

5 – Métodos Numéricos en baja frecuencia

Introducción

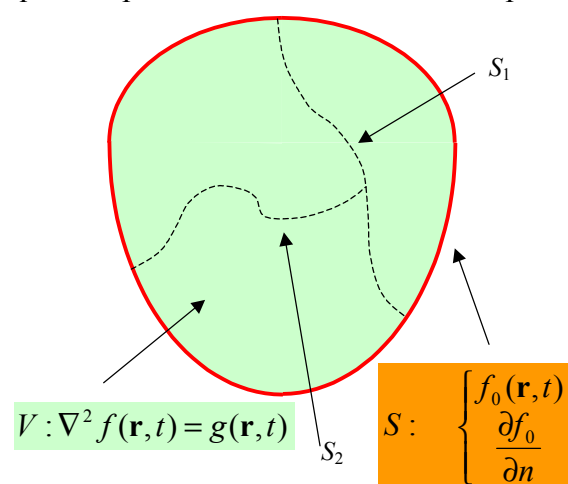
Existen diversas herramientas matemáticas para la obtención de funciones potencial para diversos tipos de campos. En particular, en campos eléctricos y magnéticos estáticos los potenciales satisfacen ecuaciones de Poisson y Laplace:

$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon$	potencial electrostático
$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{j}(\mathbf{r})$	potencial vectorial magnético
$\nabla^2 \Psi_m(\mathbf{r}) = 0$	potencial escalar magnético

Por otra parte, estos potenciales permiten determinar con buena aproximación los campos también en casos **cuasi-estáticos** o **cuasi-estacionarios** (**baja frecuencia**).

Vamos a analizar en este Capítulo distintas técnicas, analíticas y numéricas, para resolver estas ecuaciones.

Un **problema de potencial** se presentará como una ecuación diferencial, en general de Poisson, que cumple una determinada función potencial cuasi-estática $f(\mathbf{r}, t)$ dentro de un dado recinto V



del espacio, junto con condiciones de contorno definidas sobre la superficie S frontera del recinto de integración y eventuales superficies internas (S_1 , S_2 , etc.) que separan regiones de propiedades diferentes (permitividad, permeabilidad, conductividad, etc.). Los métodos llevan a postular una función potencial generalmente diferente en cada región, que sobre las superficies internas también cumplen condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno son, en general, definidas por el valor o la continuidad de la función potencial sobre una superficie (**condición de Dirichlet**) y/o el valor o la continuidad de la derivada del potencial en la dirección normal a la superficie

(**condición de Neumann**), o una mezcla de estas condiciones.

Por otra parte, las soluciones de la ecuación de Laplace tiene propiedades que se pueden usar en la búsqueda de las soluciones del problema:

- Superposición (linealidad)
- Unicidad
- Armonicidad

Existen distintos tipos de técnicas analíticas para la resolución de estas ecuaciones (método de inversión, etc) que conforman una rama muy desarrollada de la física matemática conocida como **teoría del potencial**. Veremos solamente a continuación uno de los métodos más importantes y quizás el más sencillo para la **solución analítica** de ecuaciones diferenciales lineales, el método de separación de variables.

Separación de variables

Las coordenadas que definen la posición de un punto en el espacio son variables **independientes** entre sí. Las soluciones de la ecuación de Laplace dependen de estas variables. Por lo tanto, se puede hallar una solución posible si suponemos que el potencial es el producto de funciones que dependen de **una única** variable de posición. Vamos a desarrollar este método, llamado de **separación de variables**, en los tres sistemas de coordenadas básicos que se usan en mayor medida¹.

Coordenadas cartesianas

En coordenadas cartesianas tenemos: $\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \nabla^2 \Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$

Separamos variables con la hipótesis: $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

Reemplazamos en la ecuación diferencial: $YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$

y ahora dividimos toda la ecuación por $\Phi = XYZ$:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_x^2 - k_y^2 + k_z^2 = 0$$

observamos que cada sumando es una función de una única variable. Como estas variables son independientes, para que esta suma sea cero para cualquier punto del espacio se requiere que cada sumando sea una constante. Por razones de comodidad matemática que quedarán claras más abajo, llamamos a esas constantes $-k_x^2, -k_y^2$ y k_z^2 . Nos quedan entonces tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - k_z^2 Z = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales son:

$$X(x) = \begin{cases} A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x} = A'_1 \sin(k_x x) + A'_2 \cos(k_x x) & \text{para } k_x \neq 0 \\ A''_1 x + A''_2 & \text{para } k_x = 0 \end{cases}$$

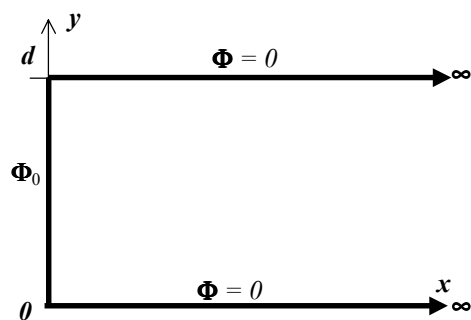
$$Y(y) = \begin{cases} B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y} = B'_1 \sin(k_y y) + B'_2 \cos(k_y y) & \text{para } k_y \neq 0 \\ B''_1 y + B''_2 & \text{para } k_y = 0 \end{cases}$$

$$Z(z) = \begin{cases} C_1 e^{k_z z} + C_2 e^{-k_z z} = C'_1 \sinh(k_z z) + C'_2 \cosh(k_z z) & \text{para } k_z \neq 0 \\ C''_1 z + C''_2 & \text{para } k_z = 0 \end{cases}$$

Obsérvese que estas soluciones surgen de la elección particular de signos para cada constante de separación. La elección de estos signos depende de las condiciones de borde del problema. Por ejemplo, tomar una constante de separación negativa (por ejemplo $-k_x^2$) lleva a una dependencia en funciones trigonométricas, mientras que tomar un signo positivo (por ejemplo k_z^2) lleva a soluciones que son funciones hiperbólicas. En todos los casos al menos una de las constantes de separación debe ser de signo diferente a las otras dos.

¹ El método de separación de variables funciona para **algunas** ecuaciones diferenciales en **algunos** sistemas de coordenadas, llamados **sistemas separables** para esa ecuación diferencial. En particular, para la ecuación de Laplace este método se puede usar en sistemas coordinados donde las superficies de coordenadas constantes son cuádricas confocales o sus formas degeneradas (P.M.Morse, H.Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", McGraw-Hill Book Co., New York, 1953, pp. 494 y siguientes). En total hay once sistemas de coordenadas separables para la ecuación de Laplace.

Ejemplo 7.1: Una región del espacio de base d y longitud semiinfinita se halla limitada por conductores a los potenciales indicados. Determinar el potencial dentro de la región.



Dentro de la región se cumple la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{Las condiciones de borde son:}$$

$$\begin{aligned} x=0, 0 < y < d : & \quad \Phi = \Phi_0 \\ y=0, y=d : & \quad \Phi = 0 \end{aligned}$$

La solución es: $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$ con:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx} \\ Y(y) &= B_1 \text{sen}(ky) + B_2 \text{cos}(ky) \end{aligned}$$

Nótese que elegimos la solución exponencial sobre x , ya que el potencial debe decaer a medida que $x \rightarrow \infty$, y entonces la solución para y debe ser en funciones trigonométricas (o exponenciales de exponentes imaginarios puros). También notamos que, como es un problema bidimensional, hay una sola constante de separación (ya que $-k_x^2 + k_y^2 = 0 \Rightarrow k_x = k_y = k$).

Como para $x \rightarrow \infty$, $\Phi(x, y) \rightarrow 0$, el coeficiente A_1 debe anularse. Tenemos así:

$$\Phi(x, y) = e^{-kx} (C_1 \text{sen}(ky) + C_2 \text{cos}(ky))$$

Ahora debemos elegir las constantes para satisfacer las condiciones de borde.

$$\text{Para } y = 0 \Rightarrow V(x, 0) = C_2 e^{-kx} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{Para } y = d \Rightarrow V(x, d) = C_1 e^{-kx} \text{sen}(kd) = 0 \Rightarrow k = n\pi/d$$

Hay infinitas soluciones del tipo:
$$\Phi(x, y) = C_n e^{-\frac{n\pi}{d}x} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{d}y\right)$$

De manera que, aplicando superposición:
$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{d}x} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{d}y\right)$$

Nos queda para aplicar la última condición de borde:

$$\Phi(0, y) = \Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{d}y\right) \quad \text{para } 0 < y < d$$

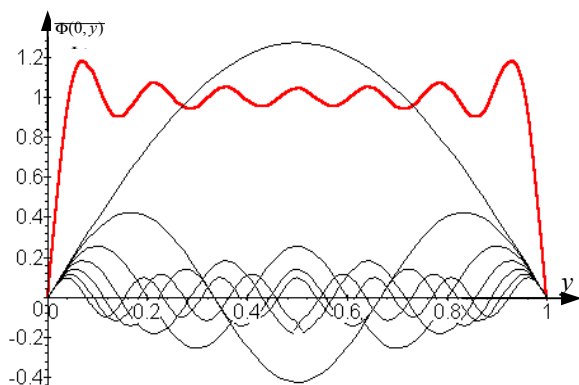
de donde deberíamos hallar los coeficientes C_n . Para ello usamos la ortogonalidad de las

funciones seno:
$$\int_0^d \text{sen}\left(\frac{n\pi}{d}y\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{d}y\right) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ d/2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Luego:
$$\frac{2V_0}{d} \int_0^d \text{sen}\left(\frac{m\pi}{d}y\right) dy = \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^d \text{sen}\left(\frac{n\pi}{d}y\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{d}y\right) dy = C_m$$

de donde:
$$C_m = \frac{2V_0}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)] = \begin{cases} 0 & \text{para } m \text{ par} \\ 4V_0/m\pi & \text{para } m \text{ impar} \end{cases}$$

El potencial dentro del recinto es:
$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\Phi_0}{(2n+1)\pi} e^{-\frac{(2n+1)\pi}{d}x} \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{d}y\right)$$



Quedan solamente los coeficientes para n impar, y su amplitud decrece a medida que n aumenta. Este es un desarrollo en serie de Fourier. En la gráfica se ven los términos del desarrollo para $2n+1 = 1, 2, \dots, 7$ y la suma (en rojo) de estos términos, que dan el potencial para $x = 0$. Se ve que a medida que se suman más términos la función tiende a un pulso de altura Φ_0 .

Para otros valores de x , las amplitudes de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier decaen exponencialmente.

Coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas el laplaciano es: $\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$

y separamos variables de forma que:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Psi(\phi)Z(z) \Rightarrow \frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

que podemos escribir:
$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2$$

porque el segundo miembro es sólo función de z. La solución para la ecuación diferencial según

z es:
$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \Rightarrow \begin{cases} Z(z) = A_1 z + A_2 & \text{si } k = 0 \\ Z(z) = A'_1 \sinh(kz) + A'_2 \cosh(kz) & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Separamos nuevamente la ecuación que nos queda:

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 + \frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = k_2^2$$

de donde obtenemos otras dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La ecuación según ϕ es:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} + k_2^2 \Psi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Psi(\phi) = B_1 \phi + B_2 & \text{si } k_2 = 0 \\ \Psi(\phi) = B'_1 \sin(k_2 \phi) + B'_2 \cos(k_2 \phi) & \text{si } k_2 \neq 0 \end{cases}$$

Pero esta función angular debe tener simetría de revolución alrededor del eje z:

$$\Psi(\phi + 2\pi) = \Psi(\phi) \Rightarrow k_2 = n \quad (\text{con } n \text{ entero}). \text{ Luego:}$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \Phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi(\phi) = B_1 \phi + B_2 & \text{si } n = 0 \\ \Phi(\phi) = B'_1 \sin(n\phi) + B'_2 \cos(n\phi) & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Queda la última ecuación diferencial:

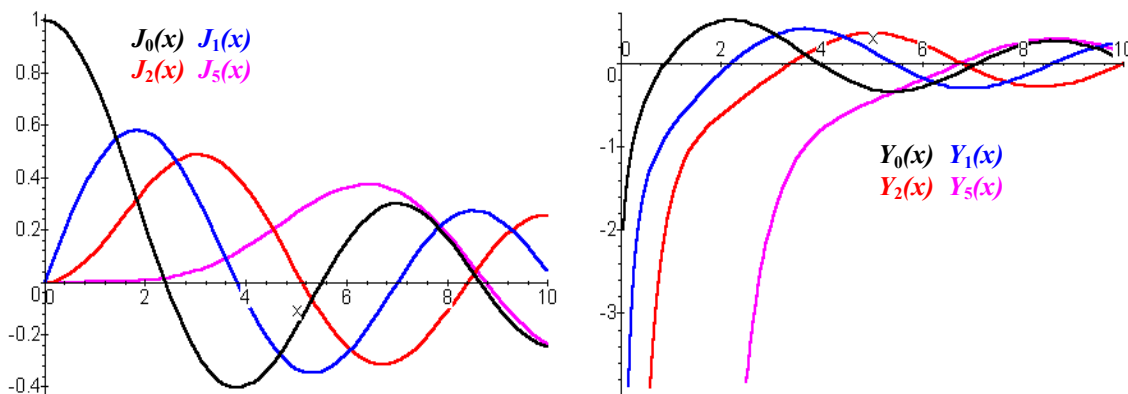
$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (k^2 \rho^2 - n^2) R = 0 \quad \text{que es la **ecuación de Bessel**. Esta ecuación$$

tiene las siguientes soluciones, según los valores de k y n :

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_n(k\rho) + C_2 Y_n(k\rho) & \text{si } k \neq 0 \\ C'_1 \rho^n + C'_2 \rho^{-n} & \text{si } k = 0 \text{ y } n \neq 0 \\ C''_1 \ln(\rho) + C''_2 & \text{si } k = 0 \text{ y } n = 0 \end{cases}$$

La última solución es el potencial logarítmico que ya hemos utilizado en problemas de simetría cilíndrica sencilla. La selección de las soluciones para un dado problema depende de las condiciones de contorno como se ilustra en el **Ejemplo 7.2**. En las siguientes gráficas se esquematiza el comportamiento de las primeras **funciones de Bessel** $J_n(x)$ (acotadas para todo x) y de **Neumann** $Y_n(x)$ (que divergen en el origen).

Debido a su singularidad en el origen de coordenadas, las funciones de Neumann sólo pueden usarse para representar un potencial en recintos que excluyan el origen de coordenadas, para que el potencial resulte acotado, como debe ser para cualquier distribución real de carga. Se observan además las oscilaciones de ambos tipos de funciones. Estas oscilaciones llevan a consecuencias tecnológicas en múltiples campos, como por ejemplo la distribución de la densidad de corriente en la sección de un conductor cilíndrico a alta frecuencia.



Comportamiento en los extremos

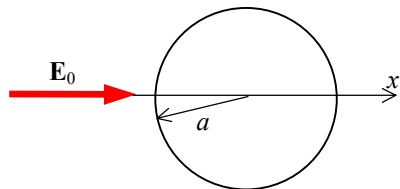
Las siguientes expresiones son aproximaciones de las funciones de Bessel y Neumann en los extremos del intervalo de definición, y son útiles para analizar el comportamiento aproximado de campos y potenciales con simetría cilíndrica.

$$x \rightarrow 0: \quad J_n(x) \rightarrow \frac{(x/2)^n}{n!} \quad Y_0(x) \rightarrow -\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{2}{\gamma x}\right) \quad Y_n(x) \rightarrow -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n$$

donde $\gamma \approx 1.78107\dots$

$$x \rightarrow \infty: \quad J_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \quad Y_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen}\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

Ejemplo 7.2: Un cilindro conductor descargado de radio a se coloca en un campo inicialmente uniforme a lo largo de un diámetro.



Suponemos el campo uniforme en la dirección $+x$, y el cilindro con su eje sobre z . El campo es cero y el potencial constante (podemos tomarlo cero porque el cilindro está descargado) para $\rho \leq a$.

Para $\rho \geq a$, el potencial no depende de z . Por lo tanto debe ser $k = 0$ y la solución es del tipo:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) (C_n \text{sen}(n\phi) + D_n \text{cos}(n\phi)) + (E \ln(\rho) + F)(G\phi + H)$$

Si el campo original es: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \hat{x} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = -E_0 x = -E_0 \rho \cos \phi$

para $\rho \rightarrow \infty$, el potencial del sistema debe tender a esta forma de dependencia. Entonces deben anularse los coeficientes de la solución logarítmica y los coeficientes de los senos.

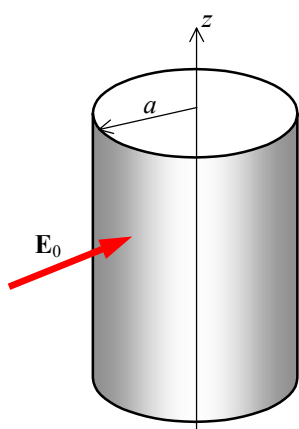
Queda así:
$$\Phi(\mathbf{r}) = -E_0 \rho \cos \phi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^{-n} \cos(n\phi)$$

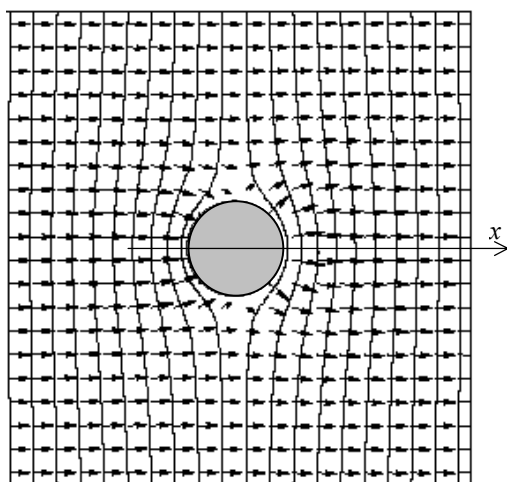
La otra condición de contorno es que $\Phi(\rho = a, \phi) = 0$, y entonces todos los B_n para $n > 1$ deben anularse para que Φ no dependa de ϕ , de donde: $B_0 = 0 \quad B_1 = E_0 a^2$

y finalmente:
$$\Phi(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \phi = E_0 \left(\frac{a^2}{\rho} - 1 \right) \cos \phi$$

El campo eléctrico será:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \hat{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \hat{\phi} = -\left[\frac{\partial}{\partial\rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\phi} \hat{\phi} \right] \left[-E_0 \rho \cos \phi + E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \phi \right]$$





$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left[E_0 \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \cos \phi \hat{\rho} - E_0 \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \sin \phi \hat{\phi} \right]$$

Se ve que para $\rho \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow E_0 (\cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}) = E_0 \hat{\mathbf{x}}$$

el valor del campo original,

y para $\rho = a$ $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2E_0 \cos \phi \hat{\rho}$ de forma

que el campo es perpendicular a la superficie del cilindro, como debe ser sobre toda superficie conductora. En la figura se esquematizan equipotenciales y líneas de campo.

La carga sobre la superficie del cilindro no es homogénea: $\sigma = \epsilon_0 E_\rho|_{\rho=a} = 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi$

Coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas el laplaciano es:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Vamos a considerar en este curso solamente problemas que presentan un **eje de simetría (problema axisimétrico)**, para simplificar las matemáticas involucradas. Podemos elegir el eje de simetría como el eje z de un sistema de coordenadas y entonces el potencial no dependerá del ángulo ϕ , de modo que podemos separar variables en la forma:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

Tenemos entonces:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \lambda(\lambda+1)$$

donde $\lambda(\lambda+1)$ es la constante de separación. La razón de la elección de esta forma matemática de la constante quedará clara más abajo.

La ecuación para θ es:
$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda(\lambda+1) \sin \theta \Theta = 0$$

Tomamos $\beta = \cos \theta$ y queda:
$$\frac{d}{d\beta} \left[(1 - \beta^2) \frac{d\Theta}{d\beta} \right] + \lambda(\lambda+1) \Theta = 0$$

Esta es la **ecuación de Legendre**. La solución en serie de potencias de esta ecuación lleva a un par de soluciones: una en potencias pares de β y otra en potencias impares de β . Ambas soluciones presentan una singularidad logarítmica para $\beta = \pm 1 \Rightarrow \theta = 0, \pi$, de manera que no son soluciones aceptables para problemas físicos donde representan un potencial eléctrico. Sin embargo, si el parámetro λ que aparece en la constante de separación es un número entero n , se encuentra que una de las series de potencias se trunca a un polinomio en β de grado n , $P_n(\beta)$ (**polinomio de Legendre**) mientras que la otra serie mantiene su singularidad logarítmica y entonces es eliminada como posible representación matemática de un potencial.

Queda entonces: $\lambda = n \Rightarrow \frac{d}{d\beta} \left[(1 - \beta^2) \frac{d\Theta}{d\beta} \right] + n(n+1) \Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A_n P_n(\cos \theta)$

Las expresiones de los primeros polinomios de Legendre ($\beta = \cos \theta$) son:

$$P_0 = 1 \quad P_1 = \beta \quad P_2 = \frac{1}{2}(3\beta^2 - 1)$$

En general:

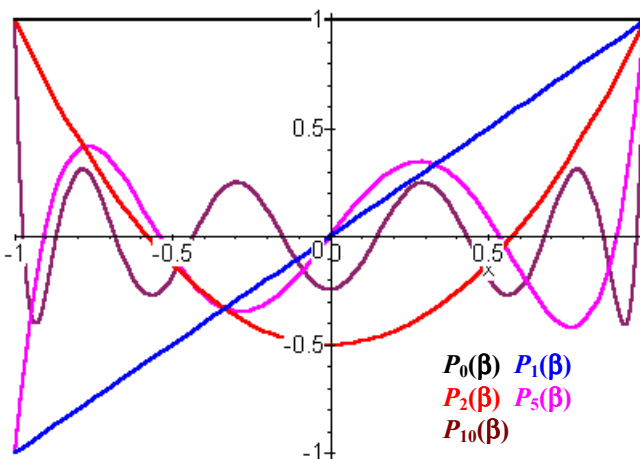
$$P_n(\beta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\beta^n} (\beta^2 - 1)^n$$

Se observan en la figura algunos de los primeros polinomios de Legendre en función de β . A medida que aumenta el orden del polinomio su comportamiento presenta más oscilaciones.

Finalmente, queda la ecuación radial:

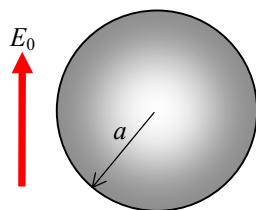
$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R = 0 \Rightarrow R(r) = C_n r^n$$

como puede comprobarse por sustitución. Finalmente, la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas axisimétricas² respecto de z es, aplicando superposición:



$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

Ejemplo 7.3: Una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ϵ_2 se coloca en un campo inicialmente uniforme en un espacio de permitividad ϵ_1 .



Suponemos el campo uniforme en la dirección $+z$, y que la esfera está centrada en el origen de coordenadas. Entonces el problema tiene simetría esférica axisimétrica. La solución general es:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

Para el interior de la esfera se deben eliminar los coeficientes B_n ya que el campo y el potencial deben ser acotados en todo el espacio: $\Phi_i(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (r \leq a)$

Para $r \geq a$, la solución es la general: $\Phi_e(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta) \quad (r \geq a)$

El campo original es: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{z} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$. Para $r \rightarrow \infty$, el potencial del sistema debe tender a esta forma de dependencia. Entonces los coeficientes C_n deben ser cero para $n > 1$ y $C_1 = -E_0$:

$$\Phi_e(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (r \geq a)$$

Las otras condiciones de contorno requieren la continuidad del potencial y de la componente normal del vector \mathbf{D} sobre la superficie de la esfera, que llevan a las condiciones:

$$\Phi_i(a, \theta) = \Phi_e(a, \theta) \Rightarrow \begin{cases} A_1 a = -E_0 a + D_1 / a^2 & n = 1 \\ A_n a^n = D_n / a^{n+1} & n > 1 \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \Phi_e}{\partial r} \right|_{r=a} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_2 A_1 = \epsilon_1 (-E_0 - D_1 / a^3) & n = 1 \\ n \epsilon_2 A_n a^{n-1} = -(n+1) \epsilon_1 D_n / a^{n+2} & n > 1 \end{cases}$$

y entonces:

$$A_1 = -\frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_0 \quad D_1 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} a^3 E_0 \quad A_n = D_n = 0 \quad (n > 1)$$

² Para sistemas no axisimétricos se deben introducir los armónicos esféricos para las funciones angulares. Por ejemplo, ver W.K.H.Panofsky & M.Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", 2nd. Ed., Addison-Wesley, Reading, 1962, Cap.5.

$$\Phi_i(r,\theta) = -\frac{3\epsilon_1 E_0}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} r \cos \theta \quad (r \leq a)$$

Finalmente:

$$\Phi_e(r,\theta) = \left[\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \frac{a^3}{r^3} - 1 \right] E_0 r \cos \theta \quad (r \geq a)$$

El campo eléctrico será:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_i = \frac{3\epsilon_1 E_0}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} (\cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{3\epsilon_1 E_0}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \hat{\mathbf{z}} \quad (r \leq a)$$

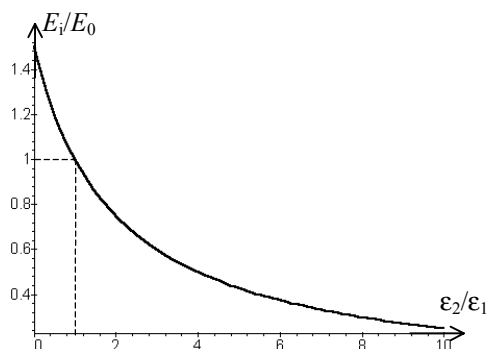
$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_e = \left(2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \frac{a^3}{r^3} + 1 \right) E_0 \cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) E_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (r \geq a)$$

Se ve que el campo dentro de la esfera es **uniforme**, y que para $r \rightarrow \infty$ tiende a $E_0 \hat{\mathbf{z}}$ que es el campo original antes de colocar la esfera. Dentro de la esfera dieléctrica:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_2 \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3\epsilon_1 \chi_2 \epsilon_0}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_0 \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{3\epsilon_1 \chi_2 \epsilon_0}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_0 \cos\theta \\ \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} = 0 \end{cases}$$

El campo eléctrico tiene componentes normal y tangencial a la superficie de la esfera.

Finalmente vamos a analizar la intensidad relativa del campo en el interior de la esfera respecto del campo exterior original. Si graficamos la relación E_i/E_0 en función de la relación entre permitividades interior/exterior ϵ_2/ϵ_1 obtenemos la gráfica de la figura.



Se observa que el campo interior es menor que el original si la permitividad de la esfera es mayor que la del medio que la rodea, pero si la permitividad de la esfera es menor que la del medio ambiente, el campo interior es **mayor** que el original:
 $\epsilon_{int} < \epsilon_{ext} \Rightarrow E_i > E_0$

Esto ocurre, por ejemplo, cuando se forma una burbuja de aire dentro de un dieléctrico. Entonces se tiene: $E_i/E_0 = 3\epsilon_{r1}/(1 + 2\epsilon_{r1})$ donde ϵ_{r1} es la permitividad relativa del dieléctrico fuera de la burbuja.

En el caso del poliestireno: $\epsilon_{r1} = 2.7 \Rightarrow \frac{E_i}{E_0} \approx 1.27$

y en el caso del agua: $\epsilon_{r1} = 80 \Rightarrow \frac{E_i}{E_0} \approx 1.5$

que es además el valor límite para $\epsilon_{r1} \rightarrow \infty$. Se ve entonces que se puede producir ruptura dieléctrica **dentro** de la burbuja aún cuando el campo no supere el valor de ruptura **fuera** de la burbuja. La ruptura dieléctrica genera calor y electrones libres que producen procesos de corrosión sobre el material dieléctrico sobre la frontera de la burbuja, que con el tiempo pueden llevar a una avalancha en el dieléctrico mismo y su ruptura. Es interesante que el campo dentro de la burbuja no depende de su tamaño, sino únicamente de las relaciones de permitividades y el campo aplicado.

Métodos numéricos para campos cuasi-estáticos

Las ecuaciones que describen los fenómenos macroscópicos del electromagnetismo se pueden resolver en forma analítica sólo en pocas situaciones, y hay numerosos ejemplos de interés tecnológico donde es imposible obtener una solución cerrada. En particular, el método usual de separación de variables requiere que las condiciones de borde se den sobre superficies coordenadas para el cálculo sencillo de las constantes de integración. De la misma manera, los efectos de borde, los campos parásitos y la presencia de irregularidades en el recinto de integración no pueden describirse mediante funciones analíticas y en muchas situaciones son justamente estos efectos los que se quiere estudiar para analizar la aplicabilidad de determinada estructura a un objetivo dado.

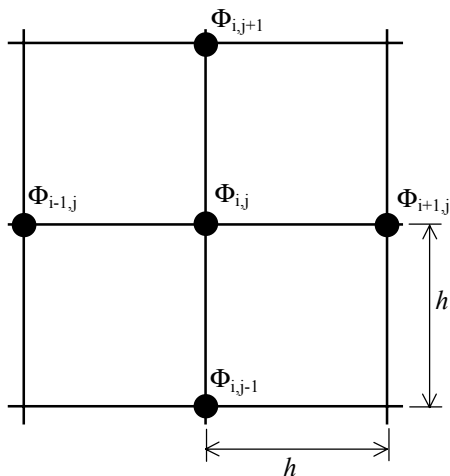
Por estos motivos desde mediados del siglo XIX se introdujeron técnicas matemáticas que extienden la aplicación de las soluciones analíticas a problemas electromagnéticos, especialmente en la teoría del potencial, y en el siglo XX el advenimiento de las computadoras de alta velocidad ha permitido el desarrollo de diversos métodos numéricos para la solución de las ecuaciones del electromagnetismo.

Vemos en este capítulo un resumen de métodos numéricos habituales para el cálculo de campos cuasi-estáticos, donde valen las ecuaciones de Poisson y Laplace.

En la teoría del potencial el objetivo es hallar soluciones de la ecuación de Poisson o la correspondiente ecuación de Laplace, con determinadas condiciones de contorno.

Existen diversos métodos numéricos usados, pero lo más usuales son el de diferencias finitas y el de elementos finitos.

Método de diferencias finitas



En este método se divide el recinto de integración en una **mall** o **grilla**, generalmente de intervalo fijo h , como se muestra en la figura.

El método consiste en reemplazar las derivadas por una representación de diferencias finitas en términos de los potenciales en los *nod*os de la malla. Por ejemplo:

$$\Phi(x_i, y_j) = \Phi_{i,j} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x_i, y_j} = \Phi'_{i,j} \approx \frac{\Phi_{i+1/2,j} - \Phi_{i-1/2,j}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{x_i, y_j} = \Phi''_{i,j} \approx \frac{\Phi'_{i+1/2,j} - \Phi'_{i-1/2,j}}{h} = \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{h^2}$$

Por lo tanto, la ecuación de Poisson puede escribirse en este esquema como:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{h^2} + \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{h^2} \approx -\frac{\rho_{i,j}}{\epsilon}$$

de donde podemos despejar:

$$\Phi_{i,j} \approx \frac{1}{4} \left(\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right)$$

Esta ecuación nos permite expresar el potencial en un nodo de la malla en función de los potenciales de los nodos que lo rodean y de la densidad de carga en el nodo mismo.

Para resolver esta ecuación hay varias alternativas. Las más sencillas son:

- Resolución directa del sistema de ecuaciones
- Resolución iterativa.

Resolución directa del sistema de ecuaciones

La ecuación:
$$\Phi_{i,j} \approx \frac{1}{4} \left(\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right)$$

se puede escribir en la forma matricial $A[\Phi] = [\rho]$

donde: $[\Phi] = \{\Phi_{ij}\}$ es la matriz de potenciales (incógnitas)

$[\rho] = \frac{h^2}{\epsilon} \{\rho_{ij}\}$ es la matriz de densidades de carga, y

$A = \{A_{ij}\} = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i = j \pm 1 \end{cases}$ es una matriz tridiagonal

La solución de este sistema de ecuaciones es: $[\Phi] = A^{-1}[\rho]$ y como la matriz inversa A^{-1} es la inversa de una matriz tridiagonal, se simplifican los cálculos.

Resolución iterativa

Aunque la resolución directa es matemáticamente irreprochable, el tamaño de la matriz a invertir, aunque sea tridiagonal, hace que este esquema sea poco práctico para mallas densas, ya que la dimensión de A es igual al número de nodos.

Existe un método de solución iterativa donde se calcula el potencial $\Phi_{i,j}$ en la n -ésima iteración en función de los valores del potencial en los puntos circundantes obtenidos en la iteración pre-

via:
$$\Phi_{i,j}^{(n)} \approx \frac{1}{4} \left(\Phi_{i-1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i,j-1}^{(n-1)} + \Phi_{i,j+1}^{(n-1)} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right)$$

Esta solución iterativa generalmente converge lentamente, por lo que se han desarrollado métodos de aceleración, de los cuales uno de los más usados en la actualidad es el método de **sobre-relajación**.

La diferencia entre dos iteraciones sucesivas para $V_{i,j}$ es:

$$\delta_{i,j}^{(n)} = \Phi_{i,j}^{(n)} - \Phi_{i,j}^{(n-1)} = \frac{1}{4} \left(\Phi_{i-1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i,j-1}^{(n-1)} + \Phi_{i,j+1}^{(n-1)} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right) - \Phi_{i,j}^{(n-1)}$$

Esta diferencia, que se conoce como **residuo**, debería tender cero cuando el cálculo haya obtenido la convergencia.

La solución iterativa puede escribirse entonces como: $\Phi_{i,j}^{(n)} = \Phi_{i,j}^{(n-1)} + \delta_{i,j}^{(n)}$

El método de sobre-relajación consiste en realizar una sobre-corrección:

$$\Phi_{i,j}^{(n)} = \Phi_{i,j}^{(n-1)} + \omega^{(n)} \delta_{i,j}^{(n)}$$

donde $\omega^{(n)}$ es un **factor de convergencia**. Se puede demostrar que se acelera la convergencia de la iteración si $1 \leq \omega^{(n)} \leq 2$. Si $\omega^{(n)} = 1$ se vuelve al método iterativo normal. En general, se optimiza la aceleración de la convergencia si $\omega^{(n)}$ cambia en cada iteración. Un esquema usado es el siguiente:

$$\omega^{(0)} = 1 \quad \omega^{(n)} = \frac{1}{1 - \rho_J^2 \omega^{(n-1)} / 4}$$

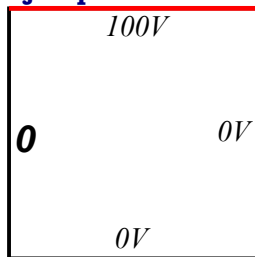
donde $\rho_J = \cos(N\pi)$ es el llamado **radio de Jacobi** y N el número de puntos de la malla de integración. Este esquema surge del análisis numérico del radio de convergencia del método de relajación.

El método iterativo no siempre converge, de manera que es necesario monitorear la convergencia. También ocurre que los primeros pasos pueden al principio dar un residuo creciente u oscilatorio antes de comenzar a descender monótonamente. Esto se debe a que se debe asumir un conjunto de potenciales de partida en los nodos, y cuanto más alejados sean estos valores iniciales de los verdaderos es mayor la posibilidad de oscilaciones de los primeros pasos de iteración. También debe tenerse en cuenta que no se debe pedir un residuo muy pequeño para terminar el proceso, ya que existen errores de truncado y redondeo que son inevitables.

Hemos descrito el método de diferencias finitas en coordenadas cartesianas, donde las ecuaciones son más sencillas. En general, este método puede aplicarse en cualquier sistema de coordenadas, pero las ecuaciones de diferencias finitas dependen de tal sistema. En general, las ecuaciones matemáticas son más complejas y, desde el punto de vista numérico, la estabilidad y convergencia del método de inversión de matriz o el método iterativo son menos conocidos que para coordenadas cartesianas.

También puede usarse una grilla cartesiana reemplazando los bordes del recinto de integración que no sean planos coordenados por una “escalera” cartesiana y admitir un error en las condiciones de borde del problema. Esta alternativa no es la mejor, pero permite aplicar alguno de los muchos paquetes de programas de diferencias finitas en coordenadas cartesianas para obtener una primera solución antes de aplicar métodos más poderosos pero más sofisticados.

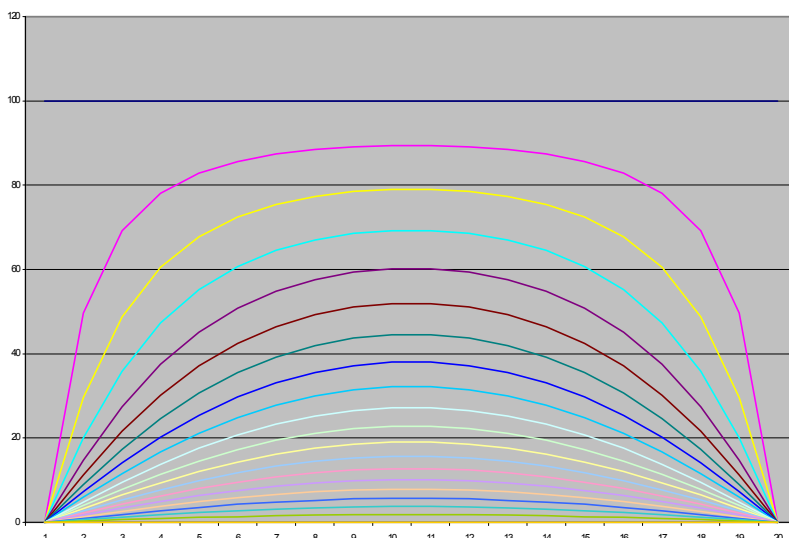
Ejemplo 7.4: Hallar numéricamente el potencial dentro del recinto cuadrado de la figura, tres de cuyos lados están a 0V y el cuarto a 100V.



El método de relajación es fácilmente programable. A continuación se muestra una tabla de un programa de hoja de cálculo. Cada celda representa un nodo de la malla de relajación. Sobre las celdas de los bordes colocamos las condiciones de contorno y en las otras celdas la fórmula de relajación que vincula el potencial en cada celda con los de sus vecinos.

	A	B	C	D	E
1	0	100	100	100	0
2	0	$(B1+B3+A2+C2)/4$	$(C1+C3+B2+D2)/4$	$(D1+D3+C2+E2)/4$	0
3	0	$(B2+B4+A3+C3)/4$	$(C2+C4+B3+D3)/4$	$(D2+D4+C3+E3)/4$	0
4	0	$(B3+B5+A4+C4)/4$	$(C3+C5+B4+D4)/4$	$(D3+D5+C4+E4)/4$	0
5	0	0	0	0	0

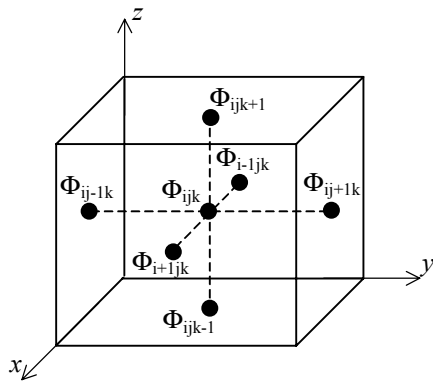
Debido a la existencia de referencias circulares, se debe usar la opción de iteración en la hoja.



En la figura se muestra el gráfico de las equipotenciales. El lado horizontal superior está a 100V. Esta gráfica surge de una hoja de cálculo de 20x20 celdas.

En el archivo **RELAX.XLS** se halla un cálculo por relajación con una malla más fina (100x100 celdas) y el mismo problema resuelto mediante sobrerrelajación.

3-D



En la figura se muestra una celda de diferencias finitas en 3-D (hay otras configuraciones posibles). Para esta celda la ecuación de relajación es:

$$\Phi_{i,j,k} \approx \frac{1}{6} \left(\Phi_{i-1,j,k} + \Phi_{i+1,j,k} + \Phi_{i,j-1,k} + \Phi_{i,j+1,k} + \Phi_{i,j,k-1} + \Phi_{i,j,k+1} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right) A$$

quí también se puede usar un método de sobrerrelajación para acelerar la convergencia.

Métodos de Monte Carlo

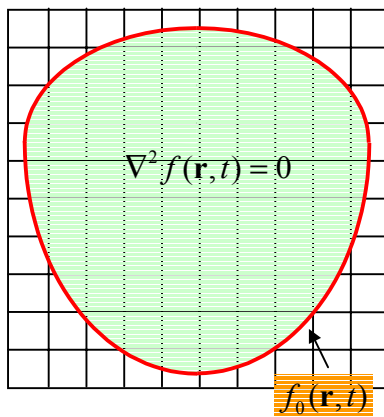
El nombre Monte Carlo se adjudica a una serie de métodos numéricos que usan la teoría de probabilidades. Estos métodos se basan en desarrollar un sistema estocástico análogo al que se quiere estudiar y luego obtener respuestas aproximadas al problema mediante ensayos estadísticos (numéricos). Estos métodos surgieron de modelizar experimentos de física nuclear, que son en sí mismos de naturaleza probabilística, y son quizás los métodos numéricos más cercanos en espíritu a las técnicas experimentales de la física.

Los métodos de Monte Carlo se pueden clasificar en dos tipos: métodos de **simulación** y métodos de **muestreo**.

En los métodos de simulación se genera un modelo matemático que imita el comportamiento probabilístico de la naturaleza. Un ejemplo típico es el modelo del movimiento de un neutrón en un reactor nuclear mediante una **caminata al azar (random walk)** que simula el movimiento browniano del neutrón.

Los métodos de muestreo tratan de **estimar** las propiedades de un **universo** de objetos a partir de las propiedades de una **muestra** o subconjunto. Por ejemplo, el valor medio de una función $f(x)$ en un intervalo $a < x < b$ se puede estimar haciendo el promedio de la función sobre un número **finito** (pero grande) de puntos dentro del intervalo. Esta idea lleva a un método de integración, por el teorema del valor medio del cálculo integral.

En el caso de la teoría del potencial la conexión entre la teoría del potencial y el método de caminata al azar fue establecida por primera vez en 1944 por Kakutani³. Este método se puede emplear para determinar el potencial en puntos interiores de un recinto cerrado donde se cumple la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet o de Neumann sobre su frontera.

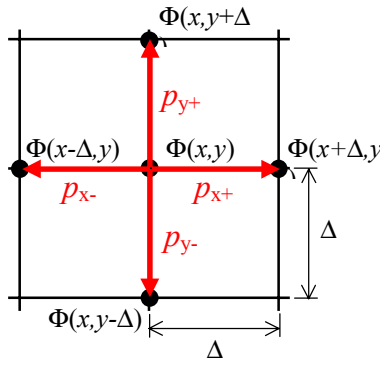


En el esquema de caminata al azar **de paso fijo**, que es el único que veremos en este curso⁴ se trata de un problema de Laplace con condiciones de Dirichlet. Colocamos una grilla cuadrada de paso Δ en el recinto de integración. De acuerdo a la aproximación de diferencias finitas de la ecuación de Laplace el potencial en un punto de la grilla es:

$$f(x, y) = p_{x+} f(x + \Delta, y) + p_{x-} f(x - \Delta, y) + p_{y+} f(x, y + \Delta) + p_{y-} f(x, y - \Delta)$$

³ S.Kakutani, "Two-dimensional brownian motion harmonic functions", Proc.Imp.Acad. (Tokio), 20, pp.706-714.

⁴ Más información sobre métodos de Monte Carlo se puede ver en M.N.O.Sadiku, "Numerical Techniques in Electromagnetics", 2nd.Ed., CRC Press, 2001, Cap.8.



con $p_{x+} = p_{x-} = p_{y+} = p_{y-} = 1/4$

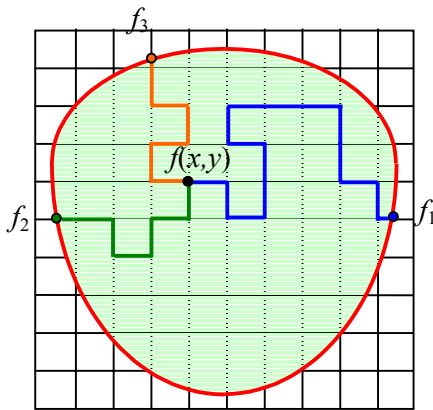
Podemos dar a esta ecuación una interpretación probabilística. Imaginemos una partícula que realiza una caminata al azar por la grilla y se halla en un instante dado en el punto (x,y) . En el siguiente movimiento la partícula tiene una probabilidad p_{x+} de saltar a $(x+\Delta,y)$, una probabilidad p_{x-} de saltar a $(x-\Delta,y)$, etc. (en este esquema todos los saltos son equiprobables, pero podemos imaginar otras situaciones). Para decidir cuál salto se realiza, producimos un número al azar λ menor que 1 tal que:

si $0 < \lambda < 1/4 \Rightarrow (x,y) \rightarrow (x+\Delta,y)$

si $1/4 < \lambda < 1/2 \Rightarrow (x,y) \rightarrow (x-\Delta,y)$

si $1/2 < \lambda < 3/4 \Rightarrow (x,y) \rightarrow (x,y+\Delta)$

si $3/4 < \lambda < 1 \Rightarrow (x,y) \rightarrow (x,y-\Delta)$



Repetiendo este paso se genera una caminata al azar a través de la grilla. El método de cálculo se basa en este procedimiento: para calcular el valor de la función en un punto interior $f(x,y)$ se realizan múltiples caminatas al azar comenzando desde el punto (x,y) . La caminata se termina cuando toca la frontera del recinto y se toma nota del valor f_i de la función sobre la frontera en el punto de llegada. Es posible demostrar que, si se hacen N caminatas al azar, con N muy grande, se tiene:

$f(x,y) \rightarrow \bar{f} \pm \delta$ con

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i$$

$$\delta = \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}} \approx \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N f_i^2 - \bar{f}^2 \right]$$

En esta expresión el error estimado corresponde al valor de la desviación estándar de f considerada como una variable aleatoria. Esto da una probabilidad del 69% de que el valor verdadero de se halle en el intervalo de error. Si se desea una probabilidad mayor, se puede tomar 2δ , con lo que la probabilidad crece al 95%.

Este procedimiento permite calcular el potencial en un solo punto del interior del recinto. Si se desea conocer el potencial en otros puntos se debe repetir por completo. Esto hace que este método no sea el más eficiente, pero es rápido y sencillo de programar para casos donde no se requiere el potencial dentro de todo el recinto, sino únicamente en algunos "puntos calientes" como por ejemplo en el diseño contra los problemas derivados del efecto corona.

En este curso vamos a usar una implementación en Excel realizada y gentilmente cedida por el Dr. Ctibor Henzl, de la Universidad Técnica de Ostrava, República Checa (**MONTEC.ZIP** contiene un artículo explicativo - MONTEC.SH5 y la implementación MONTEC.XLS).

Método de elementos finitos⁵

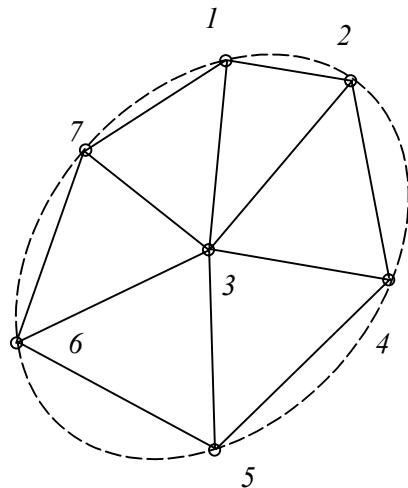
El método de diferencias finitas se puede utilizar con máxima eficiencia en problemas donde es posible definir una malla a lo largo de los ejes coordenados, pero cuando el recinto de integración es de forma compleja muchas veces esto no es posible. En los últimos años se han desarrollado métodos numéricos que permiten resolver situaciones de recintos con fronteras de forma geométrica compleja y también recintos ilimitados, con adecuadas condiciones en el infinito.

Estos métodos se basan en la técnica de **elementos finitos** (Finite Element Method - **FEM**), que tiene su origen en el campo del análisis estructural, y se ha aplicado a problemas electromagnéticos desde 1968. En este método existen básicamente cuatro pasos:

- dividir el recinto de integración en un número finito de regiones o elementos,
- deducir las ecuaciones que describen el potencial y/o los campos dentro de un elemento cualquiera,
- plantear las ecuaciones que dan las condiciones de ajuste de las soluciones en las superficies frontera entre elementos, y
- resolver estas ecuaciones.

Generación de los elementos finitos

Se divide el recinto de integración en un número de **elementos finitos** (superficies pequeñas) como se indica en la figura para un caso bidimensional. La



forma de los elementos puede ser cualquiera, aunque es habitual utilizar triángulos, para los que las ecuaciones de variación del potencial y las condiciones de frontera resultan las más sencillas (los elementos más sencillos en tres dimensiones resultan ser tetraedros).

La variación del potencial eléctrico dentro de un elemento dado (el i -ésimo) será $\Phi^{(i)}(x, y)$. Por superposición, el valor aproximado del potencial dentro del recinto de integración será:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^N \Phi^{(i)}(x, y)$$

donde N es el número de elementos finitos en que se ha dividido el recinto de integración. La forma más sencilla del poten-

cial dentro de un elemento es:

$$\Phi^{(i)}(x, y) = a^{(i)} + b^{(i)}x + c^{(i)}y$$

Esta es la llamada aproximación de primer orden, que es sencilla desde un punto de vista matemático, pero involucra en general errores de posible importancia en la determinación de la solución, por lo que generalmente los programas comerciales usan potenciales de orden superior.

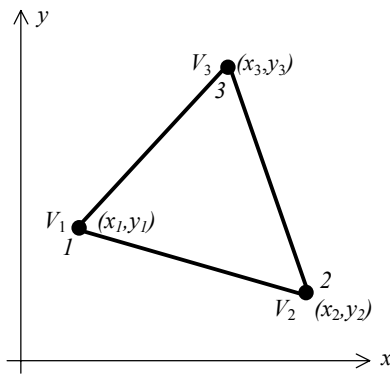
En esta aproximación, el campo eléctrico dentro del elemento es constante:

$$\vec{E}^{(i)}(x, y) = -\nabla\Phi^{(i)}(x, y) = -\left(b^{(i)}\hat{x} + c^{(i)}\hat{y}\right)$$

Ecuaciones de la solución en cada elemento

Consideremos un elemento triangular como el de la figura. Los potenciales en los nodos se obtienen a partir de la ecuación $\Phi(x, y) = a + bx + cy$, que podemos escribir en la forma matricial:

⁵ El material de esta sección se ha tomado fundamentalmente de P.P.Silvester y R.L.Ferrari, "Elementos Finitos para Ingeniería Eléctrica", Noriega Editores, Ed. Limusa, México D.F., 1989.



$$\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

donde, en esta sección, suprimimos los superíndices que identifican al elemento, ya que trabajaremos con uno solo, y, en particular, para los vértices, esta ecuación nos queda:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

de aquí se pueden determinar los coeficientes a, b y c :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}$$

donde A es el área del elemento:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) = [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$$

El valor de A es positivo si se numeran los nodos en el sentido antihorario, como se muestra en la figura anterior.

Reemplazando los coeficientes en la ecuación matricial (9) se obtiene el potencial dentro del elemento en función de los potenciales de sus vértices:

$$\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}$$

que también puede escribirse:
$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) \Phi_i$$

$$\alpha_1(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

donde:
$$\alpha_2(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$\alpha_3(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

Se observa que esta ecuación, la ecuación **FEM**, da el potencial (aproximado) en **cualquier punto** en el interior del elemento, y que las funciones $\alpha_i(x, y)$ son funciones de interpolación lineal, en este caso en que elegimos un método de primer orden. estas funciones se conocen como **funciones de forma del elemento**, y satisfacen las propiedades:

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1$$

En el caso de las diferencias finitas, el método da el potencial (aproximado) **solamente** en los puntos de la malla de integración. Se puede interpolar (en un paso posterior) para obtener el potencial en cualquier punto del recinto de integración.

Hasta aquí hemos realizado solamente una descripción **geométrica** de la forma de expresar el potencial eléctrico en una región en términos de los valores que adopta en un conjunto de nodos que forman los elementos finitos. La **física** del problema se introduce en general a través de consideraciones energéticas: **de las infinitas soluciones posibles a un problema de potencial debe seleccionarse aquella que hace mínima la energía del campo.**

Si suponemos que el recinto de integración plano representa una sección de un recinto espacial, la energía por unidad de longitud asociada a un elemento está dada por:

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon |\vec{E}|^2 dS = \frac{1}{2} \int \epsilon |\nabla \Phi|^2 dS$$

Pero, usando la ecuación FEM:

$$|\nabla \Phi|^2 = \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi = \left(\sum_{i=1}^3 \Phi_i \vec{\nabla} \alpha_i(x, y) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \Phi_i \vec{\nabla} \alpha_i(x, y) \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Phi_i \Phi_j \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j$$

y entonces:

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Phi_i \Phi_j \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dS = \frac{1}{2} \epsilon [\Phi]^T C [\Phi]$$

donde $[\Phi]$ es el vector de potenciales de los vértices: $[\Phi]^T = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3]$

y C es una matriz de coeficientes: $C = \{C_{ij}\} = \int \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dS$

La matriz C se conoce como **matriz de coeficientes de elementos** (en mecánica estructural se conoce como **matriz de rigidez**). El coeficiente C_{ij} puede considerarse como un factor de acoplamiento entre los nodos i y j . La forma explícita de estos coeficientes se pueden obtener a partir de su definición, como por ejemplo:

$$\begin{aligned} C_{12} &= \int \vec{\nabla} \alpha_1 \cdot \vec{\nabla} \alpha_2 dS = \frac{1}{4A^2} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \int dS \\ &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \end{aligned}$$

También es posible demostrar que $C_{ij} = C_{ji}$, es decir, que la matriz de coeficientes de elementos es simétrica.

Ensamble de las soluciones para el conjunto de elementos

Una vez resuelto el problema para un elemento, es necesario ensamblar todos los elementos para hallar la solución en todo el recinto de integración. Adelantamos en la sección previa que una forma de hacerlo es a través de la **minimización de la energía** del conjunto.

La energía del elemento i -ésimo es :
$$W = \sum_{i=1}^N W^{(i)} = \frac{\epsilon}{2} [\Phi]^{(i)T} C^{(i)} [\Phi]^{(i)}$$

y la energía del conjunto de elementos es :

El problema más importante en este punto es expresar la **matriz de coeficientes global** C en términos de las matrices de coeficientes de elementos $C^{(i)}$. Para ello se establecen relaciones topológicas en la red, de acuerdo a la conexión entre los nodos. Los coeficientes de la matriz global tienen varias propiedades generales:

- 1) es simétrica ($C_{ij} = C_{ji}$);
- 2) es una matriz poco densa (*sparse*) y de banda, debido a que $C_{ij} = 0$ si no hay conexión entre los nodos i y j .

3) es una matriz singular, debido a que sus filas (o columnas) no son linealmente independientes.

Resolución del sistema de ecuaciones lineales

El cálculo variacional establece que la ecuación de Laplace (o de Poisson) se satisface cuando la energía total en la región considerada es mínima. Esto lleva a que las derivadas parciales de la energía total respecto de cada valor de potencial de nodos sean cero:

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Estas ecuaciones nos lleva a un sistema lineal homogéneo: $\sum_{i=1}^N \Phi_i C_{ik} = 0$

cuya solución se puede obtener por diversos métodos, entre ellos el de relajación descrito en la sección previa.

RESUMEN

Se han presentado algunos métodos de resolución de las ecuaciones de la teoría del potencial estática. Estas ecuaciones (y las correspondientes soluciones) son aplicables también a **casos cuasi-estáticos**.

- Los potenciales que cumplen ecuaciones diferenciales lineales del tipo de Poisson y Laplace son:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon \quad \text{potencial electrostático}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \text{potencial vectorial magnético}$$

$$\nabla^2 \Psi_m(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{potencial escalar magnético}$$

- Un **problema de potencial** consiste en resolver alguna de las ecuaciones anteriores [$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t)$] junto con un conjunto de **condiciones de contorno** o de borde sobre la frontera que delimita el recinto de integración y/o las fronteras internas entre regiones de propiedades diferentes. Estas condiciones se clasifican como:

Condición de Dirichlet: $S: f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r}, t)$

Condición de Neumann: $S: \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f_0}{\partial n}$

- En pocos y afortunados casos existen **soluciones analíticas**. Una de las técnicas más usadas para obtener soluciones analíticas es el método de **separación de variables**, que da **desarrollos en serie de Fourier** de las soluciones.

Se presentan las funciones base de estos desarrollos en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

El método de separación de variables es aplicable cuando las fronteras del recinto de integración se pueden asimilar a superficies de coordenada constante en el sistema de coordenadas a utilizar.

- En general es necesario usar **métodos numéricos**. El método numérico más sencillo es el de **diferencias finitas**, que se basa en construir una grilla – habitualmente equiespaciada – y reemplazar las derivadas por diferencias finitas de los valores de la función potencial sobre los puntos de la grilla. En 2D la ecuación de Poisson de la electrostática lleva a la ecuación de diferencias finitas:

$$\Phi_{i,j} \approx \frac{1}{4} \left(\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right)$$

- Este es un sistema lineal de ecuaciones que puede resolverse directamente o por iteración. En el método iterativo la técnica usual es la **sobrerrelajación**.
- El método de diferencias finitas es adecuado cuando se puede asimilar la frontera del recinto de integración a superficies de coordenada constante en el sistema de coordenadas a usar.
- En general, para recintos de forma cualquiera, es aplicable el llamado método de **elementos finitos** que se basa en dividir el recinto en pequeños elementos, habitualmente triangulares, donde se postula una forma matemática de variación del potencial. El método consiste en ajustar nodo a nodo las funciones potenciales de elementos adyacentes, lo que lleva a un sistema de ecuaciones lineales.

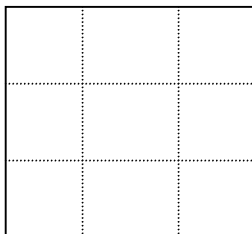
PROBLEMAS

- 7.1) Dos placas conductoras paralelas están separadas por una distancia d y se mantienen a potenciales de 0 y V_0 . La región entre las placas está llena con una distribución continua de electrones que tiene densidad volumétrica de carga $\rho = -\rho_0 z/d$. Una de las placas está ubicada en $z=0$ y la otra en $z=d$. Calcular a) el potencial en cualquier punto entre las placas y b) las densidades superficiales de carga en las placas.
- 7.2) Halle el potencial eléctrico a partir de la ecuación de Laplace y el campo eléctrico para la región entre dos cilindros concéntricos muy largos, donde los potenciales aplicados valen $\Phi(1\text{ mm}) = 0\text{ V}$ y $\Phi(20\text{ mm}) = 150\text{ V}$.
- 7.3) Los radios interior y exterior de dos delgadas capas esféricas conductoras y concéntricas son R_i y R_o , respectivamente. El espacio entre las capas está lleno con un material aislante. La capa interior se mantiene a un potencial V_1 y la exterior a V_2 . Determine la distribución de potencial en el material aislante resolviendo la ecuación de Laplace. Utilizando apropiadamente este último resultado halle el potencial en la región $R > R_o$.
- 7.4) Se desea obtener, a partir de la ecuación de Poisson, el potencial en todo punto del espacio para las siguientes distribuciones de carga:
- Un plano infinito con densidad de carga superficial constante σ_0 .
 - Una esfera de radio R que contiene una densidad de carga volumétrica distribuida $\rho(r) = Ar^n$, con A constante y $n \geq -1$.
 - Un cilindro infinito de radio a con una densidad de carga volumétrica constante ρ_0 rodeado por un cilindro hueco concéntrico de radio b con densidad de carga superficial σ_0 .
- 7.5) Resuelva la ecuación de Laplace para la región entre dos conos coaxiales (orientados según el eje z) que están a potenciales $V_1(\theta = \theta_1)$ y $V_2(\theta = \theta_2)$. Los vértices de los conos están aislados en $r=0$. Considere $\theta_1 = 10^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$, y $V_1 = 100\text{ V}$. ¿A qué ángulo el voltaje es de 50 V ? [Rta: 17.41°]

7.6) En un recinto rectangular bidimensional y libre de cargas en su interior, el potencial está

dado por:
$$\Phi(x, y) = \sum_{n \text{ impar}} \frac{4\Phi_0}{n\pi} \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \sin(n\pi y/b)$$

a) Determinar los potenciales en el contorno. Sugerencia:
$$\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$



b) Si $a = b$ y $\Phi_0 = 15\text{ V}$, calcular por el método de las diferencias finitas el potencial en los nodos internos equidistantes que indica la figura. Comparar con el resultado exacto.

c) ¿Cómo se modifican los resultados del punto b) si además se tiene $\Phi(x, b) = 10\text{ V}$?

7.7) El potencial dentro de un cilindro de longitud L y radio a orientado según el eje z está dado por

$$\Phi(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\Phi_0}{p_m J_1(p_m)} \frac{\text{sh}(p_m L/a)}{\text{sh}(p_m L/a)} \text{sh}\left(\frac{p_m z}{a}\right) J_0\left(\frac{p_m r}{a}\right)$$

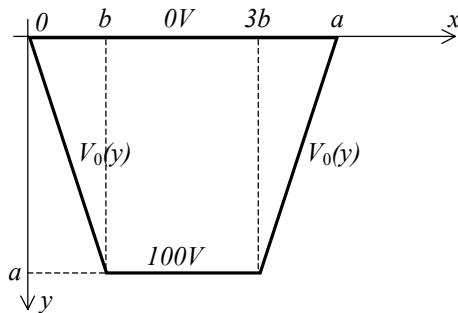
donde p_m es la raíz m -ésima de la función de Bessel J_0 .

- a) Elija valores para a , L y Φ_0 apropiados y grafique el potencial. Trate de determinar las condiciones de contorno sobre las paredes del cilindro.
- b) Si ahora, también $\Phi(r < a, 0) = V_0$, ¿cuál es la expresión del potencial?. Sugerencia: utilice superposición.
- c) Obtenga numéricamente el campo eléctrico en el eje del cilindro.

m	p_m	$J_1(p_m)$	m	p_m	$J_1(p_m)$
1	2.4048	0.5191	6	18.0711	0.1877
2	5.5201	0.3403	7	21.2116	0.1733
3	8.6537	0.2715	8	24.3525	0.1617
4	11.7915	0.2325	9	27.4935	0.1522
5	14.9309	0.2065	10	30.6346	0.1442

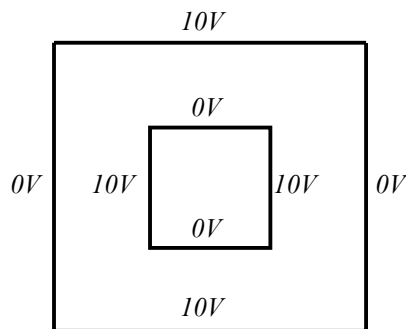
5.8) A partir de los resultados del **Ejemplo 7.3** obtenga el potencial de una esfera conductora de radio a colocada en un campo exterior uniforme.

5.9) Ejemplo de RELAX.XLS. Resolver en forma analítica.



5.10) a) Calcule y grafique el potencial por el método de relajación (y sobrerrelajación) para el recinto trapezoidal de la figura, donde $b = a/4$ y el potencial varía linealmente sobre los lados oblicuos en la forma: $V_0(y) = 100 y/a$.

b) Calcule numéricamente el campo eléctrico.



5.11) Hallar la distribución de potencial, a partir de los métodos de relajación y sobrerrelajación, dentro del recinto que indica la figura.