

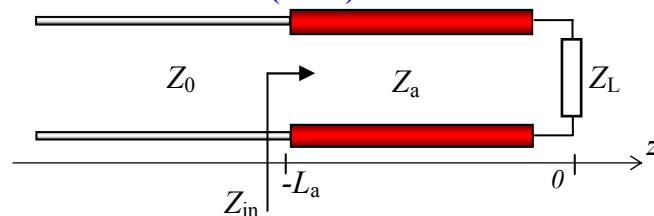
6 - Líneas de Transmisión (cont.)

Adaptación de impedancias

Es común que se deba conectar una carga a una línea de impedancia característica diferente. En tal caso existirá una onda reflejada que disminuye la potencia entregada a la carga y puede tener efectos adversos en el generador, crear sobretensiones y sobrecorrientes sobre la línea capaces de causar daños, etc. Para evitar estas situaciones problemáticas existen distintos mecanismos de **adaptación** entre la línea y la carga. Veremos los más sencillos a continuación.

Como es lo habitual en las aplicaciones, supondremos que las líneas son ideales o de bajas pérdidas, por lo que tomamos reales a la impedancia característica y la constante de propagación. Por simplicidad en la introducción también supondremos que la carga es real

- **Transformador (línea) de cuarto de onda**



Se trata de un trozo de línea de longitud L_a y de impedancia característica Z_a . Para la adaptación, se requiere que la impedancia de entrada del conjunto carga + adaptador sea igual a la impedancia característica de la línea original Z_0 :

$$Z_{in} = Z(-L_a) = Z_a \frac{Z_L \cos(k L_a) + i Z_a \sin(k L_a)}{Z_a \cos(k L_a) + i Z_L \sin(k L_a)} = Z_0$$

Luego: $Z_a Z_L \cos(k L_a) + i Z_a^2 \sin(k L_a) = Z_a Z_0 \cos(k L_a) + i Z_L Z_0 \sin(k L_a)$

Para que se cumpla esta igualdad deben igualarse por separado las partes reales e imaginarias de ambos miembros:

$$Z_a Z_L \cos(k L_a) = Z_a Z_0 \cos(k L_a)$$

$$Z_a^2 \sin(k L_a) = Z_L Z_0 \sin(k L_a)$$

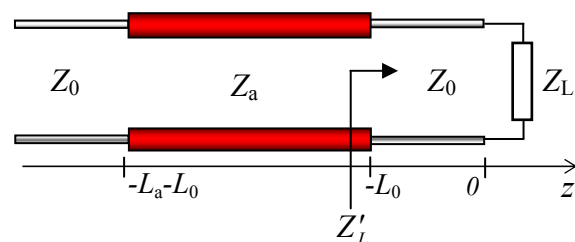
La primera ecuación, si el coseno es no nulo, requiere que $Z_L = Z_0$, pero esto no ocurre por hipótesis, ya que en tal caso no sería necesaria la adaptación. Entonces la igualdad sólo es válida si se anula el coseno:

$$\cos(k_a L_a) = 0 \Rightarrow k_a L_a = 2\pi \frac{L_a}{\lambda_a} = n \frac{\pi}{2} \Rightarrow L_a = n \frac{\lambda_a}{4}$$

Si $n = 1 \Rightarrow L_a = \lambda_a / 4$ y esta es la longitud más corta de la línea adaptadora, que por tal motivo se llama línea de **cuarto de onda**. Con esta condición el seno en la segunda ecuación vale 1 y se satisface la igualdad si:

$$Z_a^2 = Z_L Z_0 \Rightarrow Z_a = \sqrt{Z_0 Z_L}$$

que es la media geométrica de las impedancias que se quieren adaptar.



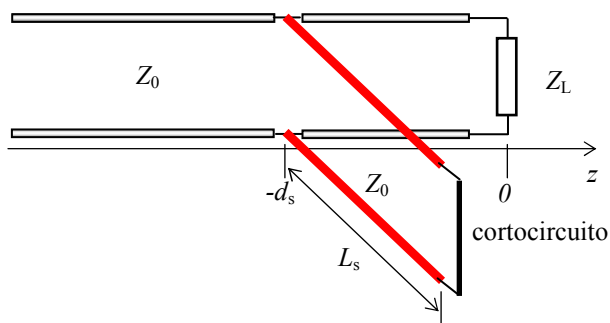
Consideremos ahora la adaptación cuando la carga es compleja. En este caso se coloca el adaptador a una distancia L_0 de la carga para la cual la impedancia de entrada Z'_L es real y entonces:

$$Z_a = \sqrt{Z'_L Z_0}$$

La adaptación por este método se realiza en forma sencilla usando la carta de Smith que veremos más adelante.

La adaptación de impedancias por línea de cuarto de onda se da para una única frecuencia, aquella en que $L_a = \lambda_a / 4$

• **Adaptador (stub)**



Muchas veces no es posible tener una línea con la impedancia característica necesaria para un adaptador de cuarto de onda. Suele usarse un **stub**, que habitualmente es un trozo de la misma línea que se conecta en paralelo con el conjunto línea+carga para lograr la adaptación de impedancias. Normalmente el extremo de carga (extremo lejano) del stub se cortocircuita para minimizar la emisión de radiación electromagnética que podría causar interferencias.

El diseño del stub consiste en definir la longitud del stub L_s y la posición $-d_s$ en la que debe ubicarse. En el punto de conexión la admitancia del conjunto es la suma de las admitancias del stub y la admitancia de entrada del conjunto línea+carga. Esa admitancia debe ser igual a $1/Z_0$ para la adaptación.

Si la carga es resistiva quedan las ecuaciones para las admitancias de entrada:

línea+carga:
$$Y(-d_s) = Y_0 \frac{Y_L \cos(kd) + iY_0 \sin(kd)}{Y_0 \cos(kd) + iY_L \sin(kd)} = Y_0 \frac{Y_L Y_0 + \frac{i}{2}(Y_0^2 - Y_L^2) \sin(2kd)}{Y_0^2 \cos^2(kd) + Y_L^2 \sin^2(kd)}$$

stub:
$$Y(-L_s) = -iY_0 \cotan(kL_s)$$

de modo que para adaptación:
$$Y_0 = Y(-d_s) + Y(-L_s)$$

Operando:
$$Y_0 = Y_0 \frac{Y_L Y_0 + \frac{i}{2}(Y_0^2 - Y_L^2) \sin(2kd)}{Y_0^2 \cos^2(kd) + Y_L^2 \sin^2(kd)} - iY_0 \cotan(kL_s) \quad \text{de donde:}$$

$$\frac{Y_L Y_0}{Y_0^2 \cos^2(kd_s) + Y_L^2 \sin^2(kd_s)} = 1 \quad \Rightarrow \quad d_s = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{Z_L / Z_0} \right)$$

$$\frac{(Y_0^2 - Y_L^2) \sin(2kd)}{Y_0^2 \cos^2(kd) + Y_L^2 \sin^2(kd)} = 2 \cotan(kL_s) \quad \Rightarrow \quad L_s = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{Z_L Z_0}}{Z_L - Z_0} \right)$$

Estas ecuaciones permiten diseñar la adaptación. Son válidas únicamente para cargas resistivas.

En el caso general de cargas no resistivas es más fácil utilizar la carta de Smith para diseñar los adaptadores, cosa que veremos más adelante.

Ejemplo 6.12: Una línea de transmisión coaxil de tipo RG58 está terminada en una carga de valor $Z_L = 175 \Omega$. Se desea acoplarla por medio de un coaxil adaptador de $\lambda/4$ a 10MHz. Calcule la impedancia característica y la longitud del adaptador.

De la tabla de la p.6.10 tenemos que $Z_0 = 50\Omega$. La impedancia característica del adaptador debe ser:

$$Z_a = \sqrt{Z_0 Z_L} \approx 93.5\Omega$$

De la tabla de la p.6.10 se ve que el cable tipo RG62 A/U tiene la impedancia adecuada.

La velocidad de propagación es $v_f = 0.85c$. La longitud del adaptador entonces es:

$$L_a = \frac{\lambda_a}{4} = \frac{v_a}{4f} \approx 6.38m$$

Ejemplo 6.13: Realice la adaptación del Ejemplo previo usando un stub cortocircuitado de la misma línea.

Las ecuaciones de diseño son:
$$d_s = \frac{v}{2\pi f} \tan^{-1} \left(\sqrt{Z_L / Z_0} \right) \quad L_s = \frac{v}{2\pi f} \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{Z_L Z_0}}{Z_L - Z_0} \right)$$

De la tabla de la pág. 235 se tiene para el cable RG58: $Z_0 = 50\Omega$, $v_r = 0.66c$ y entonces:

$$d_s = \frac{v}{2\pi f} \tan^{-1}\left(\sqrt{Z_L/Z_0}\right) \approx 3.4m \quad L_s = \frac{v}{2\pi f} \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{Z_L Z_0}}{Z_L - Z_0}\right) \approx 3.09m$$

Nuevamente en este caso la adaptación funciona a una única frecuencia, porque los parámetros de diseño son proporcionales a la longitud de onda en la línea a la frecuencia de adaptación. Si se cambia esta frecuencia se debe cambiar la longitud del stub y su posición. La longitud se puede modificar con cierta facilidad, colocando un cortocircuito móvil en el extremo de carga, pero la posición es difícilmente variable. Sin embargo, si se usan **dos o más** stubs es posible variar la frecuencia de adaptación cambiando **únicamente sus longitudes**¹.

Carta de Smith

La impedancia de onda relativa a la impedancia característica puede escribirse:

$$\frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{e^{-ikz} + \rho_L e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho_L e^{ikz}} = \frac{1 + \rho_L e^{i2kz}}{1 - \rho_L e^{i2kz}} = \frac{1 + |\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}}{1 - |\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}}$$

Esta ecuación es del tipo: $z = \frac{1+w}{1-w}$ donde $z = r + ix$ y $w = u + iv$.

Tal ecuación se conoce como una **transformación bilineal** (se puede demostrar fácilmente que $w = \frac{z-1}{z+1}$) y se caracteriza porque las líneas de r constante o las líneas de x constante resultan circunferencias en el plano w . Como $|\rho_L| \leq 1$ el diagrama completo se halla dentro del círculo de radio unitario. Podemos demostrar que la forma de las curvas de r constante o x constante son circunferencias:

Partimos de:
$$r + ix = \frac{1+u+iv}{1-u-iv} = \frac{(1+u+iv)(1-u+iv)}{(1-u)^2 + v^2} = \frac{1-u^2-v^2+i2v}{(1-u)^2 + v^2}$$

Luego:
$$r = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2 + v^2} \quad x = \frac{2v}{(1-u)^2 + v^2}$$

de donde:
$$r = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2 + v^2} \Rightarrow (1+r)u^2 - 2ru + (1+r)v^2 = 1-r$$

completamos cuadrados:
$$u^2 - 2\frac{r}{1+r}u + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1-r}{1+r} + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2$$

y finalmente:
$$\left[u - r/(1+r)\right]^2 + v^2 = 1/(1+r)^2$$

de donde se ve que las líneas de r constante son circunferencias de radio $1/(1+r)$ y centradas en el punto $r/(1+r)$.

Se ve también que el círculo para $r = 0$ tiene la ecuación $u^2 + v^2 = 1$ y coincide con el círculo exterior de la carta y que el círculo para $r \rightarrow \infty$ tiene la ecuación $[u-1]^2 + v^2 = 0$ y coincide con el punto $(1,0)$.

Análogamente, de la ecuación para x :

$$x = \frac{2v}{(1-u)^2 + v^2} \Rightarrow (1-u)^2 + v^2 - 2\frac{v}{x} = 0 \Rightarrow (1-u)^2 + v^2 - 2\frac{v}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

y finalmente:
$$\left[u-1\right]^2 + \left[v-1/x\right]^2 = 1/x^2$$

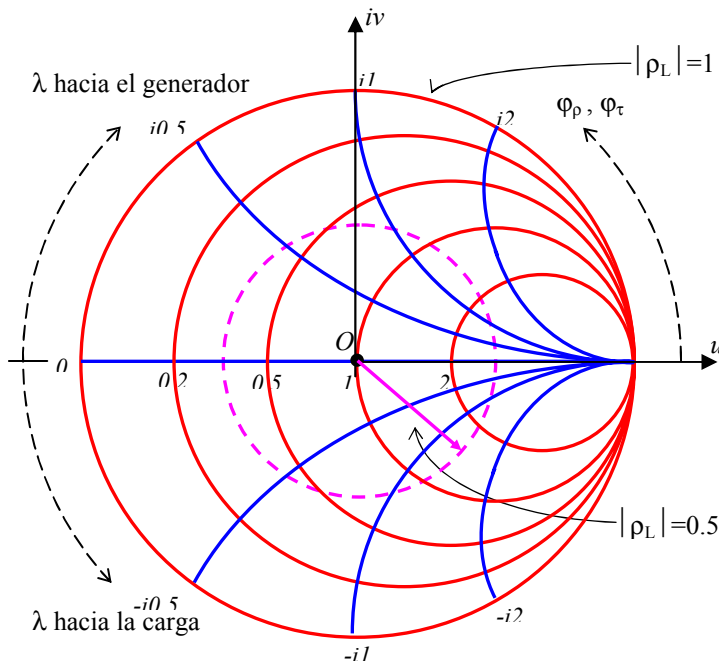
¹ Ver, por ejemplo, R. Neli Vera, "Líneas de Transmisión", McGraw-Hill Interamericana, México., 199, pp. 182 y posteriores.

de donde se ve que las líneas de x constante son circunferencias de radio $1/x$ y centradas en el punto $(1, 1/x)$.

Para $x = 0$ el radio se hace infinito y la curva coincide con el eje real. Para $x \rightarrow \infty$ se tiene la ecuación $[u - 1]^2 + v^2 = 0$, que nuevamente coincide con el punto $(1, 0)$.

En este diagrama los ejes (u, v) representan las partes real e imaginaria del complejo $|\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}$ mientras que $r = \text{Re}[Z(z)/Z_0]$ (valores señalados sobre el eje horizontal) y $x = \text{Im}[Z(z)/Z_0]$ (valores señalados sobre el círculo exterior) son los valores, normalizados a la impedancia característica de la línea, de la parte real e imaginaria de la impedancia de onda.

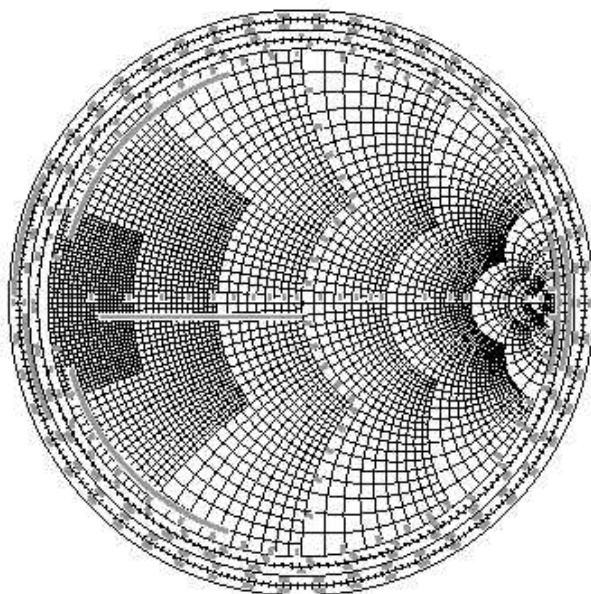
Por convención, el ángulo ϕ del fasor ρ_L se mide desde el eje real positivo en sentido antihorario.



Variar la posición sobre la línea implica cambiar el ángulo de fase del complejo (u, v) , lo que implica girar alrededor del centro del diagrama a $|\rho_L|$ constante (ρ_L es constante porque depende de las impedancias característica y de carga, pero no de la posición en la línea).

Como los ángulos aumentan convencionalmente en el sentido antihorario, y el sentido positivo de la coordenada z es hacia la carga, **un giro antihorario representa un movimiento hacia la carga**, y **el giro horario un movimiento hacia el generador**. El círculo exterior del diagrama permite medir estos desplazamientos, calibrados en longitudes de onda. El cero de desplazamiento se coloca sobre el eje real negativo. Dado que se miden **diferen-**

cias de longitud (la posición a lo largo de la línea respecto de la posición de la carga) no importa dónde se ponga el cero.



La carta de Smith se usa para calcular impedancias de entrada, ROE, coeficientes de reflexión y otros datos sólo con una regla y un compás, sin usar funciones trigonométricas o hiperbólicas, lo que facilita los cálculos. Aunque hemos deducido sus ecuaciones para líneas sin pérdidas (Z_0 real), es posible extender su uso a líneas con bajas pérdidas. En la figura se muestra una carta estándar (archivo **SMITH.PDF**).

Las aplicaciones de cálculo básicas de la carta de Smith a líneas sin pérdidas son:

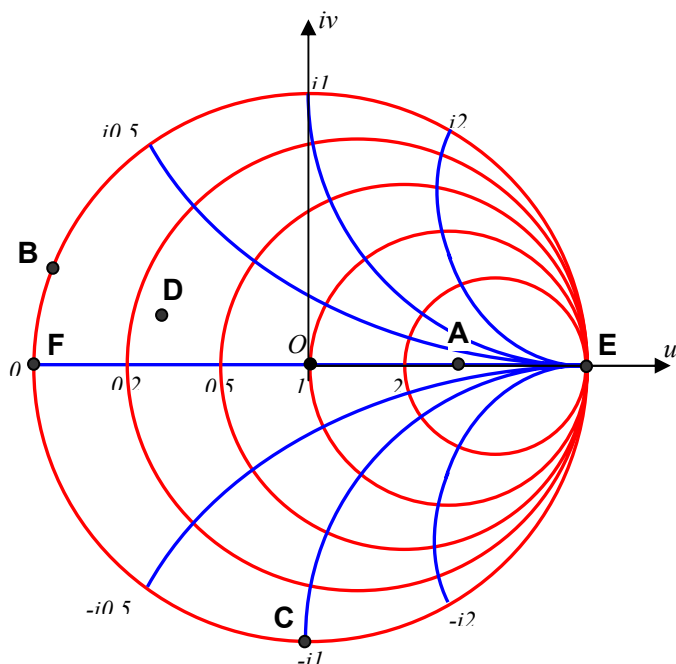
- Dada $Z(z)$ obtener $\rho(z)$
Dada $\rho(z)$ obtener $Z(z)$
- Dados Z_L y ρ_L obtener $Z(z)$ y $\rho(z)$
Dados $Z(z)$ y $\rho(z)$ obtener Z_L y ρ_L
- Hallar posiciones y valores de máximos y mínimos de tensión sobre la línea.

- Hallar la ROE.
- Dada $Z(z)$ obtener $Y(z)$
- Dada $Y(z)$ obtener $Z(z)$

Ejemplos de uso de la carta de Smith

La operación básica con la carta de Smith consiste en ubicar una impedancia, como se explica en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.14: Ubicar sobre la carta de Smith las siguientes impedancias:

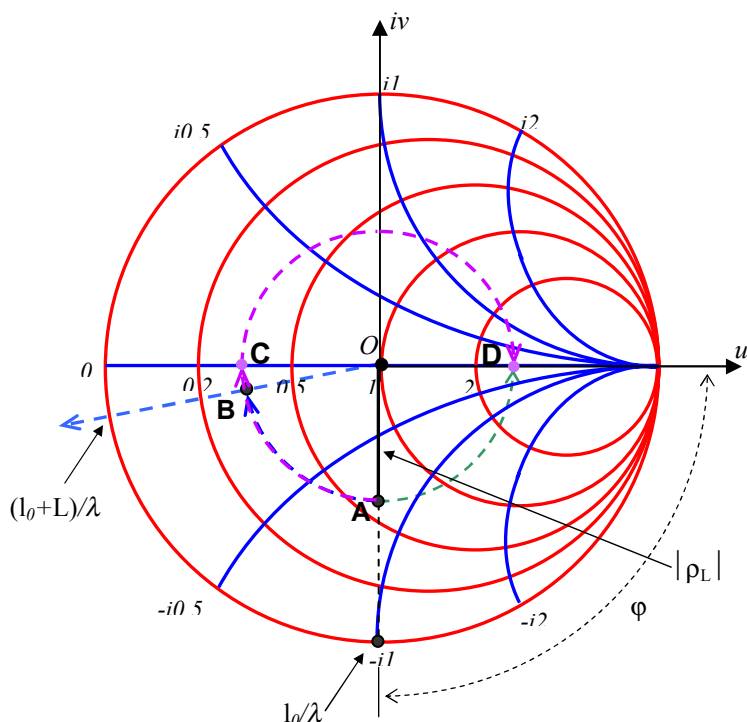


- a) Una resistencia $R_A = 150\Omega$.
 - b) Una reactancia inductiva $X_B = i10\Omega$.
 - c) Una reactancia capacitiva $X_C = -i50\Omega$.
 - d) Una impedancia RL serie $Z_D = (15 + i10)\Omega$.
 - e) Un circuito abierto $Z_E = \infty$.
 - f) Un cortocircuito $Z_F = 0$.
- Usar como impedancia de normalización el valor $Z_0 = 50\Omega$.

- a) $z_A = Z_A / Z_0 = R_A / Z_0 = 3$ (A)
- b) $z_B = Z_B / Z_0 = X_B / Z_0 = i0.2$ (B)
- c) $z_C = Z_C / Z_0 = X_C / Z_0 = -i1$ (C)
- d) $z_D = Z_D / Z_0 = 0.3 + i0.2$ (D)
- e) $z_E = Z_E / Z_0 \rightarrow \infty$ (E)
- f) $z_F = Z_F / Z_0 = 0$ (F)

Ejemplo 6.15: Una línea de 50Ω está terminada por una resistencia de 30Ω en serie con una reactancia capacitiva de 40Ω .

Hallar: a) ρ_L y ROE, b) la impedancia de entrada si la longitud de la línea es $L = 0.1\lambda$ y c) los valores de longitud de línea que llevan a una impedancia de entrada puramente resistiva y los valores de estas impedancias.



Para utilizar la carta de Smith primero expresamos la impedancia de carga normalizada a la impedancia característica:

$$\frac{Z_L}{Z_0} = \frac{30 - i40}{50} = 0.6 - i0.8$$

y entonces marcamos en la carta de Smith el punto **A** en la intersección de los círculos $r = 0.6$ y $x = -0.8$.

- a) La distancia desde **A** al centro del diagrama da $|\rho_L| = 0.5$ y la prolongación de este segmento hasta el círculo de ángulos exterior da $\varphi = 90^\circ$ (trazos en negro).

Además $ROE = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{1 + 0.5}{1 - 0.5} = 3$

Podemos sacar el valor de ROE de la carta de Smith. Como depende solamente de $|\rho_L|$, una carga resistiva

pura con el mismo $|\rho_L|$ dará el mismo ROE.

Como para $R_L > Z_0$: $|\rho_L| = (R'_L - Z_0)/(R'_L + Z_0) \Rightarrow R'_L/Z_0 = (1 + |\rho_L|)/(1 - |\rho_L|) = ROE$

y el valor del ROE coincide con la resistencia normalizada que da el mismo valor de $|\rho_L|$. Se usa este hecho y se traza en la carta de Smith el arco de circunferencia centrada en el centro del diagrama hasta el eje $x = 0$ para $r > 1$. El valor obtenido de r en el cruce **D** (3) es igual al ROE (trazo en verde).

b) Para calcular la impedancia de entrada buscamos la posición donde el radio del diagrama que pasa por **A** corta al círculo perimetral marcado "hacia el generador". Resulta $l_0/\lambda = 0.375$. Este es un valor de partida arbitrario. Si ahora nos desplazamos hacia el generador (en el sentido horario) sobre el círculo de $|\rho_L| = \text{cte.}$ ($|\rho_L|$ depende solamente de la carga y Z_0) en 0.1λ , de acuerdo al enunciado del problema, tendremos:

$$(l_0 + L)/\lambda = 0.375 + 0.1 = 0.475.$$

El punto **B** así obtenido tiene $r = 0.34$ y $x = 0.14$, o sea $Z_m = (17 - i 7)\Omega$ (trazos en azul).

c) Finalmente, las longitudes de las líneas con impedancia de entrada resistivas corresponden a los puntos de intersección sobre el eje real ($x = 0$) de la circunferencia que pasa por **A**, recorrida en el sentido horario. El primer punto de cruce es el **C** (separado del **A** en $\lambda/4$) y luego el **D** (separado del **C** en $\lambda/4$) (trazos en violeta).

Carta de admitancias

Dado que la admitancia $Y = 1/Z$ satisface las mismas ecuaciones que la impedancia de onda, la carta de Smith es también un diagrama de admitancias normalizadas a $Y_0 = 1/Z_0$. La transformación bilineal es:

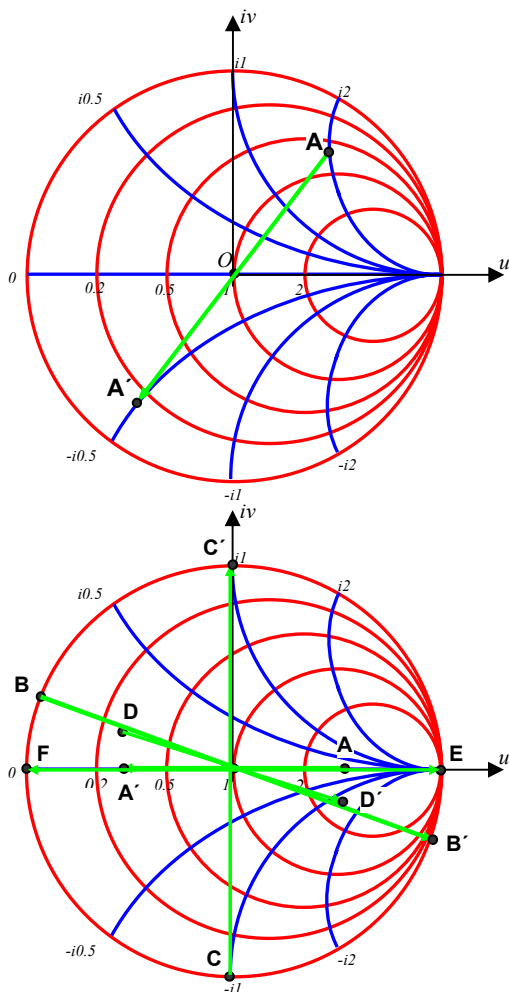
$$\frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + |\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}}{1 - |\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{Y_0} = \frac{1 - |\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}}{1 + |\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}} = \frac{1 + |\rho_L| e^{i(2kz+\phi+\pi)}}{1 - |\rho_L| e^{i(2kz+\phi+\pi)}} \Rightarrow y = \frac{1 + we^{i\pi}}{1 - we^{i\pi}}$$

que es la misma ecuación de la carta de impedancias, pero aparece un ángulo de fase de π multiplicando al complejo w . Por ello, un punto de la carta de impedancias está sobre el círculo de $|\rho_L|$ constante separado 180° (π) del punto correspondiente a la misma carta medida en admitancias. Por otra parte, las escalas son iguales, de manera que donde se lee resistencia (reactancia) en la carta de impedancias se debe leer conductancia (susceptancia) en la de admitancias.

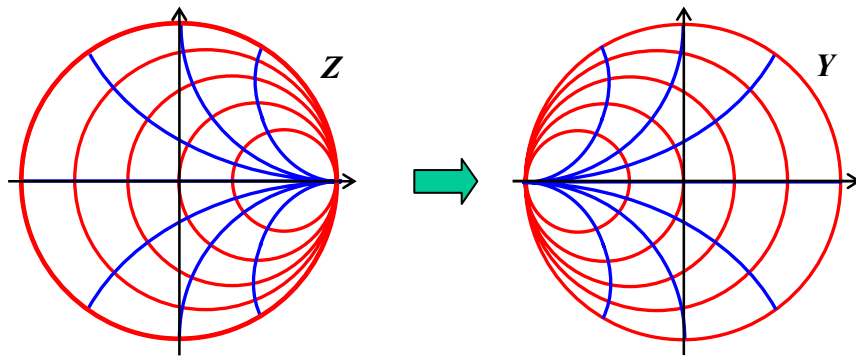
En el siguiente ejemplo se usa la carta de Smith para pasar de impedancia a admitancia en el caso de las cargas del **Ejemplo 6.14**.

Ejemplo 6.16: Ubicar sobre la carta de Smith las siguientes admitancias:

- a) Una resistencia $R_A = 150\Omega$.
- b) Una reactancia inductiva $X_B = i10\Omega$.
- c) Una reactancia capacitiva $X_C = -i50\Omega$.
- d) Una impedancia RL serie $Z_D = (15 + i10)\Omega$.
- e) Un circuito abierto $Z_E = \infty$.
- f) Un cortocircuito $Z_F = 0$. Usar como impedancia de normalización el valor $Z_0 = 50\Omega$.



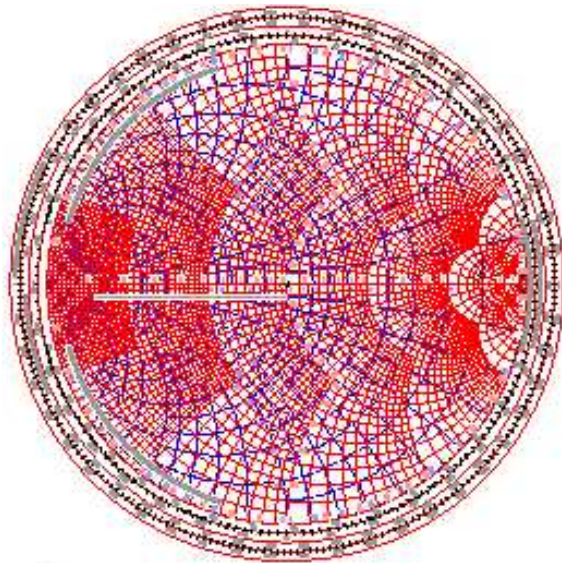
- a) $y_A = Y_A / Y_0 = Z_0 / G_A = 1/3$ (**A'**)
- b) $y_B = Y_B / Y_0 = Z_0 / X_B = -i 5$ (**B'**)
- c) $y_C = Y_C / Y_0 = Z_0 / X_c = i1$ (**C'**)
- d) $y_D = Y_D / Y_0 \approx 2.3 - i1.54$ (**D'**)
- e) $z_E = Y_E / Y_0 = 0$ (**E**)
- f) $z_F = Y_F / Y_0 \rightarrow \infty$ (**F**)



Otra posibilidad de representación de admitancias es girar todo el diagrama en π , en lugar de girar cada punto, con lo que se obtiene una carta de admitancias como la de la figura.

A la izquierda se muestra una carta de Smith donde se dibujan los círculos de impedancias (en rojo) y de admitancias (en azul) simultáneamente. En este caso no es necesario girar en π la posición del punto para pasar de una carta a la otra, sino que basta con usar los círculos adecuados (archivo **SMITH-ZY.PDF**).

En el siguiente ejemplo se diseña un stub paralelo de adaptación usando la carta de Smith como carta de impedancias y luego como carta de admitancias.



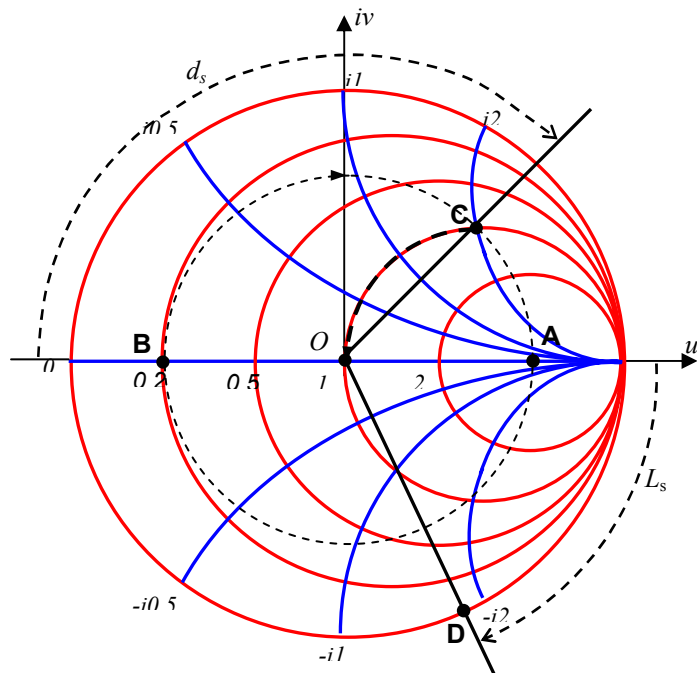
En el siguiente ejemplo se diseña un stub paralelo de adaptación usando la carta de Smith como carta de impedancias y luego como carta de admitancias.

Ejemplo 6.17: Usar la carta de Smith para diseñar un stub de adaptación entre una línea de $Z_0 = 100 \Omega$ y una carga real $Z_L = 500 \Omega$.

Vamos a usar la **carta de Smith de impedancias**. La impedancia de carga normalizada es:

$$z_L = Z_L / Z_0 = 5$$

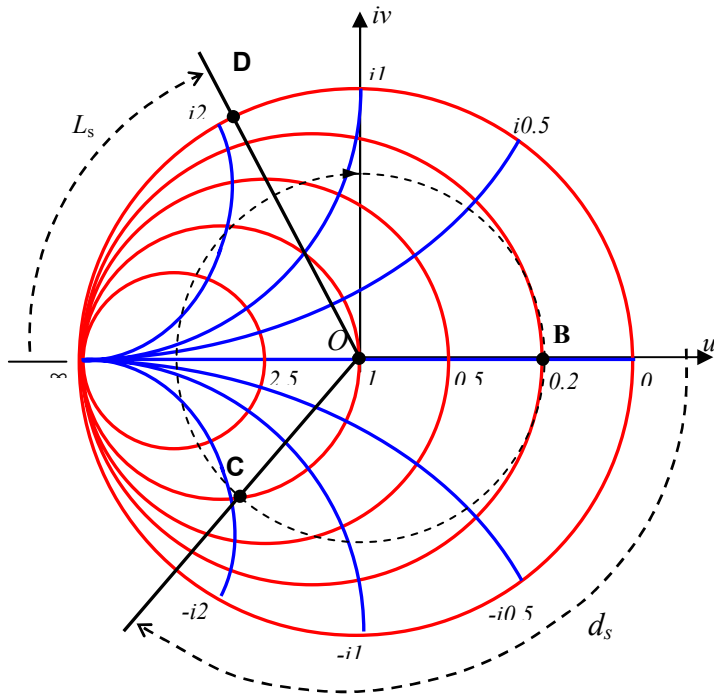
Se ingresa a la carta en este punto **(A)**. Se traza un círculo auxiliar concéntrico con la carta que pasa por **A**. Este círculo es la curva de $|\rho_L|$ y ROE constantes. Para adaptación debemos pasar de **A** a **O**, el centro del diagrama, donde $|\rho_L| = 0$. Como vamos a colocar un stub en paralelo con la línea principal, nos conviene trabajar con admitancias. Pasamos entonces de **A** al punto correspondiente **B** (a 180°), donde la admitancia normalizada es $y_L = 0.2$.



Para ubicar el stub nos movemos por el círculo de $|\rho_L|$ constante en sentido horario (hacia el generador) hasta llegar al círculo de admittance real normalizada igual a 1 (que coincide con el círculo de impedancia normalizada igual a 1 - punto **C**). Para adaptación sólo se requiere agregar una susceptancia en paralelo de valor opuesto a la susceptancia de **C**. La distancia $d_s = 0.183 \lambda$ (en longitudes de onda) medida sobre el círculo exterior de la carta entre los radios que pasan por **B** y **C** es la distancia desde la carga a la que hay que poner el stub. Para hallar la longitud del stub, se observa que la impedancia normalizada en **C** es $y_C = 1 + j 1.79$, de

manera que el stub debe presentar una admitancia de entrada que anule la parte imaginaria: $y_s = -j 1.79$. El stub cortocircuitado presenta una admitancia de entrada puramente reactiva: $Z(-l_s) = i Z_0 \tan(k l_s) \Rightarrow Y(-l_s) = -j Y_0 \cot(k l_s)$.

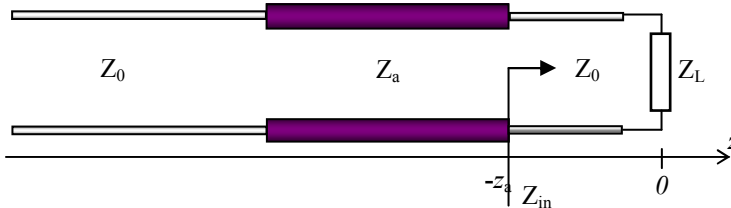
El lugar geométrico de esta impedancia (a medida que cambia l_s es el círculo exterior de radio unitario que corresponde a $r = 0$. Ubicamos entonces el punto **D** que define la admittancia de entrada del stub sobre el cruce del círculo de susceptancia $b_s = -i 1.79$ con el círculo exterior, y midiendo sobre el círculo exterior la distancia desde el punto de admittancia normalizada infinita (condición de cortocircuito - eje real positivo) se obtiene $L_s = 0.08 \lambda$ que es la longitud (mínima) requerida del stub.



Si se trabaja con la **carta de admittancias**, se parte desde **B** ($y_L = 0.2$) y se gira a $|p_L|$ constante hasta alcanzar el círculo de conductancia normalizada unitaria (**C**). Se mide sobre la escala de longitudes de onda la posición del stub, como antes. Luego se ubica el punto **D**, que neutraliza la impedancia de entrada de la línea en el punto de conexión del stub y se mide la longitud necesaria del stub. Naturalmente los valores obtenidos son los mismos que en la construcción previa.

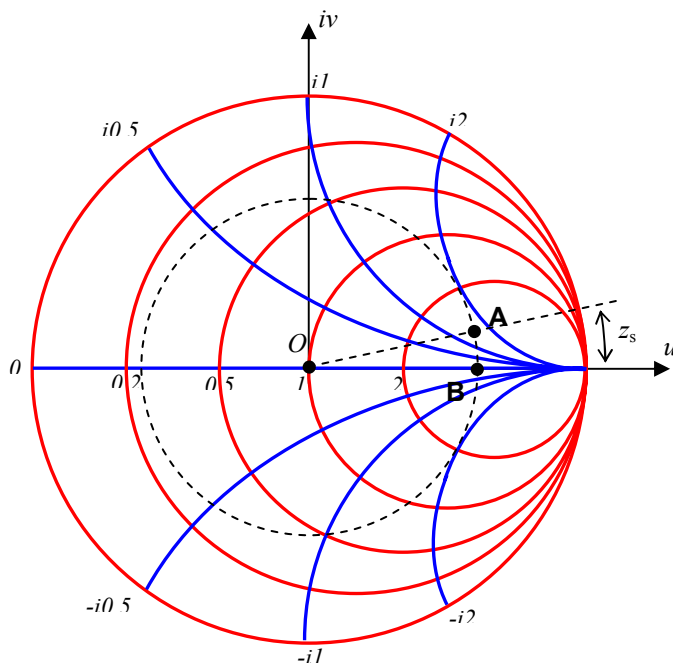
Este es un caso donde el uso de la carta de Smith es mucho más sencillo que la resolución analítica. En la sección de adaptación vimos cómo adaptar una carga **real** a una línea de impedancia característica **real**, pero en este caso tenemos una carga de impedancia **compleja**.

Ejemplo 6.18: Usar la carta de Smith para diseñar un adaptador de cuarto de onda entre una línea de $Z_0 = 100 \Omega$ y $v_f = 0.87c$ y una carga $Z_L = 150(1+i) \Omega$ a 20 MHz.



Este es un caso donde el uso de la carta de Smith es mucho más sencillo que la resolución analítica. En la sección de adaptación vimos cómo adaptar una carga **real** a una línea de impedancia característica **real**, pero en este caso tenemos una carga de impedancia **compleja**.

La solución consiste en intercalar el adaptador a una distancia z_a de la carga, de manera que la impedancia de entrada Z_{in} del conjunto línea+carga sea real, como se muestra en la figura. La determinación de esta posición se complica matemáticamente si se desea resolver el problema analíticamente, pero es muy fácil con la carta de Smith.



Comenzamos calculando primero la impedancia de carga normalizada:

$$z_L = Z_L / Z_0 = 1.5 + i1.5$$

y determinamos el punto **A** en la carta. Cualquier posición en la línea estará sobre la circunferencia centrada en la carta y que pasa por **A**. Para hallar la posición donde se debe intercalar el adaptador de cuarto de onda, nos movemos desde **A** hacia el generador (en sentido horario) hasta el primer cruce con el eje real. Esto ocurre en el punto **B**. Podemos leer en la escala exterior la longitud del arco que nos da la posición deseada z_s para el adaptador, y del eje real la impedancia (real) Z'_L en ese punto, que será la impedancia que hay que adaptar a la línea.

En nuestro caso:

$$z_s \approx 0.056\lambda = 0.056 \frac{v_f}{f} \approx 0.73m$$

$$Z'_L \approx 3.35Z_0 \approx 335\Omega$$

de donde:

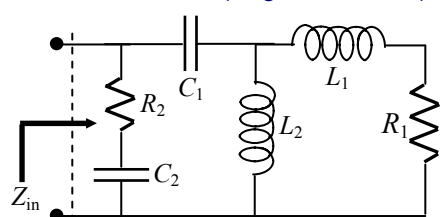
$$Z_a = \sqrt{Z_0 Z'_L} \approx 1.83Z_0 \approx 183\Omega$$

$$L_a = \frac{\lambda_a}{4} = \frac{v_f}{4f} \approx 3.26m$$

Aplicación a circuitos de constantes concentradas

La carta de Smith no es sólo aplicable a circuitos con líneas. Se puede usar para diseñar circuitos concentrados con la misma simplicidad, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.19: Determinar la impedancia de entrada del circuito de la figura. Datos: $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $L_1 = 8 \mu Hy$, $L_2 = 26.5 \mu Hy$, $C_1 = 3 nF$, $C_2 = 50 nF$, $f = 1 MHz$.



Para usar la carta de Smith debemos normalizar las impedancias del circuito a un valor **arbitrario**. En el caso de las líneas elegimos la impedancia característica. En este caso elegiremos el valor de la resistencia R . Asignamos a cada elemento el valor de su impedancia normalizada a la frecuencia de trabajo:

$$R_1 \rightarrow r_1 = 1 \quad R_2 \rightarrow r_2 = R_2 / R_1 = 0.3$$

$$L_1 \rightarrow x_1 = i\omega L_1 / R_1 \approx i \quad L_2 \rightarrow x_2 \approx 3.33i$$

$$C_1 \rightarrow x_4 = 1/i\omega C_1 R \approx -1.06i$$

$$C_2 \rightarrow x_5 \approx -0.064i$$

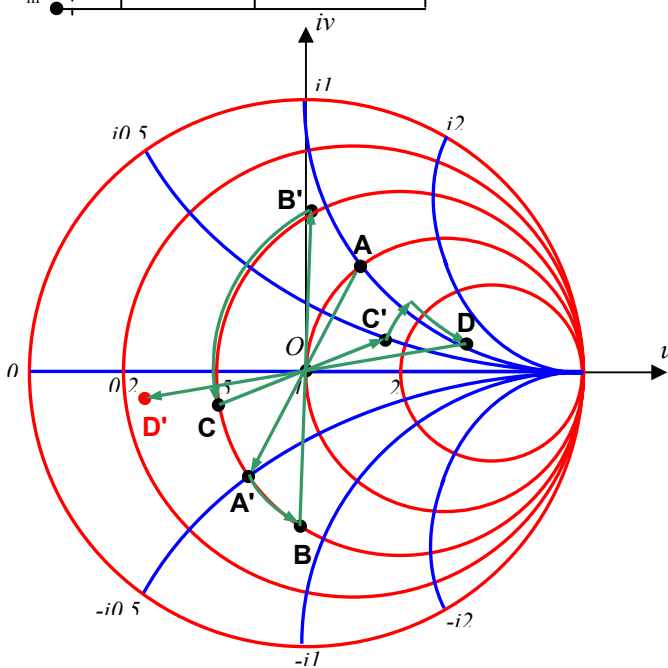
Con estos valores ubicamos primero la impedancia serie $z_A = r + ix_1 = 1 + i$ en la carta de Smith (punto **A**). El siguiente paso consiste en hallar la impedancia resultante del paralelo de z_1 con x_2 , para lo cual debemos transformar ambas impedancias en admitancias:

$$z_A \rightarrow y_A = 0.5(1 - i) \quad (\text{punto } \mathbf{A}')$$

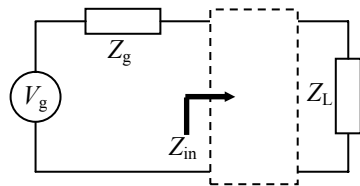
$$x_2 \rightarrow b_2 = -1/x_2 \approx -0.3i$$

La admitancia resultante del paralelo de y_1 y b_2 se puede hallar en el diagrama de Smith moviéndonos sobre el círculo de conductancia constante 0.3 en el sentido de admitancia decreciente (porque b_2 es negativa) o sea en el sentido opuesto a las agujas del reloj. Llegamos al punto **B** [$y_B \approx 0.5 - 0.8i$]. Como el siguiente elemento a combinar es en serie, volvemos al diagrama de impedancias [punto **B'** : $z_B \approx 0.56 + 0.9i$].

Agregamos ahora la impedancia serie x_4 para lo cual nos movemos sobre el círculo de resistencia constante en el sentido antihorario de reactancia decreciente (porque x_4 es negativa) hasta llegar al punto **C**: $z_C \approx 0.56 - 0.16i$. Finalmente agregamos en paralelo la serie de R_2 y C_2 : $z_C \approx 0.3 - 0.064i$, que corresponde a una admitancia $y_C \approx 3.19 + 0.68i$. Pasamos al diagrama de admitancias: **C** \rightarrow **C'** ($y_C \approx 1.65 + 0.47i$) y giramos primero sobre un círculo de conductancia constante $+0.68i$ y luego sobre un círculo de susceptancia constante 3.19 , para llegar al punto **D** ($y_D \approx 4.84 + 1.15i$). Finalmente invertimos el punto para volver al diagrama de impedancias y llegamos al punto final **D'** : $z_D = z_{in} \approx 0.196 - 0.046i \Rightarrow Z_{in} \approx (9.8 - 2.3i)\Omega$. Los valores numéricos que aparecen en el texto salen de la carta y los valores intermedios no se requieren para el resultado y se han dado solamente para referencia.



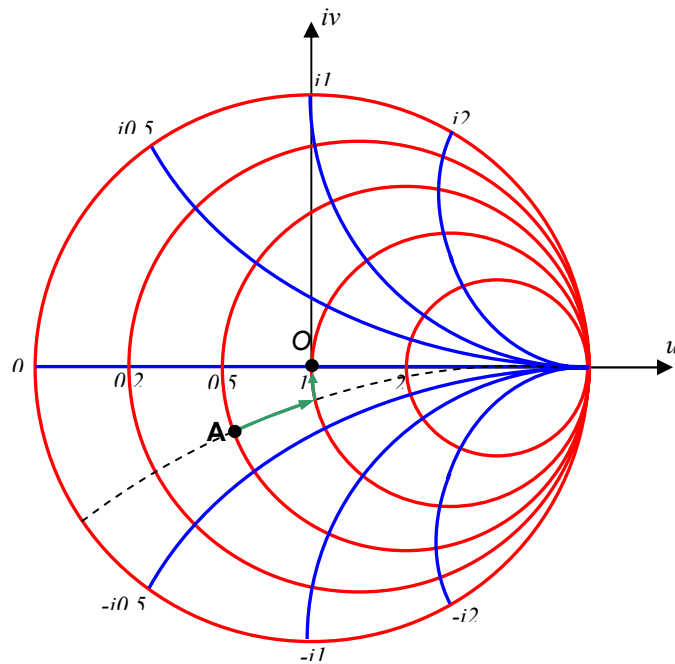
Ejemplo 6.20: Diseñar un circuito de adaptación entre un generador de impedancia interna $Z_g = 50 \Omega$ y una impedancia de carga $Z_L = (25 - 13.2i)\Omega$ a la frecuencia de trabajo.



Para adaptación se requiere que la impedancia de entrada Z_{in} sea igual a la impedancia del generador Z_g .

Ubicamos en la carta de Smith la impedancia del generador y la impedancia de carga normalizadas a Z_g :

$$z_g = 1 \quad (\mathbf{O}) \quad z_L = 0.5 - 0.264i \quad (\mathbf{A}).$$



Para pasar de **A** a **O** podemos ir por varios caminos. Elegimos el camino de la figura donde vamos primero en sentido horario sobre el círculo de reactancia constante hasta alcanzar el círculo $r = 1$, y luego por este círculo hasta el punto **O**. Esto implica agregar una impedancia serie RL :

$$z = 0.5 + 0.264i \Rightarrow Z = (25 + 13.2i)\Omega,$$

que es una solución trivial del problema.

Esta solución tiene una respuesta en frecuencia del tipo de un pasabajos. Es posible obtener otras soluciones de diferentes respuestas en frecuencia modificando el camino desde **A** hacia **O**, lo que implica elegir otros circuitos de adaptación.

Líneas resonantes

Además de transmitir energía e información de un punto a otro, las líneas se pueden usar como **elementos de circuito**, fundamentalmente por su propiedad de lograr cualquier impedancia de entrada en función de su longitud y su carga. Esta situación es muy común en la actualidad, en que se integran líneas de transmisión o guías de onda en chips para microondas.

En particular, la posibilidad de tener **ondas estacionarias** lleva a que las líneas se puedan usar como **circuitos resonantes** o sintonizados.

Consideremos primero una línea supuestamente ideal cortocircuitada en ambos extremos. El generador se coloca en algún punto intermedio que consideraremos más adelante. Las ondas (estacionarias) de tensión y corriente en la línea son:

$$v(z, t) = 2V_+ \sin(\omega t) \sin(kz) \quad i(z, t) = 2 \frac{V_+}{Z_0} \cos(\omega t) \cos(kz)$$

Veamos si estas expresiones satisfacen las condiciones en los extremos de la línea. La tensión se anula sobre el extremo de carga ($z = 0$) pero debe también anularse sobre el extremo opuesto ($z = -l$). Entonces:

$$\sin(kl) = 0 \Rightarrow kl = n\pi \Rightarrow l_n = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2f} \Rightarrow l_n = \frac{n}{2f\sqrt{LC}}$$

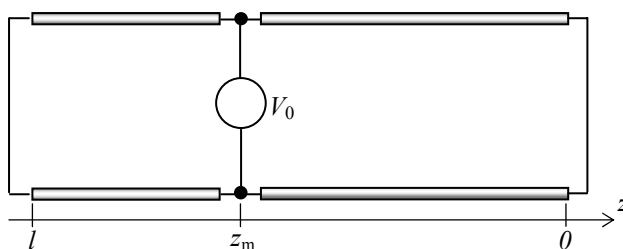
lo que significa que, para una dada frecuencia de excitación, la longitud de la línea no puede ser cualquiera, sino solamente alguno de los valores discretos l_n . Viceversa, para una línea de longitud y parámetros dados, sólo se pueden establecer ondas con un conjunto discreto de frecuencias:

$$l = n \frac{1}{2f_n \sqrt{LC}} \Rightarrow f_n = \frac{n}{2l\sqrt{LC}}$$

Un elemento circuital o un circuito que selecciona frecuencias es un circuito **resonante** o **sintonizado**. Para esta aplicación pueden usarse líneas que habitualmente se cortocircuitan en ambos extremos para minimizar la radiación de interferencias.

Ahora podemos analizar la posición del generador que alimenta la línea. Suponemos que es un generador de tensión ideal (impedancia interna nula), y podemos colocarlo en la posición de un antinodo cualquiera de la onda estacionaria:

$$\sin(kz) = 1 \Rightarrow -kz_m = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_m = -\frac{(2m + 1)}{4f\sqrt{LC}}$$



donde se toman valores negativos de z_m por la convención de colocar el origen de coordenadas sobre la carga. Entonces queda definido el valor de V_+ : $2V_+ = V_0$, donde V_0 es la tensión del generador.

Energía y Q

La energía almacenada en la línea, que está asociada a sus componentes reactivos, se puede calcular apelando al modelo circuital. Cada dz de línea tiene una inductancia Ldz y una capacidad Cdz . La energía almacenada en estos elementos es:

$$dU = \frac{1}{2} (L i^2(z, t) + C v^2(z, t)) dz = \frac{1}{2} \left(L \left(\frac{V_0}{Z_0} \right)^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz) + C V_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) \right) dz$$

Entonces:
$$dU = \frac{1}{2} C V_0^2 (\cos^2(\omega t) \cos^2(kz) + \sin^2(\omega t) \sin^2(kz)) dz$$

y tomando el promedio temporal: $\langle dU \rangle = \frac{1}{4} C V_0^2 (\cos^2(kz) + \text{sen}^2(kz)) dz = \frac{1}{4} C V_0^2 dz$

Finalmente, integrando a toda la línea: $\langle U_n \rangle = \frac{1}{4} C V_0^2 l_n$

Consideremos ahora una línea con pérdidas. Si las pérdidas son **bajas**, como es el caso en la mayoría de las líneas comerciales, podemos suponer que la distribución de tensión y corriente no será muy diferente que en el caso ideal, y podemos calcular la potencia perdida para cada tramo dz de la línea como:

$$dW = Rdz i^2(z,t) + Gdz v^2(z,t) = \left(R \left(\frac{V_0}{Z_0} \right)^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz) + G V_0^2 \text{sen}^2(\omega t) \text{sen}^2(kz) \right) dz$$

y tomando el promedio temporal: $\langle dW \rangle = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(\frac{R}{L} \cos^2(kz) + \frac{G}{C} \text{sen}^2(kz) \right) dz$

Integrando a toda la línea: $\langle W \rangle = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(\frac{R}{L} \int_{-l_n}^0 \cos^2(kz) dz + \frac{G}{C} \int_{-l_n}^0 \text{sen}^2(kz) dz \right)$

y como $k = n\pi/l_n$:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(\frac{R}{L} \int_{-l_n}^0 \cos^2\left(\frac{n\pi}{l_n} z\right) dz + \frac{G}{C} \int_{-l_n}^0 \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{l_n} z\right) dz \right) \Rightarrow \langle W_n \rangle = \frac{1}{4} C V_0^2 \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) l_n$$

Un circuito resonante tiene como misión almacenar energía. Cuanto mayores son las pérdidas menor es la calidad del circuito como resonante. Esta característica se suele medir por el llamado **factor de calidad** o **factor de mérito**:

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía media almacenada}}{\text{potencia media disipada por ciclo}} = 2\pi \frac{\langle U \rangle}{\langle W \rangle / f} = \omega \frac{\langle U \rangle}{\langle W \rangle}$$

Usando las expresiones que hemos hallado:

$$Q = \omega \frac{\langle U \rangle}{\langle W \rangle} = \omega \frac{\frac{1}{4} C V_0^2 l_n}{\frac{1}{4} C V_0^2 \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) l_n} \Rightarrow Q_n = \frac{1}{(R/\omega_n L + G/\omega_n C)} = \frac{2\pi}{R/f_n L + G/f_n C}$$

Se observa que para una línea de bajas pérdidas $Q_n \gg 1$ ya que en tal caso cada término del denominador es mucho menor que 1. La frecuencia que aparece en la expresión de Q_n es una de las posibles frecuencias de resonancia f_n del circuito, y el valor de Q_n calculado corresponde a esa frecuencia.

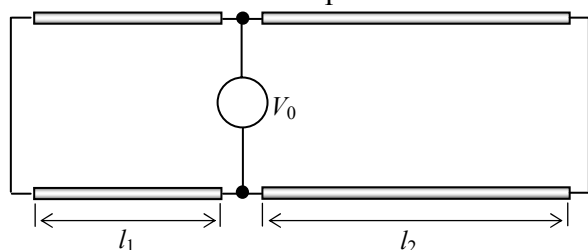
En resonancia, el generador (supuestamente conectado en un antinodo de la tensión) ve una impedancia infinita cuando la línea es ideal. Cuando hay pérdidas, la potencia perdida debe ser suministrada por el generador, de manera que la impedancia que el generador ve debe ser ahora **finita y real** y de valor tal que la potencia que el generador le suministra sea igual a la potencia disipada en la línea. Podemos calcular así la resistencia de entrada (en resonancia) de la línea vista por el generador:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R_i} = \frac{1}{4} C V_0^2 \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) l_n \text{ de donde } R_i = \frac{4}{\omega C (R/\omega L + G/\omega C) n l} = \frac{4Q}{\omega C n l}$$

y finalmente nos queda, en función del Q de la línea: $R_{i_n} = \frac{2 Q_n Z_0}{\pi n}$

Ancho de banda

Podemos analizar el comportamiento en frecuencia alrededor de la resonancia considerando ahora que variamos ligeramente la frecuencia del generador respecto de una de las frecuencias de resonancia del circuito. Para analizar el resultado de esta variación de frecuencia, el circuito se puede pensar como un generador conectado a dos líneas en paralelo y cortocircuitadas en sus extremos de carga. Las longitudes de cada línea son, respectivamente, l_1 y l_2 . En resonancia, estas longitudes son múltiplos impares de $\lambda/4$ y la impedancia de entrada del paralelo de ambas líneas es R_i , pero deja de tener este valor fuera de resonancia. Como se trata de líneas cortocircuitadas de bajas pérdidas, fuera de resonancia sus impedancias de entrada son fundamentalmente reactivas, por lo que en el siguiente análisis despreciamos momentáneamente la parte resistiva. Como las dos líneas están en paralelo, es conveniente trabajar con las admitancias (susceptancias). En resonancia:



En resonancia, estas longitudes son múltiplos impares de $\lambda/4$ y la impedancia de entrada del paralelo de ambas líneas es R_i , pero deja de tener este valor fuera de resonancia. Como se trata de líneas cortocircuitadas de bajas pérdidas, fuera de resonancia sus impedancias de entrada son fundamentalmente reactivas, por lo que en el siguiente análisis despreciamos momentáneamente la parte resistiva. Como las dos líneas están en paralelo, es conveniente trabajar con las admitancias (susceptancias). En resonancia:

$$i B_i = -i Y_0 [\cot(\beta l_1) + \cot(\beta l_2)] \rightarrow 0$$

Fuera de resonancia podemos escribir: $\beta = \omega / c = \omega_0 (1 + \delta) / c$ donde ω_0 es una de las frecuencias de resonancia y $\delta \ll 1$ representa un corrimiento relativo de frecuencia.

Luego: $\beta l_1 = \frac{\omega_0 (1 + \delta)}{c} l_1 = \beta_0 l_1 (1 + \delta) = n_1 \frac{\pi}{2} (1 + \delta)$ y análogamente: $\beta l_2 = n_2 \frac{\pi}{2} (1 + \delta)$

Luego tenemos: $i B_i = -i Y_0 \left\{ \cot \left[n_1 \frac{\pi}{2} (1 + \delta) \right] + \cot \left[n_2 \frac{\pi}{2} (1 + \delta) \right] \right\}$

Pero para n_1 impar: $\cot \left[n_1 \frac{\pi}{2} (1 + \delta) \right] = -\tan \left(n_1 \frac{\pi}{2} \delta \right) \cong -n_1 \frac{\pi}{2} \delta$

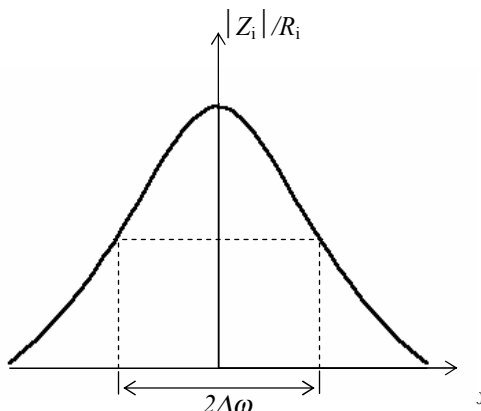
y entonces: $i B_i = -i Y_0 \left(-n_1 \frac{\pi}{2} \delta - n_2 \frac{\pi}{2} \delta \right) = i Y_0 \left(\frac{n \pi \delta}{2} \right)$

Finalmente, incorporando la resistencia de entrada, la admitancia que ve el generador fuera de resonancia es, aproximadamente:

$$Y_i = 1 / R_i + i B_i \cong \frac{\pi n Y_0}{2 Q} + i Y_0 \left(\frac{n \pi \delta}{2} \right) = \frac{n \pi}{2} Y_0 \left(\frac{1}{Q} + i \delta \right) = \frac{n \pi}{2} Y_0 \left(\frac{1}{Q} + i \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)$$

y entonces: $|Y_i| = \frac{n \pi}{2} Y_0 \sqrt{\left(\frac{1}{Q} \right)^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2} \Rightarrow |Z_i| = \frac{2 Z_0}{n \pi} / \sqrt{\left(\frac{1}{Q} \right)^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2}$

Si graficamos el módulo de la **impedancia de entrada** en función de la frecuencia ω obtenemos la clásica curva de resonancia:



El valor mínimo de admitancia (o el máximo de impedancia) de entrada se da para la resonancia $\omega = \omega_0$:

$$|Y_i|_{\min} = \frac{n \pi}{2 Q} Y_0 \Rightarrow |Z_i|_{\max} = \frac{2 Q}{n \pi} Z_0 = R_i$$

y es la resistencia de entrada R_i ya calculada. Definimos el **ancho de banda** $\Delta\omega$ entre las dos frecuencias a ambos lados de la resonancia para las cuales la impedancia de entrada cae a $1/\sqrt{2}$ de su valor máximo, o lo que es lo mismo, la admitancia de entrada es $\sqrt{2}$ veces el valor mínimo:

$$|Y_i| = \frac{n\pi Y_0}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{2}|Y_i|_{\min} = \sqrt{2} \frac{n\pi Y_0}{2Q} \Rightarrow \frac{1}{Q^2} + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2 = \frac{2}{Q^2}$$

y finalmente: $\omega - \omega_0 = \pm \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ de donde: $Q_n = \omega_{0_n} / \Delta\omega_n = f_{0_n} / \Delta f_n$

Podemos observar que a estas frecuencias la parte real y parte imaginaria de la admitancia de entrada (o de la impedancia de entrada) son iguales.

La ecuación hallada vincula los tres parámetros fundamentales de la resonancia: la frecuencia de resonancia, el ancho de banda y el Q.

Ejemplo 6.21: Una línea de parámetros $L = 1.2 \mu\text{Hy}/\text{m}$, $C = 30 \text{ nF}/\text{m}$, $R = 0.01 \Omega/\text{m}$, $G = 10^{-4} \text{ S}/\text{m}$ se usa como circuito sintonizado. a) Hallar la mínima longitud para tener una frecuencia de resonancia de 10MHz. b) Determinar las posibles posiciones de la entrada al circuito. c) Calcular el Q, la impedancia de entrada en resonancia y el ancho de banda del circuito sintonizado.

a) Las frecuencias de resonancia son: $f_n = \frac{n}{2l\sqrt{LC}} \Rightarrow l_{\min} = l = \frac{1}{2f\sqrt{LC}} \approx 26.35 \text{ cm}$

b) Las posiciones de los antinodos, posibles posiciones de entrada al circuito, son:

$$z_m = -\frac{(2m+1)}{4f\sqrt{LC}} = (m+1/2)l \Rightarrow z_0 = l/2 \approx 13.17 \text{ cm}$$

ya que sólo se puede tomar $m = 0$.

$$c) \begin{cases} Q = \frac{2\pi f}{(R/L + G/C)} \approx 5386 \\ Z_0 = \sqrt{\frac{R+i\omega L}{G+i\omega C}} \approx 6.3 \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_i = \frac{2QZ_0}{\pi} \approx 21.68 \text{ K}\Omega \\ \Delta f = \frac{f}{Q} \approx 1.86 \text{ kHz} \end{cases}$$

Se observa que el ancho de banda es muy bajo comparado con el valor de la frecuencia central, lo que se asocia al alto valor del Q.

Ejemplo 6.22: Un tramo de coaxil RG11 se usa para crear un circuito resonante a 100 MHz. Hallar la longitud necesaria del cable, el Q, la impedancia de entrada en resonancia y el ancho de banda del circuito sintonizado.

De la tabla de la p.6.10, los parámetros del coaxil RG11 son:

Diámetro (2b) mm	Z ₀ Ohm	v/c	C pF/m	α (a 100 MHz) dB/m
10.3	75	0.66	67	0.069

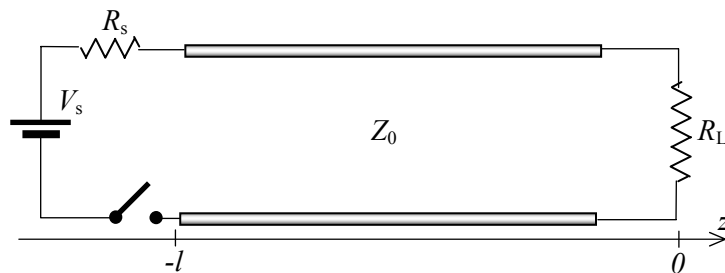
La longitud mínima del circuito sintonizado es: $l = \frac{1}{2f\sqrt{LC}} = \frac{v}{2f} \approx 1 \text{ m}$

$$\text{Como: } Q \approx \frac{2\pi f}{R/L} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{R}{2Z_0} \Rightarrow \begin{cases} Q = \frac{\pi f L}{\alpha Z_0} = \frac{\pi f}{\alpha v} \approx 200 \\ R_i = \frac{2QZ_0}{\pi} \approx 9.5 \text{ K}\Omega \\ \Delta f = \frac{f}{Q} \approx 0.5 \text{ MHz} \end{cases}$$

Transitorios en líneas

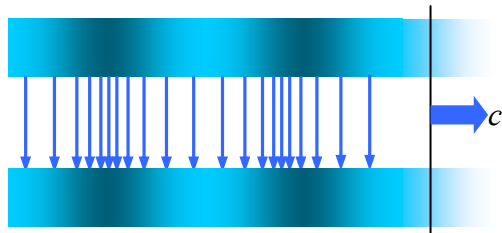
Es muy común el uso de líneas de transmisión para propagar pulsos que codifican información. Un tren periódico de pulsos se puede representar mediante una serie de Fourier que es una superposición de ondas armónicas (un pulso no periódico requiere una integral de Fourier, que también representa una superposición de ondas armónicas). Es posible entonces analizar el proceso para cada frecuencia y finalmente superponer los resultados, ya que las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de las líneas de transmisión son lineales. Este análisis se hace entonces en el **dominio de la frecuencia**.

Sin embargo, en muchos casos es más instructivo analizar el comportamiento de la señal completa sin descomponerla por Fourier. Este análisis se hace en el **dominio del tiempo**, y es el que vamos a usar en esta sección.



Consideremos una línea sin pérdidas que conecta una batería de impedancia interna resistiva R_s a una resistencia de carga R_L . En el instante $t = 0$ se cierra el interruptor que conecta el generador a la línea. La onda inicial o de arranque “ve” solamente la serie de R_s y Z_0 .

Entonces la corriente para $z = -l, t = 0^+$ es: $I(-l, 0^+) = I_0 = V_s / (R_s + Z_0)$ y la tensión inicial es: $V(-l, 0^+) = V_0 = I_0 Z_0 = V_s Z_0 / (R_s + Z_0)$.



Después de cerrar el interruptor las ondas $i_+ = I_0$ y $v_+ = V_0$ se propagan hacia la carga con la velocidad $c = 1/\sqrt{LC}$. Como esta velocidad es finita, el frente de ondas tarda $t_1 = l/c$ en llegar a la carga e interactuar con ella. En ese momento la tensión y corriente en la carga serán la superposición de las ondas incidente y la reflejada:

$$V(0, t_1) = v_+ + v_- = (1 + \rho_L) V_0$$

$$I(0, t_1) = i_+ + i_- = (1 - \rho_L) I_0$$

donde $\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ es el coeficiente de reflexión en la carga.

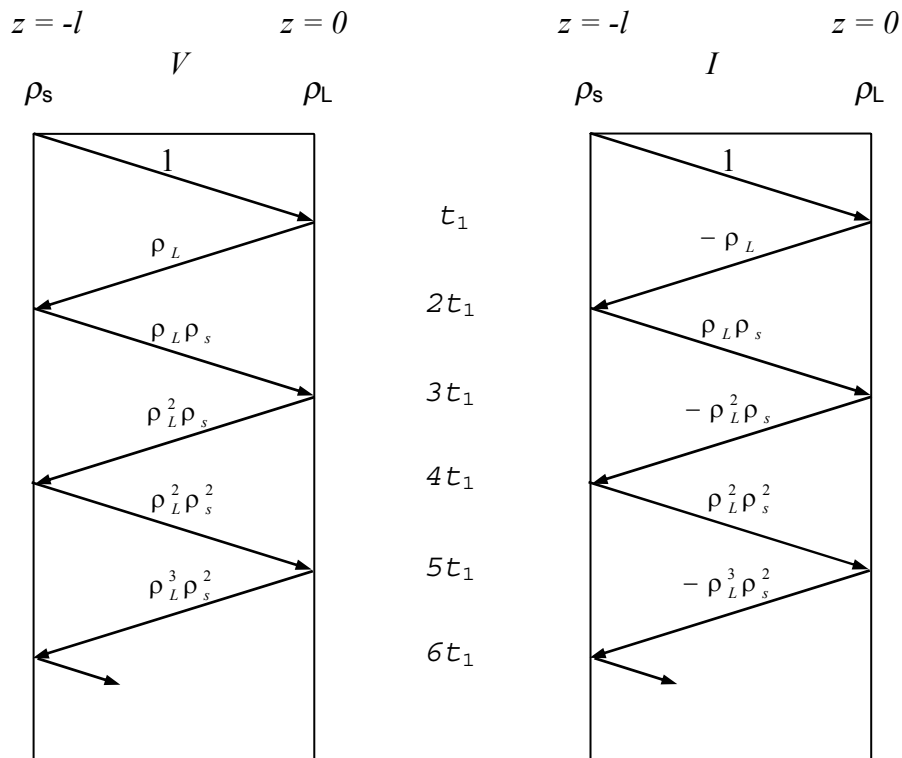
Las ondas reflejadas $i_- = \rho_L I_0$ y $v_- = \rho_L V_0$ viajan ahora hacia el generador (las ondas incidentes siguen propagándose desde el generador hacia la carga). En el instante $t = 2t_1$ las ondas reflejadas llegan al generador, donde la nueva desadaptación de impedancias crea una nueva onda “reflejada” progresiva:

$$V(-l, 2t_1) = v_+ + v_- + v'_+ = (1 + \rho_L) V_0 + \rho_s \rho_L V_0 = (1 + \rho_L + \rho_L \rho_s) V_0$$

$$I(-l, 2t_1) = i_+ + i_- + i'_+ = (1 - \rho_L) I_0 - \rho_s (-\rho_L I_0) = (1 - \rho_L + \rho_L \rho_s) I_0$$

donde $\rho_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}$ es el coeficiente de reflexión en el generador.

Esta nueva onda progresiva viaja hacia la carga, donde llega para $t = 3t_1$, instante en el que se genera una nueva onda regresiva: El proceso de reflexiones múltiples se puede ver más fácilmente mediante los **diagramas de rebote** o **diagramas de malla de Bewley**, que se muestran a continuación:



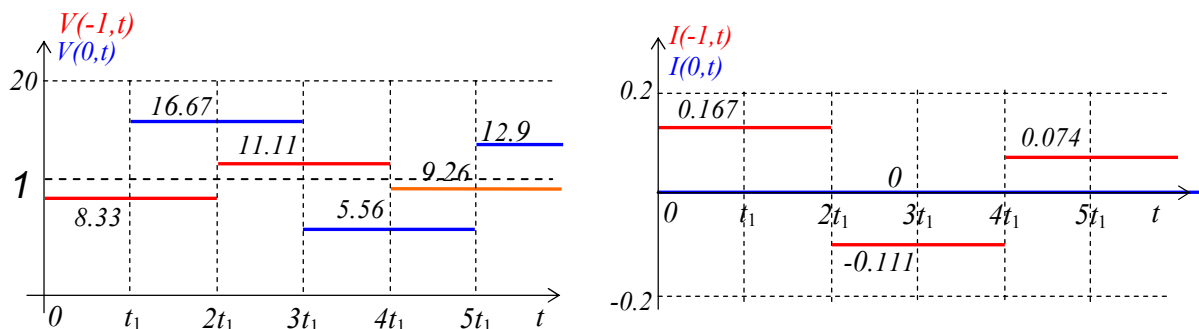
Se ve claramente cómo se forma cada serie de términos que dará el valor final de la tensión y la corriente sobre la línea después de los múltiples rebotes. Salvo en los casos de generador ideal y carga en cortocircuito o circuito abierto, en que se producen oscilaciones permanentes, como se analizó en la sección previa, como $|\rho| < 1$ cada término es menor que el precedente y la serie finalmente converge a un valor límite. Vamos a analizar las formas de onda que se obtienen cuando se colocan diversas impedancias de carga.

Ejemplo 6.23: Realice un diagrama temporal de la tensión y la corriente sobre el generador y la carga para una línea de $Z_0 = 50 \Omega$, conectada a un generador de tensión de $10V$ con resistencia interna $R_s = 10 \Omega$. La impedancia de carga es $R_L = \infty$ (**circuito abierto**).

Las amplitudes de las ondas progresivas que viajan por la línea luego de cerrar el interruptor son. $V_0 = \frac{Z_0 V_s}{R_s + Z_0} \approx 8.33V$ $I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \approx 0.167 A$

Los coeficientes de reflexión son: $\rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = 1$ $\rho_s = \frac{R_s - Z_0}{R_s + Z_0} = -0.667$

Realizamos la serie que describen los diagramas de Bewley para obtener las siguientes gráficas (tensiones en V y corrientes en A):

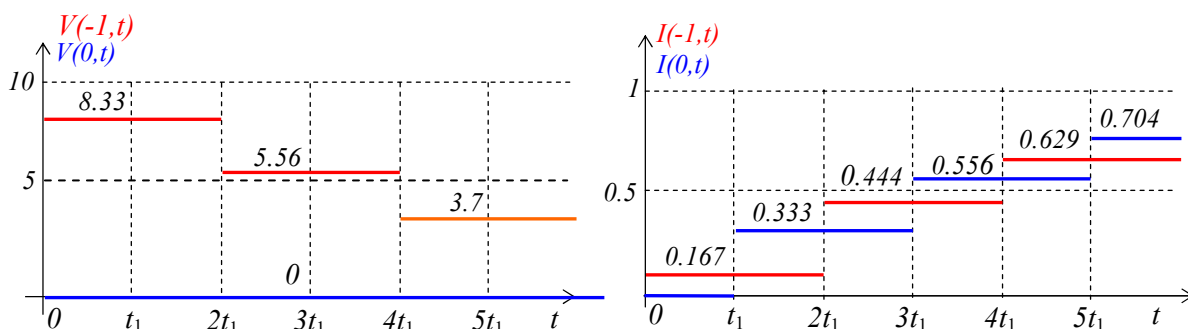


Se observa que la tensión y la corriente a la entrada de la línea oscilan tendiendo a su valor final $V(0, \infty) = V(-l, \infty) = V_s = 10V$, que corresponde al estado estacionario (de corriente continua) donde ya no hay ondas viajeras en la línea. La línea es en estas condiciones un

cortocircuito y la tensión final sobre la carga es la misma que la tensión de entrada (e igual a la tensión de la fuente porque no circula corriente por estar la carga en circuito abierto). La corriente sobre la carga es siempre cero, como debe ser, y la corriente en la entrada tiende a su valor final cero.

Ejemplo 6.24: Realice un diagrama temporal de la tensión y la corriente sobre el generador de la línea del ejemplo anterior para $R_L = 0 \Omega$ (**cortocircuito**).

Los coeficientes de reflexión son: $\rho_L = -1$ $\rho_s = -0.667$ V_0 e I_0 tienen los mismos valores que en el Ejemplo previo. Los diagramas temporales resultan ahora:



La tensión a la salida es siempre cero, por el cortocircuito, mientras que a la entrada tiende a su valor límite nulo de corriente continua. La corriente tiende en ambos extremos de la línea a su valor límite de continua que vale $I(0, \infty) = I(-l, \infty) = V_s / R_s = 1 A$

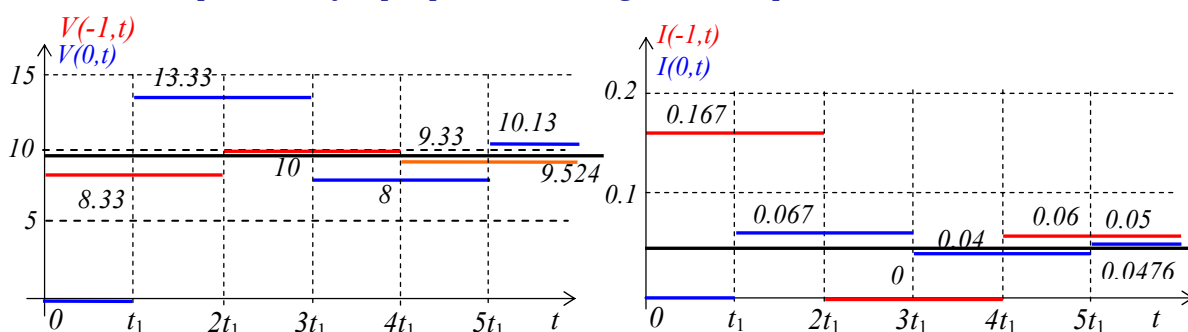
A tiempo infinito, ya no hay ondas viajeras por la línea y ésta se comporta como un cortocircuito por el que circula corriente estacionaria.

De estos ejemplos se observa que, en el caso de carga a circuito abierto, la tensión en el extremo del generador oscila alrededor del valor límite de continua (la tensión del generador) mientras que en el caso de carga cortocircuitada la tensión de entrada tiende monótonamente a cero.

Vemos ahora qué ocurre con una **impedancia de carga resistiva finita**.

Ejemplo 6.25: Realice un diagrama temporal de la tensión y la corriente sobre el generador de la línea del ejemplo anterior para $R_L = 200 \Omega$.

Los coeficientes de reflexión son: $\rho_L = 0.6$ $\rho_s = -0.667$ V_0 e I_0 tienen los mismos valores que en el Ejemplo previo. Los diagramas temporales resultan ahora:

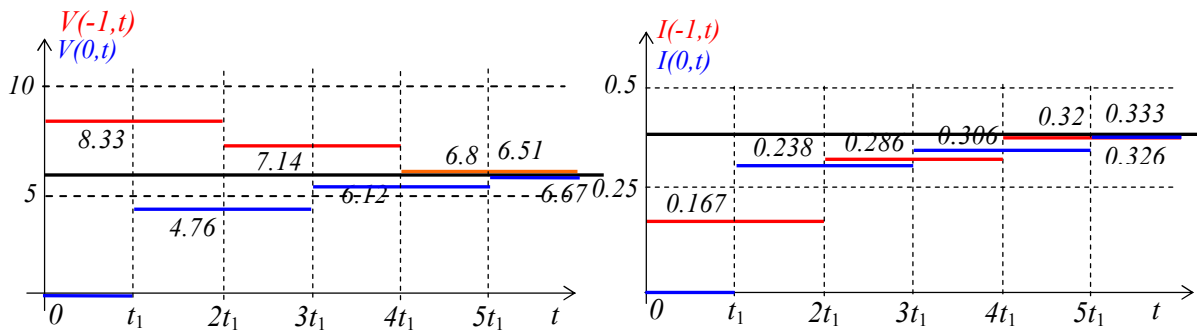


Los valores de tensión y corriente tienden a sus valores límite de corriente continua:

$$I(0, \infty) = I(-l, \infty) = V_0 / (Z_s + Z_L) \approx 47.6 \text{ mA} \quad \text{y} \quad V(0, \infty) = V(-l, \infty) = Z_L I(0, \infty) \approx 9.524 V$$

Ejemplo 6.26: Realice un diagrama temporal de la tensión y la corriente sobre el generador de la línea del ejemplo anterior para $R_L = 20 \Omega$.

Los coeficientes de reflexión son: $\rho_L = -0.429$ $\rho_s = -0.667$ V_0 e I_0 tienen los mismos valores que en el Ejemplo previo. Los diagramas temporales resultan ahora:



Los valores de tensión y corriente tienden a sus valores límite de corriente continua:

$$I(0, \infty) = I(-l, \infty) = V_0 / (Z_s + Z_L) \approx 33.3 \text{ mA} \quad \text{y} \quad V(0, \infty) = V(-l, \infty) = Z_L I(0, \infty) \approx 6.67 \text{ V}$$

En este caso ($Z_L < Z_0$) la tendencia de tensión y corriente a sus valores finales es monótona, mientras que en el caso previo ($Z_L > Z_0$) la tendencia era oscilante.

En estos dos últimos ejemplos se observa que si $Z_L < Z_0$ la tendencia de todas las variables graficadas es monótona hacia sus valores finales, mientras que si $Z_L > Z_0$ la tendencia es oscilante.

Cargas complejas

Hemos analizado el comportamiento de cargas resistivas. Cuando la carga es una **impedancia compleja** la dependencia temporal de los frentes de onda se modifica. Consideremos por ejemplo una línea de impedancia característica real Z_0 terminada en una impedancia de carga Z_L , a la que se conecta una batería V_0 a la entrada para $t = 0$. El frente de onda de tensión V_0 viaja con la velocidad de propagación en la línea hasta que llega a la carga en $t = t_1$. La carga impone la relación entre tensión y corriente y genera así una onda reflejada, por la desadaptación de impedancias con la impedancia característica de la línea.

Podemos obtener la forma de onda de la onda regresiva utilizando técnicas de de la transformación de Laplace. Si en lugar de trabajar con las tensiones y corrientes como funciones del tiempo consideramos sus transformadas de Laplace:

$$v_{\pm}(z, t) \leftrightarrow V_{\pm}(z, s) \quad i_{\pm}(z, t) \leftrightarrow I_{\pm}(z, s)$$

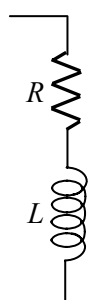
entonces podemos escribir para el coeficiente de reflexión:

$$\rho_L = \frac{v_-(0, t)}{v_+(0, t)} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \leftrightarrow \rho_L = \frac{V_-(0, s)}{V_+(0, s)} = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \Rightarrow V_-(0, s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s}$$

donde Ξ_L es la transformada de Laplace de la impedancia de carga y V_0/s la transformada de Laplace de la función escalón que representa la onda progresiva. Esta expresión se invierte nuevamente por Laplace para hallar la expresión en el tiempo de la onda de tensión regresiva.

Ejemplo 6.27: Halle la onda de tensión regresiva cuando la impedancia de carga es: a) una serie RL; b) una serie RC; c) un paralelo RL; d) un paralelo RC.

a) En este caso: $\Xi_L = R + sL$



$$y: V_-(0, s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s} = \frac{R - Z_0 + Ls}{R + Z_0 + Ls} \frac{V_0}{s} = \left[\frac{R - Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{s} + \frac{2Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{s + 1/\tau} \right] V_0$$

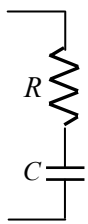
donde $\tau = L/(R + Z_0)$. La antitransformada de esta expresión es:

$$v_-(0, t) = V_0 \left[\frac{R - Z_0}{R + Z_0} + \frac{2Z_0}{R + Z_0} e^{-t'/\tau} \right] u(t') \quad \text{con} \quad t' = t - t_1$$

Se ve que para $t' = 0 \Rightarrow v_-(0, t_1) = V_0$ y la tensión sobre la carga en el instante del rebote duplica a la de la onda incidente, porque la inductancia serie

impide el súbito incremento de la corriente, que entonces es inicialmente cero (condición de circuito abierto).

b) En este caso: $\Xi_L = R + 1/sC$



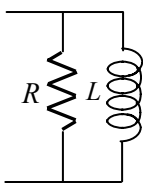
$$y: V_-(0,s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s} = \frac{R - Z_0 + 1/sC}{R + Z_0 + 1/sC} \frac{V_0}{s} = \left[\frac{1}{s} - \frac{2Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{s + 1/\tau} \right] V_0$$

donde $\tau = C(R + Z_0)$. La antitransformada de esta expresión es:

$$v_-(0,t) = V_0 \left[1 - \frac{2Z_0}{R + Z_0} e^{-t'/\tau} \right] u(t') \quad \text{con } t' = t - t_1$$

Se ve que para $t' = 0 \Rightarrow v_-(0,t_1) = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} V_0$ ya que el capacitor es inicialmente un cortocircuito y la tensión sobre la carga depende solamente de la relación R/Z_0 .

c) En este caso: $\Xi_L = 1/(1/R + 1/sL) = sRL/(R + sL)$



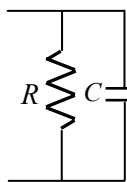
$$y: V_-(0,s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s} = \frac{sL(R - Z_0) - RZ_0}{sL(R + Z_0) + RZ_0} \frac{V_0}{s} = \left[-\frac{1}{s} + \frac{2R}{R + Z_0} \frac{1}{s + 1/\tau} \right] V_0$$

donde $\tau = RZ_0 / L(R + Z_0)$. La antitransformada de esta expresión es:

$$v_-(0,t) = V_0 \left[-1 + \frac{2R}{R + Z_0} e^{-t'/\tau} \right] u(t') \quad \text{con } t' = t - t_1$$

Se ve que para $t' = 0 \Rightarrow v_-(0,t_1) = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} V_0$ ya que la inductancia es inicialmente un circuito abierto y la tensión sobre la carga depende nuevamente de la relación R/Z_0 .

d) En este caso: $\Xi_L = 1/(1/R + Cs) = R/(1 + sCR)$



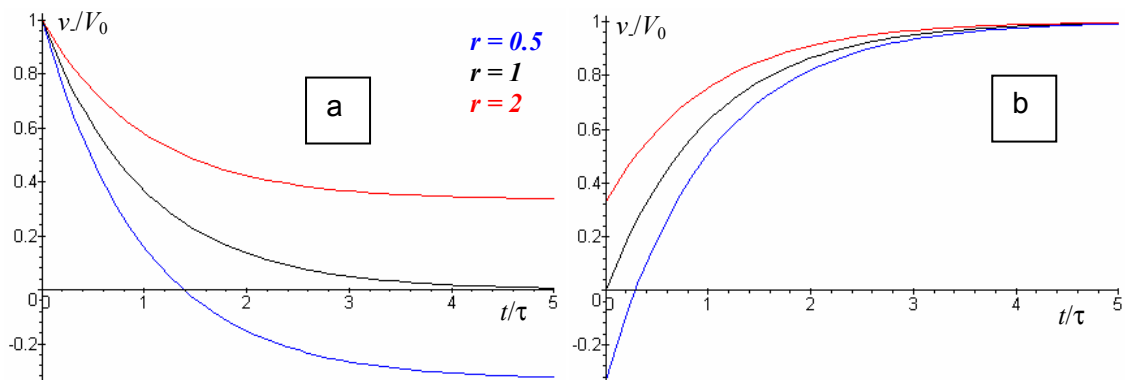
$$y: V_-(0,s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s} = \frac{R - Z_0 - sCRZ_0}{R + Z_0 + sCRZ_0} \frac{V_0}{s} = \left[\frac{R - Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{s} - \frac{2R}{R + Z_0} \frac{1}{s + 1/\tau} \right] V_0$$

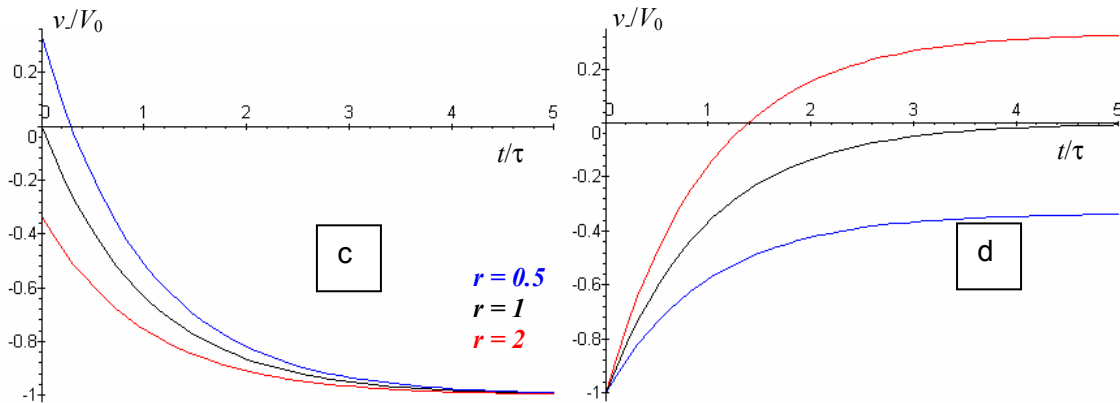
donde $\tau = CRZ_0 / (R + Z_0)$. La antitransformada de esta expresión es:

$$v_-(0,t) = V_0 \left[\frac{R - Z_0}{R + Z_0} - \frac{2R}{R + Z_0} e^{-t'/\tau} \right] u(t') \quad \text{con } t' = t - t_1$$

Se ve que para $t' = 0 \Rightarrow v_-(0,t_1) = -V_0$ ya que el capacitor es inicialmente un cortocircuito y la tensión sobre la carga debe anularse.

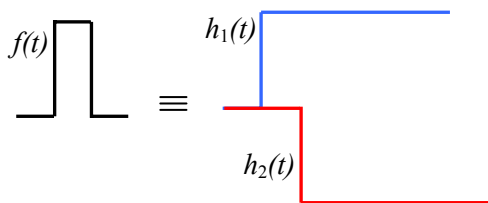
Las formas de onda de la onda regresiva en cada uno de estos casos se representa en las siguientes figuras, donde $r = R/Z_0 = 0.5, 1, 2$.





Estas ondas viajan hacia la entrada **desde el mismo instante** t_1 en que se generan. Las diversas formas de onda que se obtienen cuando la impedancia de carga no es resistiva pura permiten sacar conclusiones del tipo de impedancia de carga y da origen a aplicaciones técnicas².

En los ejemplos precedentes se conectó una batería a la línea. Desde el punto de vista matemático se usó una función escalón para describir la propagación de las ondas en la línea. Habitualmente en lugar de enviar un escalón se envía un **pulso**



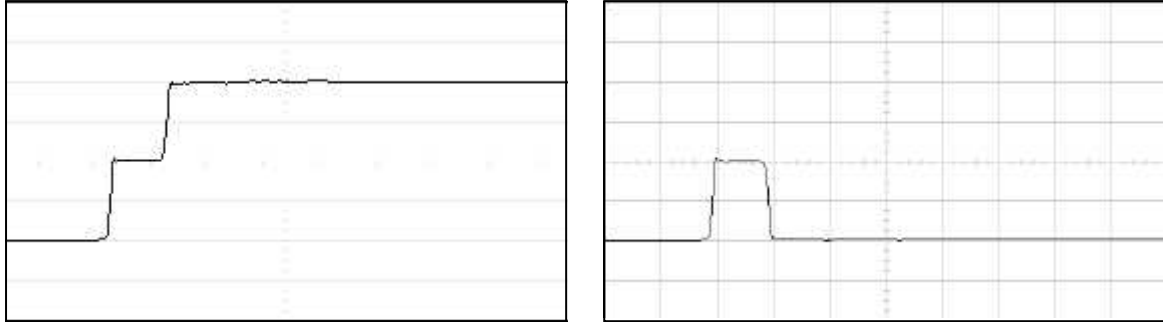
por la línea. Podemos usar los resultados obtenidos ya que el pulso es equivalente a dos escalones separados en el ancho temporal del pulso y de amplitudes iguales y de signo opuesto, como se muestra en la figura:
 $f(t) = h_1(t) + h_2(t - \tau)$.

Para analizar el comportamiento de la propagación de pulsos en una línea de transmisión, debemos comparar el tiempo de viaje a lo largo de la línea con el ancho del pulso. Si el ancho del pulso es mucho menor que el tiempo de viaje el pulso mantiene su entidad en la propagación y las formas de onda obtenidas en el ejemplo previo son aplicables. Si el ancho de pulso es comparable con el tiempo de tránsito el problema se complica, especialmente cuando hay múltiples rebotes, y es necesario un cálculo por computadora.

² Hewlett-Packard Application Note 1304-2, "Time Domain Reflectometry Theory", 1988 (HP-AN1304.PDF).

APLICACION: TDR

El comportamiento de la propagación de pulsos por una línea da la base de un método de análisis de cargas en líneas de transmisión, la **reflectometría en el dominio del tiempo** (TDR). Esta técnica se basa en enviar un escalón o un pulso desde el extremo del generador (adaptado a la línea \Rightarrow no hay rebotes a la entrada) y observar la forma de onda. En las fotos de la pantalla de un osciloscopio que siguen se presenta un caso de circuito abierto y otro de cortocircuito en el extremo de carga, con un generador prácticamente ideal ($R_s \rightarrow 0$):



La técnica permite hallar la longitud de línea entre el punto de observación y el sitio donde se produce la reflexión por desadaptación de impedancias (midiendo el intervalo $\Delta t = 2L/v$ que tarda en cambiar la lectura) y la impedancia del punto de desadaptación midiendo la altura del salto $\Delta V = V_0[1 + \rho_L(1 + \rho_s)]$ de donde se puede calcular ρ_L y por lo tanto Z_L conociendo ρ_s .

Esta técnica se puede usar para:

- conociendo el tipo de línea ($\Rightarrow v$), calcular su longitud. Se deja el extremo de carga en circuito abierto y se mide a la entrada el tiempo Δt que tarda el pulso rebote.
Luego: $L = v\Delta t/2$.
- conociendo la longitud, calcular los parámetros de la línea. Se carga la línea con una impedancia resistiva conocida R_L . La velocidad de propagación se calcula a partir del tiempo de rebote: $v = 2L/\Delta t$. La línea se considera de pérdidas despreciables (Z_0 real). Como no hay rebotes a la entrada, la tensión en ella es:

$$v_{in} = V_0(1 + \rho_L) \Rightarrow \Delta v = v_{in} - V_0 = \rho_L V_0 \Rightarrow \rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{\Delta v}{V_0} \Rightarrow Z_0 = \frac{V_0 - \Delta v}{V_0 + \Delta v} R_L$$

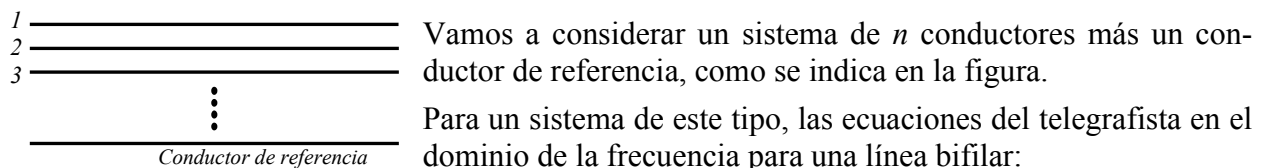
Entre otras aplicaciones, esta técnica permite detectar fallas en líneas de transmisión muy largas midiendo desde un extremo (o un punto conveniente). Se envía un pulso y se observa la forma de onda. Si se registran rebotes es señal de que hay una desadaptación de impedancias. El tiempo de rebote da la posición de (la primera) discontinuidad. La forma de onda da el tipo de desadaptación y permite inferir el tipo de fallas. El análisis de los ejemplos precedentes se puede extender a múltiples puntos de desadaptación. Hay procedimientos semi-automáticos de detección de fallas en líneas muy largas que usan además sistemas de GPS para la localización geográfica³.

³ Hewlett-Packard Application Note 1285, "Traveling Wave Fault Location in Power Transmission Systems", 1997 (HP-AN1285.PDF).

Líneas multifilares

En muchas situaciones la propagación de energía e información se realiza en sistemas multiconductores. Por ejemplo, un desbalance en una línea trifásica se propaga como una onda en un sistema formado por los conductores de las tres fases, el/los hilos de guarda y tierra. Muchos circuitos impresos y aún integrados en frecuencias suficientemente altas se comportan como guías de onda o líneas de transmisión con varios "electrodos vivos" por encima del "plano de tierra".

Por estos motivos la modelación de líneas multifilares es de especial interés. Los modelos son naturalmente más complicados que los referentes a líneas bifilares pero se puede utilizar una metodología similar, es decir considerar cada tramo de longitud infinitesimal a lo largo de la dirección de propagación como circuitos ahora con n puertas de entrada y n puertas de salida. Los elementos de circuito dentro de cada n -polo describirán ahora mediante matrices de impedancia/admitancia:



$$\frac{\partial v}{\partial z} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{dv_s}{dz} = -(R + i\omega L)i_s \quad \frac{\partial i}{\partial z} = -Gv - C \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow \frac{di_s}{dz} = -(G + i\omega C)v_s$$

se convierten en el sistema matricial:

$$\frac{d}{dz} [v_s(z)] + Z[i_s(z)] = 0 \quad \frac{d}{dz} [i_s(z)] + Y[v_s(z)] = 0$$

donde $[v_s(z)]$ es el vector de tensiones entre cada conductor y el conductor de referencia, $[i_s(z)]$ es el vector de corrientes en cada conductor y Z e Y son las matrices de coeficientes de impedancia y admitancia, respectivamente. Estas matrices son cuadradas de $(n \times n)$, y sus elementos incorporan las capacidades parciales e inductancias mutuas entre los conductores.

Estas ecuaciones acopladas pueden desacoplarse para dar:

$$\frac{d^2}{dz^2} [v_s(z)] + P[v_s(z)] = 0 \quad \text{donde} \quad \begin{matrix} P = ZY \\ R = YZ \end{matrix}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} [i_s(z)] + R[i_s(z)] = 0$$

Obsérvese que en general $P \neq R$. Para un cable de n conductores con un conductor de retorno, las matrices de impedancia/admitancia tienen la forma:

$$Z' = \begin{bmatrix} R_1 + R_{g11} + i\omega L_{11} & R_{g12} + i\omega M_{12} & \dots & R_{g1n} + i\omega M_{1n} \\ R_{g21} + i\omega M_{21} & R_2 + R_{g22} + i\omega L_{22} & \dots & R_{g2n} + i\omega M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{gn1} + i\omega M_{n1} & \dots & \dots & R_n + R_{gnn} + i\omega L_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Y = i\omega \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{12} & \dots & -C_{1n} \\ -C_{21} & C_{22} & \dots & -C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_{n1} & -C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

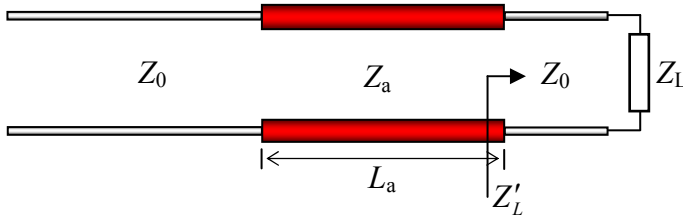
donde R_i son las resistencias de cada uno de los conductores de la línea, R_{gij} son las resistencias del retorno común, L_{ii} y M_{ij} son las autoinductancias e inductancias mutuas de y entre los conductores y C_{ij} son los coeficientes de capacidad/inducción para los conductores. Se han despre-

ciado las pérdidas del material dieléctrico entre los conductores, que darían lugar a conductancias en la matriz de admitancia. Se puede ver que los elementos no diagonales de ambas matrices surgen de los efectos reactivos mutuos y de la resistencia del cable de tierra o retorno común.

RESUMEN

- En este Capítulo presentamos las técnicas básicas de **adaptación de impedancias** entre una línea y una carga cualquiera:

- El **transformador de cuarto de onda** se coloca entre la línea y la carga (posiblemente a una distancia para que la impedancia que ve el transformador sea real) y cumple las ecuaciones:

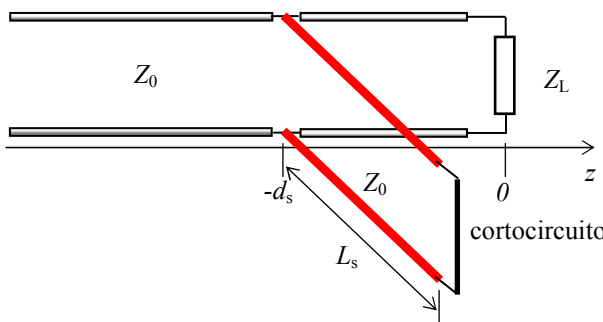


$$L_a = \lambda_a / 4 \quad Z_a = \sqrt{Z_0 Z'_L}$$

Este adaptador funciona solamente

a la frecuencia de diseño.

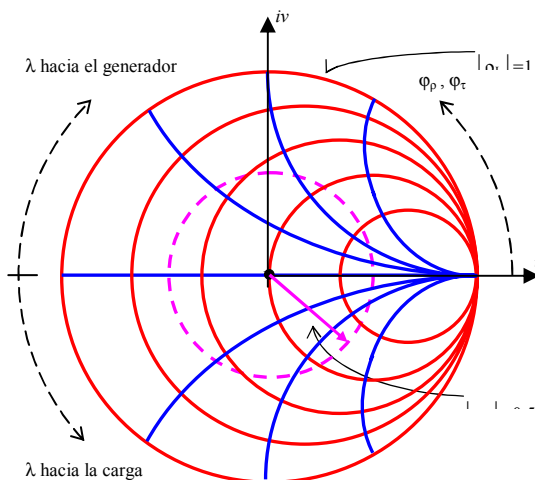
- El **stub** es un trozo de la misma línea que se coloca en paralelo con la carga a una distancia definida. El trozo o stub se puede terminar de diversas formas. Vemos solamente la forma más común, que es el cortocircuito. Las ecuaciones de diseño dan la posición y longitud del stub y son:



$$d_s = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{Z_L / Z_0} \right)$$

$$L_s = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{Z_L Z_0}}{Z_L - Z_0} \right)$$

- La **carta de Smith** permite obtener soluciones gráficas de problemas de uso de líneas de transmisión. Se basa en las propiedades de las ecuaciones de la impedancia y admitancia de onda a lo largo de la línea:



$$w = u + iv = |\rho_L| e^{i(2kz + \phi)} \quad z = Z/Z_0 = r + ix$$

$$z = (1 + w) / (1 - w)$$

La carta de Smith presenta círculos de r constante (en rojo), círculos de x constante (en azul) y círculos de $|\rho_L|$ constante (en violeta). Al moverse en la línea la impedancia normalizada z varía sobre un círculo de $|\rho_L|$ constante.

La carta de Smith permite calcular con facilidad todos los parámetros de una línea cargada y la adaptación mediante transformadores o stubs.

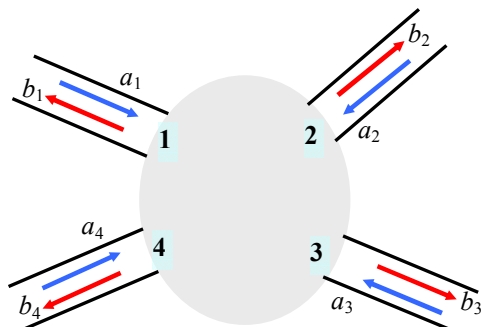
- Una línea donde existan ondas estacionarias se comporta como un **circuito resonante** de alto Q , con las siguientes características:

<i>Frecuencias de resonancia</i>	<i>Q y ancho de banda</i>
$f_n = \frac{n}{2l\sqrt{LC}}$	$Q_n = \frac{1}{(R/\omega_n L + G/\omega_n C)} = \frac{f_n}{\Delta f_n}$

- Se presentó una introducción al comportamiento de los **transitorios** en las líneas, donde se tienen en cuenta las propiedades de propagación de pulsos a lo largo de la línea. Esto da una serie de posibilidades técnicas, de las cuales la más común es la reflectometría en el dominio del tiempo (**TDR**) que permite obtener la posición y características de impedancia de discontinuidades en las líneas. Esta técnica se usa, por ejemplo, en la detección remota de defectos en líneas de alta tensión y caracterización de parámetros de líneas microstrips.
- Introducimos en un Apéndice las ideas relacionadas con la descripción de circuitos mediante la llamada **matriz de dispersión** y otras descripciones matriciales equivalentes, que son de mucha utilidad para analizar la propagación de ondas en estructuras complejas de guiado desde un punto de vista circuital. Analizamos estas ideas en el marco de la descripción de la propagación de ondas en líneas.

APENDICE 7: Matriz de Dispersión

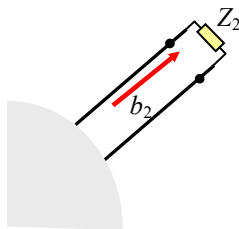
Muchos sistemas que propagan energía e información pueden considerarse como un conjunto de



puertos por los que entran y salen señales que transportan la energía e información. Existe un método general de descripción de **sistemas lineales de n-puertos**, cuando es posible establecer una relación lineal entre las señales de entrada y salida. Este método, llamado de la **matriz de dispersión**, es aplicable a un gran número de sistemas pasivos y activos y es de mucho uso en la descripción de circuitos de microondas.

Sea $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ el **vector de entradas** y $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ el **vector de salidas**. Estos vectores

están ligados entre sí por la llamada **matriz de dispersión**: $\mathbf{b} = \mathbf{S} \mathbf{a}$. Los elementos S_{ij} de la matriz están relacionados con distintos parámetros que definimos a continuación. Decimos que un puerto tiene su **salida adaptada** cuando está conectado a una impedancia de carga que no produce onda reflejada (que en caso de existir constituiría una onda incidente sobre el puerto). Por ejemplo, si el puerto 2 tiene su salida adaptada, se tiene $a_2 = 0$. Análogamente, el puerto tiene su **entrada adaptada** cuando no existe onda saliente del puerto. En tal caso, para ese puerto $b_i = 0$.



Supongamos un sistema donde todos los puertos, salvo el primero, tienen sus salidas adaptadas. Entonces $a_i = 0$ si $i > 1$. Las ecuaciones en la descripción de la matriz de dispersión se reducen a:

$$b_i = S_{i1} a_1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de modo que S_{11} es un **coeficiente de reflexión** del primer puerto mientras que los S_{i1} ($i > 1$) son **coeficientes de transferencia** de señal que liga al entrada en el primer puerto con las salidas en los otros puertos. Se los conoce como **ganancias** (o **pérdidas**) **de inserción**, según que sus módulos sean mayores o menores que 1. Resulta así que los coeficientes diagonales de la matriz de dispersión S_{ii} son coeficientes de reflexión del puerto en cuestión y los coeficientes fuera de la diagonal principal S_{ij} son coeficientes de transferencia o inserción entre distintos puertos.

Muchos sistemas satisfacen también la condición de **reciprocidad**: $S_{ij} = S_{ji}$. Esta condición significa que la transferencia de señales entre los puertos i y j es simétrica o recíproca.

Desde el punto de vista de la potencia o energía que se propaga entre los puertos, podemos decir que, en general, para señales armónicas la potencia media que ingresa en cada puerto (**potencia incidente**) es proporcional a $a_i a_i^* = |a_i|^2$, mientras que la potencia media que sale de cada puerto (**potencia reflejada**) es proporcional a $b_i b_i^* = |b_i|^2$. Por lo tanto, la potencia media **net**a que ingresa a cada puerto es proporcional a $|a_i|^2 - |b_i|^2$.

Analizamos nuevamente el caso donde todos los puertos, salvo el primero, tienen sus salidas adaptadas. En tal caso,

$$b_i = S_{i1} a_1 \Rightarrow |a_i|^2 - |b_i|^2 = \begin{cases} (1 - |S_{11}|^2) |a_1|^2 & i = 1 \\ -|S_{i1}|^2 |a_1|^2 & i > 1 \end{cases}$$

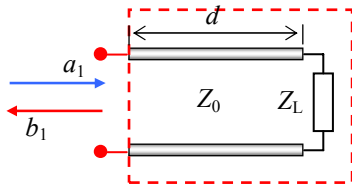
Si el sistema no tiene pérdidas ni ganancia de potencia, toda la potencia que entra debe salir, mientras que si hay pérdidas la potencia que sale debe ser menor que la que entra, de manera que para un **sistema pasivo**:

$$|a_1|^2 - \sum_{i=1}^n |b_i|^2 = |a_1|^2 - \sum_{i=1}^n |S_{i1}|^2 |a_1|^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |S_{i1}|^2 \leq 1$$

Se ve que cada sumando $|S_{i1}|^2$ representa la **fracción** de potencia incidente en el sistema que se propaga a cada puerto.

Vamos a ejemplificar sistemas de 1 y 2 puertos para líneas de transmisión.

1 Puerto



Para ejemplificar el caso de un sistema de un único puerto, consideramos un tramo de línea de longitud d conectada a una impedancia de carga Z_L . Suponemos que la línea es ideal (sin pérdidas) de impedancia característica Z_0 real. La entrada al tramo de línea es el único puerto. Definimos, como es costumbre en la literatura, las

señales en el puerto como:

$$a_1 = \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} \quad b_1 = \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}}$$

donde v_1 e i_1 son la tensión y la corriente en el puerto. Podemos relacionar estas cantidades con las ondas de tensión y corriente en la línea de la forma:

$$v_1 = v_+(-d) + v_-(-d) = V_+ [e^{i(\omega t + kd)} + \rho_L e^{i(\omega t - kd)}] = V_+ e^{i(\omega t + kd)} [1 + \rho_L e^{-i2kd}]$$

$$i_1 = i_+(-d) + i_-(-d) = \frac{V_+}{Z_0} [e^{i(\omega t + kd)} - \rho_L e^{i(\omega t - kd)}] = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t + kd)} [1 - \rho_L e^{-i2kd}]$$

de modo que:

$$a_1 = \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i(\omega t + kd)} [1 + \rho_L e^{-i2kd} + 1 - \rho_L e^{-i2kd}]}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+}{\sqrt{Z_0}} e^{i(\omega t + kd)}$$

$$b_1 = \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i(\omega t + kd)} [1 + \rho_L e^{-i2kd} - 1 + \rho_L e^{-i2kd}]}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\rho_L V_+ e^{-i2kd}}{\sqrt{Z_0}} e^{i(\omega t + kd)}$$

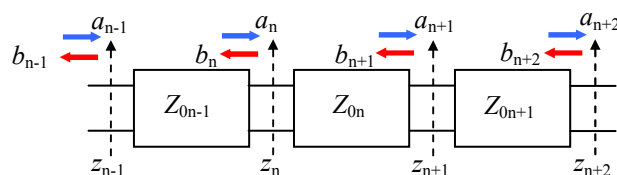
Luego la relación de dispersión es: $b_1 = S_{11} a_1 \Rightarrow S_{11} = \rho_L e^{-i2kd}$ de donde se puede ver que S_{11} es un coeficiente de reflexión, salvo un factor de fase.

También se ve que $|S_{11}|^2 = |\rho_L|^2 \leq 1$. Es 1 cuando hay reflexión total (carga 0 o ∞).

La impedancia en el puerto único es: $Z_1 = \frac{v_1}{i_1} = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-i2kd}}{1 - \rho_L e^{-i2kd}}$ que es la impedancia de entrada de la línea.

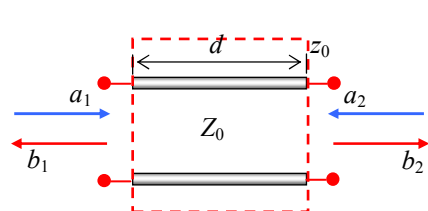
2 Puertos

Hemos adoptado un modelo de cuadripolo de una línea de transmisión para hallar las ecuaciones del telegrafista y, a partir de ellas, analizar la propagación de ondas en la línea. En general, es posible describir el comportamiento de la línea en términos de la matriz de dispersión modelizándola como un conjunto de cuadripolos en cascada.



Para el n -ésimo elemento del conjunto definimos una onda incidente a_n y una onda reflejada b_n y le adjudicamos una impedancia característica Z_{0n} . Considerar que la impedancia característica sea variable elemento a elemento de la cascada nos permite analizar sistemas no uniformes e incorporar dispositivos intermedios como acopladores, filtros, etc.

Consideramos uno de los cuadripolos como un tramo de línea ideal de impedancia característica Z_0 y longitud d . El puerto más cercano a la carga Z_L se halla en la posición z_0 . Definimos



Consideramos uno de los cuadripolos como un tramo de línea ideal de impedancia característica Z_0 y longitud d . El puerto más cercano a la carga Z_L se halla en la posición z_0 . Definimos

las variables de puerto como en el caso previo⁴:

$$a_1 = \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} \quad b_1 = \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}}$$

$$a_2 = \frac{v_2 - Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} \quad b_2 = \frac{v_2 + Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}}$$

Desde el punto de vista de la línea de transmisión, las ondas que inciden y se reflejan sobre los puertos son:

$$\text{Ondas incidentes} \begin{cases} v_{1+} = V_+ e^{i[\omega t + k(z_0 + d)]} & i_{1+} = V_+ / Z_0 e^{i[\omega t + k(z_0 + d)]} \\ v_{2-} = \rho_L V_+ e^{i(\omega t - k z_0)} & i_{2-} = -\rho_L V_+ / Z_0 e^{i(\omega t - k z_0)} \end{cases}$$

$$\text{Ondas reflejadas} \begin{cases} v_{1-} = \rho_L V_+ e^{i[\omega t - k(z_0 + d)]} & i_{1-} = -\rho_L V_+ / Z_0 e^{i[\omega t - k(z_0 + d)]} \\ v_{2+} = V_+ e^{i(\omega t + k z_0)} & i_{2+} = V_+ / Z_0 e^{i(\omega t + k z_0)} \end{cases}$$

Entonces las variables del puerto son:

$$a_1 = \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{(v_{1+} + v_{1-}) + Z_0 (i_{1+} + i_{1-})}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i[\omega t + k(z_0 + d)]}}{\sqrt{Z_0}} \quad b_1 = \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\rho_L V_+ e^{i(\omega t - k z_0)}}{\sqrt{Z_0}}$$

$$a_2 = \frac{v_2 - Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\rho_L V_+ e^{i(\omega t - k z_0)}}{\sqrt{Z_0}} \quad b_2 = \frac{v_2 + Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i(\omega t + k z_0)}}{\sqrt{Z_0}}$$

y se observa entonces que:

$$v_{1+} = \sqrt{Z_0} a_1 \quad v_{1-} = \sqrt{Z_0} b_1 \quad i_{1+} = a_1 / \sqrt{Z_0} \quad i_{1-} = -b_1 / \sqrt{Z_0}$$

$$v_{2+} = \sqrt{Z_0} b_2 \quad v_{2-} = \sqrt{Z_0} a_2 \quad i_{2+} = b_2 / \sqrt{Z_0} \quad i_{2-} = -a_2 / \sqrt{Z_0}$$

Las variables de puerto están relacionadas entre sí por el sistema lineal:

$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$$

Para calcular los coeficientes de la matriz de dispersión usamos la técnica de adaptar la salida (o entrada) de los puertos sucesivamente para simplificar las ecuaciones. Supongamos primero que el puerto de **salida** está **adaptado** (no hay onda incidente sobre la salida):

$$a_2 = 0 \Rightarrow b_1 = S_{11} a_1 \quad b_2 = S_{21} a_1$$

Entonces:

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\rho_L V_+ e^{i[\omega t - k(z_0 + d)]}}{V_+ e^{i[\omega t + k(z_0 + d)]}} = \rho_L e^{-i2k(z_0 + d)} \quad S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{V_+ e^{i(\omega t + k z_0)}}{V_+ e^{i[\omega t + k(z_0 + d)]}} = e^{-ikd}$$

Se ve que S_{11} es el coeficiente de reflexión de las ondas a la entrada y S_{21} es un factor de desfase introducido en la propagación de la onda progresiva en el puerto **cuando la salida está adaptada**. Para líneas sin pérdidas $|S_{21}| = 1$, mientras que en líneas con pérdidas $|S_{21}| < 1$, ya que el número de onda k es entonces complejo, indicando una atenuación de la onda en su propagación a lo largo del puerto. En general, el puerto puede incorporar un circuito activo que amplifique la onda incidente, en cuyo caso tendremos $|S_{21}| > 1$. Por lo tanto, S_{21} se conoce como **ganancia** (o **pérdida**) de **inserción** del puerto, e indica el factor que el puerto introduce para la onda progresiva en la propagación.

⁴ Nótese que las a_i se refieren a las ondas incidentes en el puerto i -ésimo. Así a_2 está asociada a la onda que sale del puerto 1, que es la onda "reflejada" en el puerto 1.

Análogamente, si ahora suponemos que la **entrada** del puerto está **adaptada** (no hay onda incidente sobre la entrada): $v_{1+} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

y las ecuaciones de dispersión quedan: $b_1 = S_{12}a_2 \quad b_2 = S_{22}a_2$

$$\text{de donde: } S_{22} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{V_+ e^{i(\omega t + kz_0)}}{\rho_L V_+ e^{i(\omega t - kz_0)}} = \frac{1}{\rho_L} e^{i2kz_0} \quad S_{12} = \frac{b_1}{a_2} = \frac{\rho_L V_+ e^{i(\omega t - k(z_0+d))}}{\rho_L V_+ e^{i(\omega t - kz_0)}} = e^{-ikd}$$

Se ve que S_{22} es el coeficiente de reflexión de las ondas a la salida (aquí escrito en términos del coeficiente de reflexión en la carga de la línea) y S_{12} es el factor de desfase introducido en la propagación de la onda regresiva en el puerto **cuando la entrada está adaptada**.

Se observa además que: $S_{12} = S_{21}$. Esta es una condición general de los puertos que cumplen la llamada relación de **reciprocidad**, que conceptualmente puede definirse como la situación donde el puerto de comporta de la misma manera para la propagación en ambos sentidos.

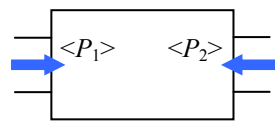
La impedancia en el puerto de entrada es:

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{v_{1+} + v_{1-}}{i_{1+} + i_{1-}} = Z_0 \frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1} = Z_0 \frac{(1 + S_{11})a_1 + S_{12}a_2}{(1 - S_{11})a_1 - S_{12}a_2}$$

$$\text{En el caso de salida adaptada } (a_2 = 0): \quad Z_{in}|_{a_2=0} = Z_0 \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} \Rightarrow S_{11} = \frac{Z_{in}|_{a_2=0} - Z_0}{Z_{in}|_{a_2=0} + Z_0}$$

$$\text{Análogamente: } Z_{out} = \frac{v_2}{i_2} = \frac{v_{2+} + v_{2-}}{i_{2+} + i_{2-}} = Z_0 \frac{b_2 + a_2}{b_2 - a_2} = Z_0 \frac{S_{21}a_1 + (1 + S_{22})a_2}{S_{21}a_1 - (1 - S_{22})a_2}$$

$$\text{Y para entrada adaptada } (a_1 = 0): \quad Z_{out}|_{a_1=0} = -Z_0 \frac{1 + S_{22}}{1 - S_{22}} \Rightarrow S_{22} = \frac{Z_{out}|_{a_1=0} + Z_0}{Z_{out}|_{a_1=0} - Z_0}$$



Analicemos el comportamiento de transmisión de potencia. Las potencias medias netas (incidente – reflejada) en cada puerto son⁵:

$$\begin{aligned} \langle P_1 \rangle &= \langle v_{1+} i_{1+} + v_{1-} i_{1-} \rangle = \frac{1}{2} \Re e(v_{1+} i_{1+}^* + v_{1-} i_{1-}^*) = \frac{1}{2} \Re e(a_1 a_1^* - b_1 b_1^*) = \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |S_{11} a_1 + S_{12} a_2|^2) \\ &= \frac{1}{2} [|a_1|^2 (1 - |S_{11}|^2) - |S_{12}|^2 |a_2|^2 - 2 \Re e(S_{11} S_{12}^* a_1 a_2^*)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle P_2 \rangle &= \langle -v_{2-} i_{2-} - v_{2+} i_{2+} \rangle = \frac{1}{2} \Re e(-v_{2-} i_{2-}^* - v_{2+} i_{2+}^*) = \frac{1}{2} \Re e(a_2 a_2^* - b_2 b_2^*) = \frac{1}{2} (|a_2|^2 - |S_{21} a_1 + S_{22} a_2|^2) \\ &= \frac{1}{2} [|a_2|^2 (1 - |S_{22}|^2) - |S_{21}|^2 |a_1|^2 - 2 \Re e(S_{21} S_{22}^* a_2 a_1^*)] \end{aligned}$$

La potencia neta que fluye hacia la derecha del cuadripolo es:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle P_1 \rangle - \langle P_2 \rangle = \frac{1}{2} [|a_1|^2 (1 - |S_{11}|^2) - |S_{12}|^2 |a_2|^2 - 2 \Re e(S_{11} S_{12}^* a_1 a_2^*)] \\ &\quad - \frac{1}{2} [|a_2|^2 (1 - |S_{22}|^2) - |S_{21}|^2 |a_1|^2 - 2 \Re e(S_{21} S_{22}^* a_2 a_1^*)] \end{aligned}$$

Consideremos el caso de salida adaptada, donde $v_{2-} = 0 \Rightarrow a_2 = 0$:

$$\langle P \rangle = \langle P_1 \rangle - \langle P_2 \rangle = \frac{1}{2} [|a_1|^2 (1 - |S_{11}|^2)] - \frac{1}{2} [-|S_{21}|^2 |a_1|^2] = \frac{1}{2} [|a_1|^2 (1 - |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2)]$$

Si la salida está adaptada, esta cantidad será nula si no hay pérdidas, ya que representa la potencia neta que ingresa al puerto de entrada menos la que sale del puerto de salida. Si hay pérdidas, la potencia neta que entra es mayor que la que sale y la cantidad es positiva. Entonces:

⁵ Obsérvese que las potencias reflejadas a la entrada y la salida son de por sí negativas, lo que indica que son potencias que fluyen **hacia fuera** del cuadripolo.

$$1 - |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 \geq 0 \Rightarrow |S_{21}|^2 \leq 1 - |S_{11}|^2$$

El coeficiente de reflexión de potencia a la entrada es:

$$R = \frac{\langle -v_{1-} i_{1-} \rangle}{\langle v_{1+} i_{1+} \rangle} = \frac{\frac{1}{2} \Re(b_1 b_1^*)}{\frac{1}{2} \Re(a_1 a_1^*)} = \frac{|S_{11} a_1 + S_{12} a_2|^2}{|a_1|^2} = \frac{|S_{11}|^2 |a_1|^2 + |S_{12}|^2 |a_2|^2 - 2 \Re(S_{11} S_{12}^* a_1 a_2^*)}{|a_1|^2}$$

En el caso de la salida adaptada queda: $R = |S_{11}|^2$

como para el sistema de 1 puerto.

Relación con otras descripciones matriciales

La descripción de la propagación por medio de cuádrupolos y la matriz de dispersión está asociada a otras descripciones.

La **matriz de transmisión** T permite relacionar las ondas a la salida del cuádrupolo en función de las ondas en su entrada. En nuestra notación:

$$b_2 = T_{11} a_1 + T_{12} b_1$$

$$a_2 = T_{21} a_1 + T_{22} b_1$$

Los coeficientes de la matriz de transmisión están relacionados con los de la matriz de dispersión por las relaciones:

$$T_{11} = \frac{S_{21} S_{12} - S_{11} S_{22}}{S_{12}} \quad T_{12} = S_{22} / S_{12} \quad T_{21} = -S_{11} / S_{12} \quad T_{22} = 1 / S_{12}$$

La matriz de transmisión es más cómoda que la de dispersión para tratar una cascada de cuádrupolos.

La **matriz de impedancias** Z relaciona las tensiones en los puertos con las corrientes:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

La **matriz de admitancias** Y es la inversa de Z :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases} \Rightarrow Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta} \quad Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta} \quad Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{\Delta} \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta}$$

$$\text{con} \quad \Delta = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}$$

Podemos relacionar la matriz de dispersión con la matriz de impedancias mediante las siguientes ecuaciones:

$$S_{11} = \frac{(z_{11} - 1)(z_{22} - 1) - z_{12} z_{21}}{(z_{11} + 1)(z_{22} + 1) - z_{12} z_{21}} \quad S_{22} = \frac{(z_{11} + 1)(z_{22} - 1) - z_{12} z_{21}}{(z_{11} + 1)(z_{22} + 1) - z_{12} z_{21}}$$

$$S_{12} = \frac{2z_{12}}{(z_{11} + 1)(z_{22} + 1) - z_{12} z_{21}} \quad S_{21} = \frac{2z_{21}}{(z_{11} + 1)(z_{22} + 1) - z_{12} z_{21}}$$

donde $z_{ij} = Z_{ij} / Z_0$ son las impedancias normalizadas a la impedancia característica del tramo.

Estas descripciones matriciales de dispositivos y líneas de transmisión son de importancia porque proveen de una forma sencilla de conectar sucesivos dispositivos sin resolver en detalle las ecuaciones del circuito completo, y permiten utilizar programas como el Spice para analizar el comportamiento del circuito a partir de la descripción matricial de cada bloque.

PROBLEMAS

6.11) A partir del diagrama de Smith, hallar la impedancia de entrada de una sección de línea de transmisión sin pérdidas de 50Ω con longitud de 0.1λ , terminada en un cortocircuito. Comparar con el resultado analítico.

$$[\text{Rta: } Z_i = i 36.3 \Omega]$$

6.12) Empleando la carta de Smith, encuentre la longitud mínima en metros que debe tener una línea con $Z_0 = 100 \Omega$, terminada en circuito abierto para que a la entrada presente una impedancia de $i30 \Omega$. Considere que la permitividad relativa ϵ_r del dieléctrico de la línea vale 2.5 y que la frecuencia de trabajo es de 300 Mhz .

$$[\text{Rta: } 18.8 \text{ cm}]$$

6.13) Una línea de transmisión sin pérdidas, con impedancia característica de 50Ω , está terminada en una carga cuya impedancia vale $Z_L = (50 + i20) \Omega$. Si la línea mide $\lambda/4$, obtenga la impedancia de entrada a partir del diagrama de Smith.

$$[\text{Rta: } Z_i = (43 - i17.5) \Omega]$$

6.14) Una línea de transmisión ideal, con impedancia característica de 100Ω , está terminada en una carga de valor $(150 + i150) \Omega$. Se desea acoplarla por medio de un adaptador de $\lambda/4$, colocado a cierta distancia L_a de la carga. Calcule la impedancia característica del adaptador y la distancia L_a a la que debe colocarse.

$$[\text{Rta: } Z_a = 183 \Omega, L_a = 0.056\lambda]$$

6.15) Dada una impedancia $Z = (95 + i20) \Omega$, determinar a que admitancia corresponde utilizando el diagrama de Smith.

$$[\text{Rta: } Y = (10 - i2) \text{ mS}]$$

6.16) Una línea de transmisión ideal de longitud 0.434λ y cuya impedancia característica es de 100Ω , está terminada en una impedancia de $(260 + i180) \Omega$. Calcule a) el coeficiente de reflexión, b) la razón de onda estacionaria, c) la impedancia de entrada y d) la posición del valor máximo de voltaje más cercano a la carga.

$$[\text{Rta: } \rho = 0.6/21.6^\circ, S = 4, Z_i = (69 + i120) \Omega, \text{ a } 0.03\lambda \text{ de la carga}]$$

6.17) Una línea de transmisión sin pérdidas tiene una impedancia característica de 100Ω y está terminada con una carga $(120 + i80) \Omega$. Se desean evitar las reflexiones hacia el generador, acoplando la línea con un equilibrador reactivo. Encuentre la posición más cercana a la carga sobre la línea principal donde debe unirse el stub y obtenga la longitud del mismo.

$$[\text{Rta: } l_1 = 0.232\lambda, L_1 = 0.148\lambda]$$

6.18) Se conecta un generador de tensión ideal a una línea de 50Ω , $v = 0.85c$, $\alpha_c = 2 \text{ dB/m}$, $\alpha_d = 0.25 \text{ dB/m}$, $L = \lambda$ a 100 MHz . El generador se coloca a $\lambda/4$ del extremo izquierdo de la línea. Los extremos de la línea se cortocircuitan. a) Determinar las expresiones de la tensión y la corriente a lo largo de la línea. b) Calcular la potencia cedida por el generador en resonancia. c) Calcular el Q y el ancho de banda de la línea.

6.19) Una batería de $30V$ en serie con una resistencia de 75Ω se conecta a través de una línea de 50Ω y $L = 600m$ de longitud con una carga resistiva de 30Ω . a) Dibujar los diagramas de rebote de la tensión y la corriente. b) Graficar $V(L/2, t)$ e $I(L/2, t)$. c) ¿Cuáles son los valores finales de tensión y corriente sobre la carga?

6.20) Repita el problema anterior si ahora el generador es una fuente de pulsos de periodo $T = 10 \text{ ms}$ y ciclo útil del 75%.