}) \right]^2 dV$$

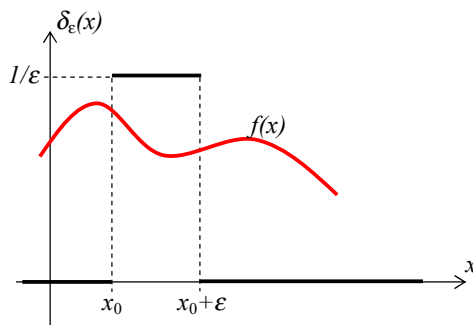
Si el conjunto de funciones $\{h_n(\mathbf{r})\}$ es **completo**, entonces el error cuadrático medio **tiende a cero** para todo punto dentro de V para **cualquier** función $f_s(\mathbf{r})$ a representar.

Tenemos entonces una prescripción de cómo representar la función estímulo dentro de un dado recinto con error mínimo, cualquiera sea la función. Existen múltiples conjuntos completos de funciones ortogonales. Cuál se elija para una aplicación específica depende del operador lineal que permite hallar la respuesta.

Delta de Dirac

La **delta de Dirac** es una funcional, es decir, es un objeto matemático definido por un conjunto de propiedades. En el caso de la delta **espacial en una dimensión** $\delta(x)$, las propiedades son:

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= 0 && \text{para } x \neq x_0 \\ \int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx &= \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x_0 \notin [a, b] \end{cases} \end{aligned}$$



Por ejemplo, la función definida por intervalos:

$$\delta_\varepsilon(x - x_0) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{si } x \in [x_0, x_0 + \varepsilon] \\ 0 & \text{si } x \notin [x_0, x_0 + \varepsilon] \end{cases}$$

se comporta como una delta de Dirac cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. La primera propiedad se cumple ya que en el límite el único punto en que la función no es cero es x_0 . La segunda propiedad se cumple por el teorema del valor medio del

cálculo integral: $\int_a^b \phi(x) dx = \phi(\xi)(b - a)$ donde $\xi \in (a, b)$.

Luego:
$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} f(\xi) & \text{si el intervalo } [x_0, x_0 + \varepsilon] \in [a, b] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Tomando el límite para $\varepsilon \rightarrow 0$ se llega a las propiedades de la delta.

La definición de la delta ilustra la **propiedad de muestreo**: su aplicación permite tener una muestra de la función en el punto de definición de la delta.

En tres dimensiones espaciales se puede escribir:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad \text{para } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$$

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{si } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}_0 \notin V \end{cases}$$

donde la notación convencional de la delta significa, p.ej., en cartesianas:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz$$

Una operación que lleva a una delta de Dirac en tres dimensiones es:

$$\text{div} \left[\text{grad} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \right] = \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \right]$$

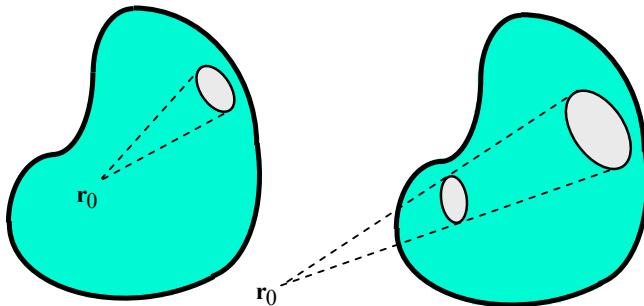
Demostramos esta propiedad usando por comodidad coordenadas cartesianas:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = -\frac{(x-x_0)\hat{x} + (y-y_0)\hat{y} + (z-z_0)\hat{z}}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} \\ \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \right] = 0 \quad \text{si } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ la operación no está definida. Luego se satisface la primera propiedad de la delta. Para probar la segunda, usamos el teorema de la divergencia:

$$\int_V \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \right] dV = \oint_S \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot \hat{n} dS = - \oint_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \hat{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dS = - \int_{4\pi} d\Omega_{\mathbf{r}_0}$$

que indica que la integral es igual al ángulo sólido medido desde el punto \mathbf{r}_0 .



- Si el recinto de integración **incluye** a este punto, el resultado de la última integral vale 4π (figura de la izquierda).
- Si el recinto de integración **no incluye** a este punto, la integral es nula, lo que se ve a partir del flujo de la anteúltima integral (figura de la derecha).

Finalmente:

$$\nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \right] = \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

En nuestro curso la funcional delta de Dirac se utiliza en la representación de objetos puntuales, lineales o superficiales como objetos tridimensionales en las integrales de los campos.

En otras aplicaciones la **funcional delta temporal** $\delta(t - t_0)$ tiene mucha utilidad en el análisis de los circuitos y sistemas de control, como se muestra en la siguiente sección.

Representación Delta

De las propiedades de la Delta de Dirac podemos escribir:

$$f(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t') \delta(t', t) dt' \quad \text{en el } \mathbf{dominio del tiempo} \text{ dentro del intervalo } [t_1, t_2].$$

$$f(\mathbf{r}) = \int_V f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dV \quad \text{en el } \mathbf{dominio del espacio} \text{ dentro del recinto } V.$$

Estas ecuaciones representan la función como una superposición de sus valores muestreados en los sucesivos puntos del recinto de integración. Aunque esta representación - la **representación delta** - parece trivial, vemos a continuación que su aplicación a sistemas lineales nos da un mecanismo de estudio de este tipo de problemas.

Supongamos que estas funciones son estímulo de un cierto sistema lineal simbolizado por el operador $\mathcal{L}\{\}$: $g = \mathcal{L}\{f\}$.

En el **dominio del tiempo**, la respuesta es:

$$g(t) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(t')\delta(t',t)dt'\right\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t')\mathcal{L}\{\delta(t',t)\}dt'$$

Obsérvese que el operador \mathcal{L} actúa sobre el tiempo no primado.

Definimos la **respuesta impulsiva del sistema** como: $h(t',t) = \mathcal{L}\{\delta(t',t)\}$

Y entonces la respuesta del sistema ante el estímulo $f(t)$ será: $g(t) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t')h(t',t)dt'$

En el **dominio del espacio** nos queda:

$$g(\mathbf{r}) = \mathcal{L}\{f(\mathbf{r})\} = \int_V f(\mathbf{r}')h(\mathbf{r}',\mathbf{r})dV \quad \text{con} \quad h(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \mathcal{L}\{\delta(\mathbf{r}',\mathbf{r})\}$$

Las integrales de las representaciones delta, llamadas **integrales de superposición**, definen completamente la respuesta del sistema en base a su respuesta impulsiva en todos los puntos del intervalo (recinto) de representación. En la óptica, la respuesta al impulso se conoce como "**point spread function**".

En el caso de un sistema físico la representación delta espacial tiene la interpretación de que la respuesta (habitualmente los campos) está completamente definida especificando la posición de puntos fuentes equivalentes a la distribución de fuentes. De esta forma utilizamos un método de superposición (válido porque las ecuaciones de Maxwell son lineales) para calcular los campos creados por distintas distribuciones de fuentes.

Esta metodología de superposición de los efectos creados por fuentes elementales se usa a lo largo del texto en todas las aplicaciones.

En la teoría del potencial se conoce como **método de la función de Green**, ya que la respuesta impulsiva del sistema se conoce como función de Green del mismo.

Este esquema da lugar a distintos algoritmos numéricos de cálculo de campos en problemas del electromagnetismo.

Sistemas lineales invariantes

Decimos que un sistema lineal es **invariante en el tiempo (en el espacio)**, si la respuesta al impulso en un instante t (en una posición \mathbf{r}) para un impulso excitador aplicado en el instante τ (en la posición \mathbf{r}') sólo depende del intervalo $[t - \tau]$ (de la distancia vectorial $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$). Esto significa que distintos intervalos de tiempo (distintas regiones del espacio) llevan al mismo comportamiento siempre que los intervalos (distancias vectoriales) entre estímulo y respuesta sean iguales. El sistema no cambia a medida que pasa el tiempo o en distintas regiones del espacio.

Para sistemas lineales invariantes podemos entonces escribir:

$$h(t',t) = h(t' - t) = \mathcal{L}\{\delta(t' - t)\} \quad h(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \mathcal{L}\{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\}$$

y las integrales de superposición resultan así:

$$g(t) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t')h(t' - t)dt' = f \otimes h \quad g(\mathbf{r}) = \mathcal{L}\{f(\mathbf{r})\} = \int_V f(\mathbf{r}')h(\mathbf{r}' - \mathbf{r})dV = f \otimes h$$

que son **productos convolución** entre la función estímulo y la respuesta impulsiva. Como veremos en las siguientes secciones, utilizando la transformación de Fourier el producto convolución de dos funciones del tiempo (del espacio) se transforma al producto directo de las respectivas transformadas. Esto permite trabajar sencillamente en el campo transformado con los sistemas lineales invariantes.

En el electromagnetismo la mayoría de los sistemas son invariantes en espacio y tiempo.

Resumen de la representación de Fourier en una dimensión

En el electromagnetismo la representación más usada es la de Fourier, por lo que centraremos nuestro análisis en su uso. En esta sección hacemos un breve resumen de las propiedades básicas de la representación de Fourier en una dimensión, tomando como ejemplo funciones del tiempo.

La **transformada de Fourier** de una función $g(t)$ es:

$$G(f) = \mathfrak{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

y es una función generalmente compleja de la **frecuencia** f . También definimos la **transformada inversa de Fourier** de una función de la frecuencia como:

$$g(t) = \mathfrak{F}^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

$g(t)$ y $G(f)$ forman un par de transformación según Fourier: $g(t) \leftrightarrow G(f)$.

$g(t)$ se conoce como **representación en el dominio del tiempo** y $G(f)$ se conoce como **representación en el dominio de la frecuencia**.

Existen reglas matemáticas de existencia de esta transformación que pueden consultarse en cualquier texto matemático dedicado a estos temas. En nuestro contexto basta decir que la función $g(t)$ debe cumplir las siguientes propiedades para que exista su transformada:

- ser absolutamente integrable sobre su dominio: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < M$,
- sólo se admite un número finito de discontinuidades finitas y extremos en cualquier intervalo finito del dominio,
- no debe tener discontinuidades infinitas.

Propiedades básicas

La transformada de Fourier es una representación lineal, de manera que cumple propiedades de los sistemas lineales. Las siguientes son las propiedades básicas más importantes:

- **Linealidad.** $\mathfrak{F}[\alpha g_1(t) + \beta g_2(t)] = \alpha \mathfrak{F}[g_1(t)] + \beta \mathfrak{F}[g_2(t)]$
donde α y β son constantes cualesquiera.

- **Similaridad.** $\mathfrak{F}[g(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} G(f/\alpha)$

donde α es una constante cualquiera. Un “estiramiento” en la escala del tiempo implica una “compresión” en la escala de frecuencias y viceversa, además de un cambio global en la amplitud del espectro.

- **Corrimiento.** Si $G(f) = \mathfrak{F}[g(t)]$ entonces: $\mathfrak{F}[g(t - \tau)] = G(f) e^{-j2\pi f\tau}$
donde τ es un real. Un corrimiento en el dominio del tiempo implica un cambio de fase en el dominio de la frecuencia.

- **Teorema de Rayleigh-Parseval.** Si $G(f) = \mathfrak{F}[g(t)]$ entonces:

Juan C. Fernández - Departamento de Física – Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires – www.fi.uba.ar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

estas integrales se interpretan como el **contenido energético** de la "señal".

- **Convolución.** Si $G_1(f) = \mathfrak{T}[g_1(t)]$ y $G_2(f) = \mathfrak{T}[g_2(t)]$ entonces:

$$\mathfrak{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t-\tau)d\tau\right] = \mathfrak{T}[g_1(t) \otimes g_2(t)] = G_1(f)G_2(f)$$

es decir que la transformada de la convolución en el dominio del tiempo es igual al producto de las transformadas individuales.

- **Autocorrelación.** Si tomamos en la convolución: $g_1(t) = g(t), g_2(t) = g^*(-t)$

$$\mathfrak{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t-\tau)d\tau\right] = \mathfrak{T}[g(t) \otimes g^*(t)] = |G(f)|^2$$

y en forma similar:

$$\mathfrak{T}[|g(t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)G^*(\xi - f)d\xi$$

Las propiedades de singularidad y corrimiento son fundamentales en el tratamiento de funciones por tramos, donde se utilizan "transformadas parciales" que representan a las funciones por partes, ya sea en el dominio temporal o el dominio espacial.

que son las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia.

En esta representación, es posible establecer otras relaciones entre los campos que simplifican la resolución. Estas relaciones se denominan leyes o **relaciones constitutivas** y dependen de la frecuencia:

$\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega) = \epsilon_{\omega}\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$	ϵ : permitividad (dieléctrica)
$\mathbf{j}(\mathbf{r},\omega) = \sigma_{\omega}\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$	σ : conductividad
$\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) = \mu_{\omega}\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)$	μ : permeabilidad (magnética)

Tres entornos

Existen tres entornos de modelación diferentes en el dominio de la frecuencia:

- Las tres dimensiones del sistema fuente de campo son pequeñas frente a la mínima longitud de onda del espectro de Fourier de la fuente. Este es el caso de la aproximación cuasi-estática. Vale la teoría de circuitos y se modeliza el sistema mediante elementos de **parámetros concentrados** (resistores, capacitores, inductores, etc.).
- Dos de las tres dimensiones del sistema fuente de campo son pequeñas frente a la mínima longitud de onda del espectro de Fourier de la fuente. En este caso se modela al sistema como una cascada de elementos de longitud infinitesimal a lo largo de la dimensión que no cumple la condición cuasi-estática. Como cada elemento infinitesimal de la cascada cumple esta condición, se lo modela mediante un circuito equivalente. Se tiene entonces un modelo de **parámetros distribuidos**. El caso típico es el de las líneas de transmisión.
- Al menos dos de las tres dimensiones no cumplen la condición cuasi-estática. Se requiere usar el **modelo de campo** en toda su generalidad. Esto ocurre por ejemplo en antenas y circuitos de microondas.

PROBLEMAS

1.1) Expresar los siguientes vectores en coordenadas cilíndricas y esféricas:

$$\mathbf{F} = 3x \hat{x} + 2z^2 \hat{y} \quad \mathbf{G} = 2xy \hat{z} + x^2 \hat{y}$$

1.2) Calcular la masa de un cubo de arista $a = 10 \text{ cm}$ cuya densidad es: $\rho = 3(\text{Kg/cm}^3) x y^2 z^{1/2}$.

1.3) Calcule la masa de una esfera de radio $a = 5 \text{ cm}$ cuya densidad es: $\rho = 3 (\text{Kg/m}^3) r^2$.

1.4) Calcule la carga de los siguientes sistemas:

a) dos esferas concéntricas de densidades $\rho = \text{cte}$ para $r < a$ y $\rho = A r^2$ para $a < b < r < c$.

b) dos cilindros coaxiales de densidad: $\rho = \lambda$ para $r < a$ y $\rho = -A r^2 z$ para $a < b < r < c$.

Nota: $[\lambda] = [\text{g/cm}]$

1.5) Dados los tres vectores: $\mathbf{A} = 3\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$ $\mathbf{B} = 3\hat{x} - 4\hat{y} - 5\hat{z}$ $\mathbf{C} = \hat{x} - \hat{y} + \hat{z}$

- a) Calcular $\mathbf{A} \pm \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \pm \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \pm \mathbf{C}$
- b) Calcular $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- c) Calcular $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$
- d) Verificar que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
- e) Verificar que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
- f) Calcular el ángulo entre los tres pares de vectores.

1.6) Hallar el gradiente de los siguientes campos escalares:

- a) $f(x) = 10x$
- b) $g(x,y,z) = 10x + 15xy + 20xz^2$
- c) $f(r) = 25/r$
- d) $g(\rho, \phi, z) = 10 \cos \phi - 5 \rho z \sin \phi$

1.7) Calcular la circulación de los campos $\mathbf{F}_1 = xyz \hat{x} + x^2 \hat{y}$ y $\mathbf{F}_2 = y \hat{x} - x \hat{y}$ a lo largo del camino rectangular desde (0,1) a (1,1) a (1,2) a (0,2) y vuelta a (0,1). Repetir para el camino triangular dado por (0,0), (0,1), (1,1). ¿Son los campos conservativos?

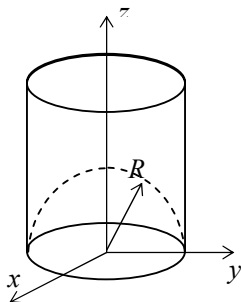
1.8) Calcule el flujo de los vectores del problema 1.1) a través de un paralelepípedo de lados 2, 3 y 5 con un vértice en el origen de coordenadas.

1.9) Calcule el flujo del campo $\mathbf{F} = \rho^2 z \hat{\rho} + \sin \phi \cos \phi \hat{\phi} + \rho^2 \cos^2 \phi \hat{z}$ a través de un cilindro de altura 4, radio de la base 3, centrado en el origen de coordenadas.

1.10) Calcular la divergencia y el rotor de los campos:

- a) $\mathbf{F} = x \hat{x} + y^2 \hat{y} + xz \hat{z}$
- b) $\mathbf{F} = \rho^2 z \hat{\rho} + \sin \phi \cos \phi \hat{\phi} + \rho^2 \cos^2 \phi \hat{z}$
- c) $\mathbf{F} = r^2 \sin \theta \cos \phi (\hat{r} + \hat{\theta} + \hat{\phi})$

1.11) Comprobar el teorema de Stokes para el contorno frontera en el plano xy que se muestra



en la figura con un campo vectorial $\mathbf{A} = r \hat{\phi} - z \hat{z}$. Comprobar el resultado para a) la superficie circular plana en el plano xy ; b) para la superficie hemisférica limitada por el contorno y c) para una superficie cilíndrica de altura h limitada por el contorno.

1.12) Calcular el laplaciano de las funciones del problema 1.6.

1.13) Demostrar que la expresión: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}$

se convierte en una delta de Dirac para $a \rightarrow 0$.

1.14) Demostrar que: $\delta(a(x - x_0)) = \frac{1}{|a|} \delta(x - x_0)$

1.15) Demostrar que la exponencial compleja $e^{i2\pi \xi t}$ es una autofunción de cualquier sistema lineal invariante que opera sobre funciones del tiempo.