

## 3 - Campos Cuasi-Estáticos 2

### Corrientes Estacionarias y Campo Magnetostático.

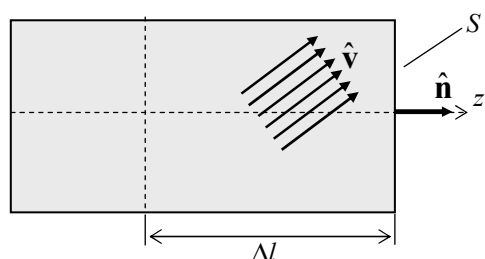
#### Corriente eléctrica

Los conductores se caracterizan por poseer carga libre. En una situación **electrostática** no puede haber movimiento de cargas y los portadores se distribuyen en la superficie del cuerpo para anular el campo en el interior. Sin embargo conocemos por experiencia que la imposición de un campo eléctrico a un cuerpo conductor puede establecer una **corriente eléctrica**, es decir, un **movimiento ordenado de los portadores de carga**. Este fenómeno **ya no es electrostático** y entonces existe campo en el interior de los conductores cuando circula una corriente.

- Llamamos corriente eléctrica a un movimiento colectivo ordenado de portadores de carga en un conductor.
- Existe campo eléctrico dentro del conductor cuando existe una corriente

En presencia de un campo eléctrico los portadores de carga se aceleran, pero sólo pueden viajar un corto trecho hasta que experimentan una **"colisión"** con la red cristalina u otros iones. En esta colisión hay una transferencia de energía desde el portador de carga móvil, que se ve frenado, al conjunto del cuerpo material. El portador de carga se vuelve a acelerar por acción del campo y se vuelve a frenar. Esta situación continúa a lo largo del tiempo y se refleja en que el conjunto de portadores de carga viaja por el conductor a una **velocidad media  $\mathbf{v}$** . En ausencia de campo los portadores de carga se mueven por su energía térmica (sólo a  $0K$  – valor inalcanzable - una partícula estaría en reposo), pero sus movimientos son al azar y el conjunto tiene una velocidad promedio nula. Sin embargo, estos movimientos al azar generan **fluctuaciones de corriente** de muy bajo valor, pero que son importantes en aplicaciones electrónicas donde se manejan intensidades de corriente bajas.

Consideremos un conductor donde existe una corriente eléctrica. Los portadores de carga se mueven con una velocidad media  $\mathbf{v}$ . Deseamos calcular la cantidad de carga que atraviesa una



sección del conductor por unidad de tiempo. La cantidad de carga que atraviesa una sección  $S$  en un intervalo  $\Delta t$  es la asociada a todos los portadores que se encuentren en un intervalo  $\Delta l = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t$  que son los que en ese intervalo pueden llegar a la sección. Si  $\rho$  es la densidad de portadores de carga, la cantidad de carga que atraviesa la sección elemental  $dS$  es:  $\Delta Q = \rho \Delta t \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ .

Llamamos **corriente** a la **cantidad de carga por uni-**

**dad de tiempo** que atraviesa la sección:

$$dI = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad \Rightarrow \quad I = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

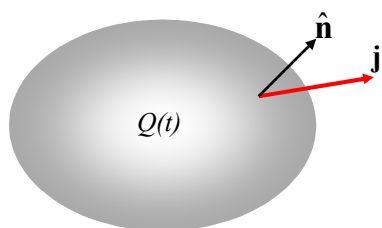
donde  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}$  es la llamada **densidad de corriente**. La densidad de corriente es un campo vectorial porque la magnitud corriente debe definirse por su módulo, dirección y sentido.

**La corriente que atraviesa una sección del conductor es el flujo de la densidad de corriente a través de su área.**

**Conservación de la carga. Ecuación de continuidad**

El **principio de conservación de la carga eléctrica** es un principio general de la física, y estipula que la carga no se crea ni se destruye, de manera que la variación de carga dentro de un recinto cerrado implica que hay un flujo de carga (una corriente) a través de la superficie frontera.

Para hallar una expresión matemática de este principio consideremos un cuerpo conductor donde exista una carga dependiente del tiempo  $Q(t)$ . Si la carga depende del tiempo es necesario que exista un flujo de carga (una corriente) a través de la superficie frontera  $S$ . Tenemos entonces:



$$I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}) \, dv$$

Si el recinto de integración es invariante en el tiempo, podemos introducir la derivada respecto del tiempo dentro de la integral de

volumen. Además, por el teorema de la divergencia:  $\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dv$

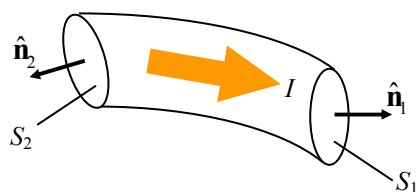
y tenemos:  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv \Rightarrow \int_V \left( \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \, dv = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Esta es la llamada **ecuación de continuidad**. Describe la conservación de la carga, y establece que las variaciones en el tiempo de la densidad de carga son las fuentes de la corriente eléctrica, considerada como campo vectorial

**Corrientes estacionarias**

Cuando la densidad de carga **no depende del tiempo**, el vector densidad de corriente tampoco depende del tiempo, y la ecuación de continuidad lleva a:  $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$  es decir que el vector densidad de corriente no tiene fuentes ni sumideros en el recinto en consideración. Hablamos entonces de una **corriente estacionaria** o **continua**:

Consideremos el caso en que tal corriente circula por un alambre conductor, que puede ser parte de un circuito. Un trozo de este alambre, entre las secciones  $S_1$  y  $S_2$  se muestra en la figura. Aplicando la ecuación de continuidad al volumen de este trozo de alambre:

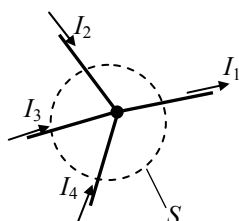


$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dv = \oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

por el teorema de la divergencia. Pero sólo hay flujo de corriente sobre las secciones extremas del alambre:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, ds + \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, ds = I_1 - I_2 = 0$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  son las corrientes que atraviesan la sección  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente. Se ve que en el caso de corriente estacionaria toda la corriente que entra por un extremo del alambre sale por el otro, es decir, **no hay acumulación de carga** en el trozo de material. Como las secciones elegidas son cualesquiera, se concluye que la **corriente es la misma en todas las secciones del alambre**, o sea que es constante a lo largo del circuito, y en ningún punto del conductor hay una acumulación de carga.



En un circuito eléctrico hay **nodos** donde confluyen distintas **ramas** que llevan corriente. Si las corrientes son estacionarias, el flujo de  $\mathbf{j}$  a través de una superficie cerrada  $S$  que encierra al nodo es nulo. Pero  $\mathbf{j}$  es no nula sólo en los alambres que conducen corriente, de forma que podemos escribir, en forma similar al caso anterior:  $\sum I_i = 0$  que es la

**primera ley de Kirchoff.**

En resumen:

**Corrientes estacionarias o continuas:**

- La densidad de corriente y la corriente son independientes del tiempo:
 
$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

$$I(\mathbf{r}, t) = I(\mathbf{r})$$
- $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$
- La corriente es independiente de la posición ( $I(\mathbf{r}) = I_0 = cte.$  )
- Se cumple la 1ra. ley de Kirchhoff

**Caso cuasi-estacionario (o cuasi-estático)**

En situaciones de interés tecnológico las corrientes varían en el tiempo pero muy lentamente. Como cualquier variación en el tiempo físicamente significativa se puede expresar como una superposición de funciones armónicas mediante una integral de Fourier, analizaremos el caso de una variación armónica pura, del tipo:  $\rho(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\rho(\mathbf{r})e^{i\omega t}\}$  donde  $\omega=2\pi f$  y  $f$  es la frecuencia en Hz de la corriente. De la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \text{Re}\{i\omega\rho\} = 0$$

y se ve que si la frecuencia es baja el segundo sumando es de poca importancia. Para frecuencias bajas entonces podemos escribir  $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \approx 0$  y las corrientes son **cuasi-estacionarias**, es decir, no son estrictamente hablando corriente continua (dependen del tiempo) pero aproximadamente se comportan como tales.

**El caso cuasi-estacionario es de mucha importancia porque es el límite de las ecuaciones del electromagnetismo para bajas frecuencias, que lleva a la teoría de circuitos.**

**Ley de Ohm. Conductividad y Resistividad. Movilidad**

La ecuación de continuidad establece propiedades del vector densidad de corriente que surgen de la conservación de la carga eléctrica. Pero la existencia de una corriente depende de la presencia de un campo eléctrico que produzca el movimiento de las cargas. Debe existir entonces una relación entre el campo eléctrico y la corriente. Esa relación fue hallada por Ohm. Sus experimentos pueden resumirse en que el vector densidad de corriente es proporcional al campo aplicado:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \text{donde } \sigma \text{ es la } \mathbf{conductividad} \text{ del material}$$

Esta es la llamada forma microscópica de la **ley de Ohm**. Para muchos materiales de importancia tecnológica (para corrientes continuas y cuasi-estacionarias)  $\sigma$  es una constante que depende únicamente del material en cuestión. En la literatura técnica suele usarse con más frecuencia la **resistividad**  $\rho = 1/\sigma$ . La unidad de resistividad es *ohm/m* y la de conductividad *mho/m = siemens/m* siendo el ohm la unidad de resistencia eléctrica que definimos más abajo.

Como la densidad de corriente depende de la velocidad media del conjunto de portadores (llamada también **velocidad de arrastre** en la literatura de física de sólidos), podemos vincular esta velocidad con el campo eléctrico aplicado usando la ley de Ohm:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v} = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{v} = \sigma \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} = \mu \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mu = \frac{\sigma}{\rho(\mathbf{r})}$$

donde  $\mu$  es la llamada **movilidad** de los portadores.

En la mayoría de los casos de interés, los portadores son partículas discretas, de manera que, si  $n(\mathbf{r})$  es el número de portadores por unidad de volumen y  $q$  es la carga de cada portador individual:  $\rho(\mathbf{r}) = q n(\mathbf{r}) \Rightarrow \mu = \sigma/q n(\mathbf{r})$

De esta ecuación se puede expresar la conductividad del material en función de la movilidad de sus portadores:  $\sigma = q n(\mathbf{r})\mu$

Desde el punto de vista microscópico, se puede asociar la movilidad de los portadores de carga en un conductor con la dinámica del movimiento estadístico de los portadores. La teoría de Drude vincula a la movilidad con el **tiempo medio entre colisiones**  $\tau$  y la **masa efectiva**  $m^*$  de los portadores de carga en el material<sup>1</sup>:  $\mu = q\tau/m^*$

Por lo tanto, relacionando ambas descripciones, tenemos: 
$$\sigma = \frac{q^2 \tau}{m^*} n(\mathbf{r})$$

de donde se pueden expresar los parámetros microscópicos en función de los macroscópicos y viceversa.

De acuerdo a la facilidad con que se establece una corriente eléctrica en un material, éstos se clasifican en:

- **conductores:** existe gran cantidad de portadores de carga, lo que hace posible obtener corrientes elevadas. Ejemplos: metales, soluciones iónicas.
- **aisladores:** existen muy pocos portadores de carga. Las corrientes que se pueden establecer son prácticamente inexistentes (para campos eléctricos no demasiado intensos, que lleven a ruptura dieléctrica). Ejemplos: agua destilada, aire.
- **semiconductores:** la disponibilidad de portadores de carga es intermedia entre los casos anteriores, y depende fuertemente de la temperatura y de la existencia de impurezas (dopantes). Ejemplos: silicio, germanio, AsGa.
- **superconductores:** por debajo de cierta temperatura crítica  $T_C$ , los electrones libres de un material se juntan de a pares llevando a un gas de bosones que disminuye la resistividad del material a valores prácticamente despreciables. Ejemplos: a temperaturas de helio líquido Al ( $T_C = 1.18K$ ), In ( $T_C = 3.41K$ ), V ( $T_C = 5.4K$ ), Pb-Bi ( $T_C = 8.3K$ ), etc., y a temperaturas de nitrógeno líquido diversos compuestos cerámicos de la familia de las **perovskitas**, como  $Y_2Ba_4Cu_8O_{16}$  ( $T_C = 81K$ ),  $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$  ( $T_C = 108K$ ) y  $Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$  ( $T_C = 125K$ )<sup>2</sup>.

### Coefficiente térmico

Dado que la resistividad eléctrica de un conductor depende de procesos de colisión que experimentan sus portadores de carga, es lógico que dependa de la temperatura. Como al aumentar la temperatura aumenta la energía y la velocidad media de los portadores de carga, aumenta también la probabilidad de colisiones, con lo que la resistividad debe aumentar.

Se encuentra que para muchos conductores se puede establecer una ley sencilla de variación lineal de la resistividad con la temperatura para temperaturas no muy bajas (donde comienzan a predominar los efectos cuánticos en el comportamiento de los electrones) ni muy altas donde el material se funde.

Sea  $\rho_0$  la resistividad a la temperatura  $T_0$ . Entonces: 
$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

donde  $\alpha$  es el **coeficiente térmico** ( $1/^\circ C$ ) de la resistividad del material.

En la siguiente tabla se presenta la resistividad y el coeficiente térmico de diversos materiales (tomada de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/resis.html>):

<sup>1</sup> En la teoría de Drude, los portadores de carga se ven acelerados por el campo eléctrico aplicado, con aceleración  $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m^*$ , donde  $m^*$  es la masa efectiva del portador, que tiene en cuenta las interacciones entre el portador y los iones de la red cristalina. Pero luego de un tiempo  $\tau$  (en promedio) los portadores experimentan una colisión con la red cristalina cediendo toda su energía. La velocidad media del conjunto de portadores de carga es  $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{a} \tau = q\tau\mathbf{E}/m^*$  de donde puede obtenerse la movilidad  $\mu = q\tau/m^*$ . Más detalles sobre la teoría de Drude se pueden encontrar en libros de física de sólidos o semiconductores.

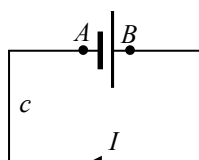
<sup>2</sup> Se da una breve introducción al comportamiento y aplicaciones de materiales superconductores en el Capítulo 5 de electrodinámica.

	Material	Resistividad ( $\Omega \text{ m}$ )	Coefficiente Térmico ( $1/^\circ\text{C}$ )
Conductores	Plata	$1.59 \times 10^{-8}$	0.0061
	Cobre	$1.68 \times 10^{-8}$	0.0068
	Aluminio	$2.65 \times 10^{-8}$	0.00429
	Tungsteno	$5.6 \times 10^{-8}$	0.0045
	Hierro	$9.71 \times 10^{-8}$	0.00651
	Platino	$10.6 \times 10^{-8}$	0.003927
	Manganina	$48.2 \times 10^{-8}$	0.000002
	Mercurio	$98 \times 10^{-8}$	0.0009
	Nichrome (aleación Ni,Fe,Cr)	$100 \times 10^{-8}$	0.0004
Semiconductores	Carbono (grafito)*	$3 \times 10^{-5} - 60 \times 10^{-5}$	...
	Germanio*	$1 \times 10^{-3} - 0.5$	...
	Silicio*	0.1-60	...
Aisladores	Vidrio	$1 \times 10^9 - 1 \times 10^{12}$	...
	Mica	$9 \times 10^{13}$	...
	Goma dura	$1 \times 10^{13} - 1 \times 10^{15}$	...
	Cuarzo fundido	$5 \times 10^{16}$	...

\* - El rango de valores de la resistividad depende fuertemente de la temperatura.

**Fem. Resistencia**

**En un circuito eléctrico donde circula una corriente estacionaria el campo eléctrico deja de ser conservativo.**



En el circuito filiforme cerrado  $c$  de la figura donde circula una corriente estacionaria  $I$  podemos escribir:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_c \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l}$$

Como en un circuito filiforme  $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = j dl \neq 0$ , se ve que la integral debe ser mayor que cero y por lo tanto el campo  $\mathbf{E}$  no es conservativo:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq 0 \Rightarrow fem = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$$

La circulación del campo a lo largo del circuito, que **físicamente es el trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga positiva a lo largo del circuito completo**, se conoce como **fuerza electromotriz** o **fem**.

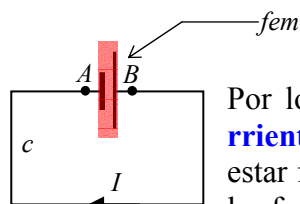
Esta es una diferencia fundamental entre el campo electrostático y el campo asociado a una corriente estacionaria en un conductor. Debe entonces observarse que el campo eléctrico que produce circulación de corriente estacionaria en conductores **no es un campo electrostático**.

En general, podemos decir que el campo eléctrico dentro de un circuito que transporta una corriente estacionaria es la suma de un campo conservativo, generado por distribuciones estáticas de carga y un campo no conservativo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \neq 0 \end{cases}$$

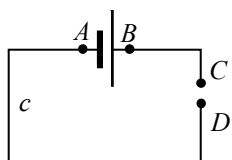
Sin embargo, dentro del material conductor valen las ecuaciones de Maxwell, en particular, la ley de Faraday, que en el caso de corrientes estacionarias se puede escribir:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$



Por lo tanto, **el campo eléctrico dentro del conductor que transporta corriente estacionaria es conservativo**, y la componente no conservativa debe estar fuera del conductor. Se encuentra en el tramo del circuito donde se hallan las fuentes de **fem** (baterías, generadores, pilas solares, etc.):

$$fem = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow fem = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$$



La fem tiene unidades de diferencia de potencial. Para demostrarlo, interrumamos el circuito ejemplo mediante un corte, ya no circula corriente y estamos en un caso estático. Por lo tanto, dentro del conductor:

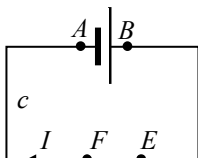
$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \sigma (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}') = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_0 = -\mathbf{E}'$$

En el caso estático:  $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} + \int_D^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

El campo dentro del conductor es cero, lo que anula las integrales entre B y C y entre D y A. El campo en el tramo AB es el campo no conservativo de la batería y el campo en el corte es electrostático, debido a las cargas acumuladas sobre cada extremo del conductor. Estas cargas surgen para anular el campo creado por la batería dentro del conductor en la situación electrostática.

Queda entonces:  $\int_A^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow fem = \int_A^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\int_C^D \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = \Phi_D - \Phi_C$

y se ve que en condiciones de no circulación de corriente la fem aplicada al circuito coincide con la diferencia de potencial electrostático entre los extremos de la interrupción ("bornes") del circuito. Esta diferencia de potencial está asociada a un campo electrostático en el medio donde se halla el circuito que es creado por acumulación de carga estática en los bornes del circuito.



En condiciones de circulación de corriente el campo sigue siendo conservativo dentro del conductor. Entonces la circulación del campo eléctrico entre dos puntos cualesquiera del circuito (que no incluyan las fuentes de fem) es igual a la diferencia de potencial entre los puntos:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \int_E^F \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \Phi_E - \Phi_F$$

Como la integral a lo largo del circuito puede expresarse como la suma de circulaciones entre puntos intermedios sucesivos, tenemos que:

$$fem - \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow fem - \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \dots - \int_Z^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow fem + \sum_i \Delta\Phi_i = 0$$

que es la **segunda ley de Kirchhoff**.

Si usamos la ley de Ohm podemos escribir:  $fem = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_c \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \oint_c \frac{j}{\sigma} dl$

porque el vector densidad de corriente y el elemento de arco son colineales a lo largo de todo el camino. Si el circuito tiene sección S y suponemos que la densidad de corriente es uniforme sobre toda la sección:

$$fem = \oint_c \frac{j}{\sigma} dl = \oint_c \frac{I}{\sigma S} dl$$

Como se trata de **corrientes estacionarias** la corriente es la misma a lo largo de todo el circuito

y puede salir de la integral:  $fem = I \oint_c \frac{dl}{\sigma S} = I R$  donde  $R = \oint_c \frac{dl}{\sigma S} = \oint_c \frac{\rho dl}{S}$

es la **resistencia** del circuito, un parámetro que depende del material a través de la conductividad (o resistividad) y de la geometría del circuito. La resistencia se mide en *ohm* ( $\Omega$ ) y de esta magnitud se determinan las unidades de la resistividad o conductividad de los materiales.

La expresión  $fem = I R$  se conoce como **ley de Ohm macroscópica** para diferenciarla de su versión microscópica que vimos más arriba.

En general, la resistencia entre dos conductores (**electrodos**) sumergidos en un medio de conductividad  $\sigma$  se puede calcular mediante la expresión:

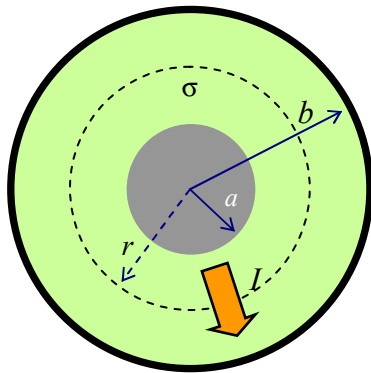
$$R = \frac{fem}{I} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} / \oint_S \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds$$

que podemos comparar con la expresión general de la capacidad del Capítulo 2:

$$C = \oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds / \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Observamos que ambas fórmulas son recíprocas y aparecen los parámetros  $\epsilon$  y  $\sigma$  respectivamente. Esto hace que los métodos matemáticos y numéricos para hallar la capacidad y la resistencia entre un par de electrodos sean los mismos. Si además la permitividad y la conductividad del material son constantes a lo largo del circuito, se tiene que:  $RC = \epsilon/\sigma$ .

**Ejemplo 3-1:** Calcular la resistencia por unidad de longitud de un coaxil de radios  $a$  y  $b$  con relleno de conductividad  $\sigma$  donde se establece un flujo de corriente continua  $I$  entre el alambre interior y la malla.



Como la corriente es estacionaria, debe ser la misma para toda sección transversal al flujo. En este caso las secciones transversales al flujo son cilindros coaxiales. Además, por la simetría del problema, la densidad de corriente debe ser radial y uniforme sobre estas secciones, de manera que podemos escribir:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = j 2\pi \rho l \Rightarrow \mathbf{j} = I \hat{\rho} / 2\pi \rho l$$

donde  $l$  es una longitud genérica de cable. Como dentro del relleno conductor  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , podemos expresar el campo asociado a la corriente:  $E = I \hat{\rho} / 2\pi \sigma \rho l$ . Este campo dará lugar a una fem entre

los electrodos:  $fem = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b E d\rho = \frac{I}{2\pi \sigma l} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{I}{2\pi \sigma l} \ln(b/a) \Rightarrow \frac{R}{l} = \frac{fem}{Il} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi \sigma}$

Debemos observar que hemos calculado el campo a partir de la corriente que circula por el resistor y **no mediante la ley de Gauss**. La ley de Gauss vale para campos electrostáticos y surgen por la eventual presencia de carga neta sobre los electrodos. Pero en un circuito de corriente continua no hay acumulación de carga y por lo tanto no hay campos electrostáticos, de manera que la ley de Gauss es conceptualmente inaplicable.

**Ejemplo 3-2:** Comparar el resultado del Ejemplo precedente con la capacidad por unidad de longitud del cable coaxil hallada previamente.

La capacidad se calculó en el **Ejemplo 2-22**:  $\frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(b/a)}$

de manera que tenemos:  $\frac{R}{l} \frac{C}{l} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi \sigma} \frac{2\pi \epsilon}{\ln(b/a)} \Rightarrow \frac{R}{l} \frac{C}{l} = \frac{\epsilon}{\sigma}$

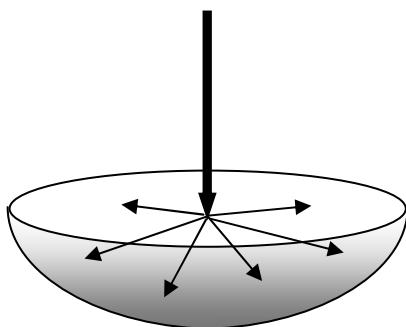
**Ejemplo 3-3:** Análisis elemental de los efectos de la caída de un rayo sobre tierra.

Un rayo que cae sobre tierra produce una corriente que fluye radialmente desde el punto de caída hacia toda dirección. Podemos modelizar (muy groseramente) este fenómeno suponiendo que la tierra es un conductor homogéneo de conductividad  $\sigma$  y que el rayo es una línea de corriente vertical  $I_0$ . Esta corriente se distribuye uniformemente en el semiespacio inferior de tierra, de modo que sobre una semiesfera de radio  $R$  el flujo de corriente es:

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = j 2\pi r^2 = I_0 \Rightarrow j = \frac{I_0}{2\pi r^2} = \sigma E$$

El campo  $E$  es radial y entonces la ddp entre dos puntos sobre la superficie de la tierra sobre un radio a distancias  $r_1$  y  $r_2$  del punto de caída es:

$$\Delta V = - \int_{r_1}^{r_2} E dr = - \frac{I_0}{2\pi \sigma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I_0}{2\pi \sigma} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



Supongamos que tenemos dos PCs a 1 Km. del punto de caída del rayo y separadas 2m entre sí, conectadas a una supuesta tierra común. Pero la ddp  $\Delta V$  para un rayo típico ( $I_0 = 100 \text{ KA}$  y  $\sigma = 10^{-3} \Omega^{-1}m^{-1}$ ) es de unos 32V. Esta ddp es más de dos veces mayor que el salto entre valores lógicos de los dispositivos CMOS comunes. Además, el rayo crea interferencia de banda ancha que puede confundirse, a estos niveles de tensión, por señales.

### Tiempo de relajación

La ecuación de continuidad permite analizar el periodo **transitorio** en que se crea una perturbación en la distribución de carga en un conductor por inducción o la presencia de un campo eléctrico. Para ello usamos también la ley de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  y la ley de Ohm  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0$$

Queda entonces una ecuación diferencial para las variaciones en el tiempo de la densidad de carga. Esta ecuación diferencial tiene la solución:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t = 0) e^{-t/\tau}$$

donde  $\tau = \epsilon / \sigma$  es el llamado **tiempo de relajación** del material.

Para analizar el significado de esta ecuación, consideremos que por algún mecanismo se ha creado una distribución de carga  $\rho(\mathbf{r}, t = 0)$  en el seno de un conductor. Esta ecuación dice que la densidad de carga decae exponencialmente en el tiempo, con un tiempo característico que es  $\tau$ . Como se ve en el siguiente ejemplo,  $\tau$  suele ser muy pequeño para un conductor real.

**Ejemplo 3-4:** Calcular el tiempo de relajación para cobre.

Para el cobre:  $\rho \cong 1.68 \times 10^{-8} \Omega m$  y  $\epsilon \cong \epsilon_0$  ya que no hay procesos de polarización en un conductor. Tenemos entonces:

$$\tau = \epsilon / \sigma = \epsilon \rho \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F / m} \times 1.68 \times 10^{-8} \Omega m \approx 1.5 \times 10^{-19} \text{ s}$$

Se ve que al crear una inhomogeneidad de carga en el seno del conductor la redistribución de carga que lleva a anular el campo en su interior es prácticamente instantánea.

### Ecuación diferencial de las corrientes estacionarias

En el caso de la circulación de corriente estacionaria (corriente continua) dentro de un conductor vale la ley de Ohm:  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$

Pero como en este caso:  $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot [\sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})] = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$

Y dado que el campo dentro del conductor es conservativo:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r})$

**Se tiene finalmente que el potencial eléctrico dentro de un conductor por el que circula una corriente estacionaria cumple la ecuación de Laplace:**

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0$$

Por lo tanto la circulación de corrientes estacionarias se puede analizar con las mismas herramientas matemáticas que la electrostática del vacío.



### Energía y potencia en corrientes estacionarias

El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre las cargas en movimiento que constituyen una corriente eléctrica implica una cesión de energía del campo hacia las cargas móviles. Por otra parte, estas cargas móviles experimentan procesos de “colisión” con la red cristalina del cuerpo conductor transfiriendo al conjunto del cuerpo parte de la energía. El cuerpo almacena esta energía en forma de vibraciones de la red que se observan macroscópicamente como energía térmica (la absorción de esta energía implica un aumento de temperatura del cuerpo). Esta situación se conoce como **efecto Joule** y consiste en la transformación de la energía eléctrica del campo en energía térmica y es utilizada en la técnica en calefacción eléctrica y radiación para iluminación, pero produce efectos no deseados de pérdidas de energía, calentamiento y deterioro de materiales en muchas aplicaciones.

Vamos a calcular la potencia que el campo cede a una corriente eléctrica. Supongamos que en el seno del conductor existe una densidad de carga  $\rho(\mathbf{r})$ . El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre un elemento de volumen  $dv$  del conductor será:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow dL = \rho(\mathbf{r})dv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \frac{dL}{dv} = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) dt$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad media de los portadores de carga en el conductor y hemos usado la expresión del vector densidad de corriente  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}$ . Operando algebraicamente e integrando sobre todo el volumen del conductor tenemos:

$$dW = \frac{dL}{dt} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv \Rightarrow W = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv$$

que es la potencia “disipada” en el conductor.

**Ejemplo 3-5:** Calcule la potencia disipada en un resistor cilíndrico de conductividad  $\sigma$ .

Suponemos que circula una corriente estacionaria (CC)  $I_0$ , a lo largo del cilindro. Si el resistor tiene longitud  $L$  y sección  $S$   $j = I_0/S$ . Luego:

$$W = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv = \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{\sigma} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{\sigma} \int_V j^2(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{\sigma} \frac{I_0^2}{S^2} \int_V dv = \frac{I_0^2 L}{\sigma S} \Rightarrow W = I_0^2 R$$

pero como  $fem = I_0 R$  también podemos escribir:  $W = fem I_0$ .

### Condiciones de frontera del vector densidad de corriente

Cuando existe una superficie interfase entre dos regiones de propiedades conductores diferentes, la aplicación de las leyes del campo eléctrico llevan a que se establecen relaciones entre las componentes del vector densidad de corriente a través de la interfase:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{dQ_l}{dt} \Rightarrow (\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\sigma_l}{dt}$$

Estas relaciones se pueden demostrar de la misma forma que hemos hallado la conservación de las componentes normales del desplazamiento al cruzar una interfase entre dos dieléctricos.

**Al cruzar la superficie interfase que separa dos medios de propiedades distintas, se conserva la componente normal del vector densidad de corriente, salvo que exista una distribución superficial de carga libre variable en el tiempo sobre la interfase.**

**Ejemplo 3-6:** Cuando existe una interfase entre dos medios con permitividades y conductividades distintas, se deben cumplir simultáneamente las condiciones de borde:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l \quad j_{1n} - j_{2n} = \frac{\partial \sigma_l}{\partial t} \quad E_{1t} - E_{2t} = 0$$

La presencia de conductividad no altera el comportamiento de las componentes tangenciales del campo. Derivando la primera ecuación respecto del tiempo e igualando a la segunda tenemos, para las componentes normales:

$$j_{1n} + \frac{\partial D_{1n}}{\partial t} = j_{2n} + \frac{\partial D_{2n}}{\partial t} \Rightarrow \left( \sigma_1 + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{1n} = \left( \sigma_2 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{2n}$$

son las nuevas condiciones para las componentes normales.

Supongamos que los campos son cuasi-estáticos alternos, del tipo descrito por un fasor:

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$ . Se ve que  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} = i\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y entonces la condición

de contorno puede escribirse:

$$(\sigma_1 + \varepsilon_1 \partial / \partial t) E_{1n} = (\sigma_2 + \varepsilon_2 \partial / \partial t) E_{2n} \Rightarrow (\sigma_1 + i\omega \varepsilon_1) E_{1n} = (\sigma_2 + i\omega \varepsilon_2) E_{2n}$$

Esta condición puede asimilarse a la de conservación de la componente normal del vector densidad de corriente cuando no hay carga variable en la interfase siempre que definamos una conductividad equivalente compleja:  $\sigma_{eq} = \sigma + i\omega \varepsilon$  dependiente de la frecuencia para cada medio.

Dividiendo la igualdad por  $i\omega$  tenemos:  $(\varepsilon_1 - i\sigma_1/\omega) E_{1n} = (\varepsilon_2 - i\sigma_2/\omega) E_{2n}$

Análogamente esta condición es equivalente a la conservación de la componente normal del vector desplazamiento cuando no hay carga libre en la interfase siempre que definamos una permitividad equivalente compleja:  $\varepsilon_{eq} = \varepsilon - i\sigma/\omega$  dependiente de la frecuencia para cada medio.

El uso de parámetros equivalentes simplifica el análisis de las condiciones de borde para campos armónicos y es de uso común en la técnica, como veremos en el capítulo de propagación de ondas en medios.

**Ejemplo 3-7:** Determinar la conductividad y permitividad equivalentes de un suelo típico de permitividad relativa  $\varepsilon_r = 4$  y resistividad entre  $\rho = 10 \Omega m$  y  $\rho = 1000 \Omega m$ . a las frecuencias de 50 Hz (industrial), 1 MHz (radio AM), 1 GHz (telefonía celular).

La conductividad equivalente puede escribirse:  $\sigma_{eq} = \sigma + i\omega \varepsilon = \sigma + i\omega \varepsilon_r \varepsilon_0$

La permitividad equivalente puede escribirse:  $\varepsilon_{eq} = \varepsilon - i\sigma/\omega = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - i/(\omega \varepsilon_0 \rho))$

Reemplazando valores nos queda las siguientes tablas para  $\sigma_{eq}$  y  $\varepsilon_{eq}/\varepsilon_0$ :

$f$ (Hz)	$\rho_{eq} = 1/\sigma_{eq}$		$f$ (Hz)	$\varepsilon_{eq}/\varepsilon_0$	
	$\rho = 10 \Omega m$	$\rho = 1000 \Omega m$		$\rho = 10 \Omega m$	$\rho = 1000 \Omega m$
50	$10 - i 1.1 \times 10^{-5}$	$10^3 - i 0.01$	50	$4 - i 3.6 \times 10^7$	$4 - i 3.6 \times 10^5$
$10^6$	$10 - i 0.02$	$952 - i 212$	$10^6$	$4 - i 1.8 \times 10^3$	$4 - i 18$
$10^9$	$1.7 - i 3.74$	$0.02 - i 4.5$	$10^9$	$4 - i 1.8$	$4 - i 1.8 \times 10^{-2}$

Se ve que la resistividad equivalente es prácticamente real y la permitividad equivalente imaginaria para 50 Hz y 1 MHz, indicando que el comportamiento es fundamentalmente conductor. Para microondas, en el terreno de menor resistividad (generalmente el más húmedo) ambos efectos (conductor y de polarización) son de igual magnitud y en el caso del terreno de mayor resistividad (generalmente el más seco o arenoso) predomina el efecto de polarización.

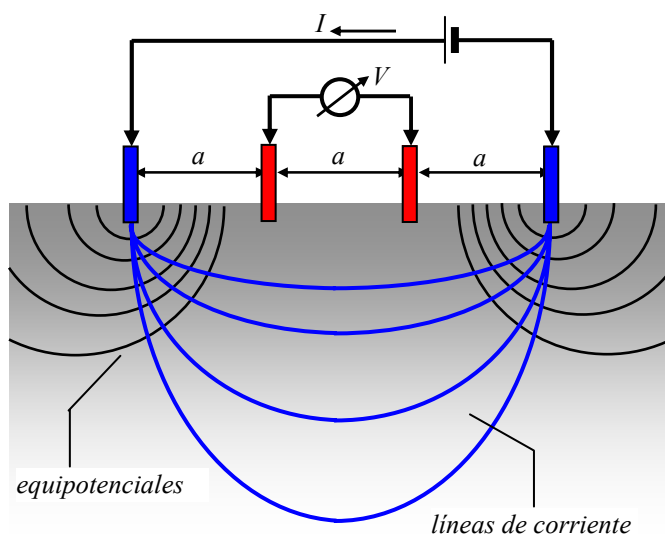
## APLICACION - Mediciones de Resistividad

### Aplicaciones Geofísicas

El conocimiento detallado del subsuelo es de primordial importancia en la exploración petrolera, búsqueda de fuentes de agua subterránea, prospección minera, arqueología, etc. Desde hace muchos años se han utilizado diversos métodos para obtener información del subsuelo a partir de mediciones realizadas en la superficie.

Uno de los métodos más antiguos es el de la medición de la **resistividad** del suelo.

Las propiedades más importantes que afectan las mediciones de resistividad del suelo incluyen la porosidad, contenido de agua, composición mineral (contenido de arcilla y metales, por ejemplo), salinidad del agua en los poros y distribución de tamaño de grano. Por lo tanto, la medición de resistividad eléctrica permite obtener información de importancia en búsqueda de fuentes de agua, determinación de la composición de suelos, delineado de plumas de contaminación, delineado de fallas, estratigrafía y topografía del manto rocoso, etc.



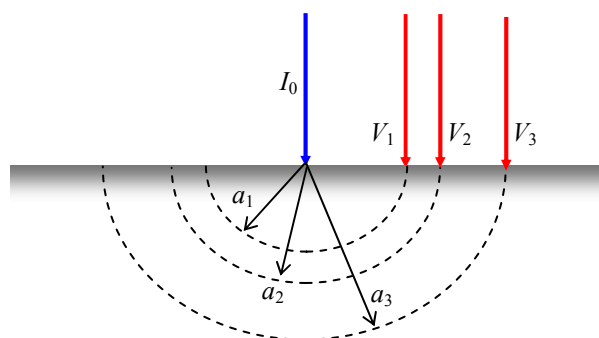
La técnica básica para la medición de la resistividad del suelo es el llamado **método de los cuatro puntos**, donde se colocan cuatro electrodos equidistantes en línea y se introducen ligeramente en el terreno. Se inyecta una corriente conocida entre los electrodos externos y se mide la ddp entre los conductores internos. Esto permite calcular la resistividad promedio a una profundidad  $a$  igual a la separación entre electrodos, y se puede trazar un perfil de la resistividad en función de la profundidad variando el parámetro  $a$ .

A partir de este perfil se utilizan diversas **técnicas de inversión** para deducir las

propiedades eléctricas y geológicas del terreno. El método de los cuatro puntos es la base del estándar IEEE 81-1983 de medición de resistividad terrestre. En la jerga de las actividades geológicas, el método de los cuatro electrodos en línea (no necesariamente equiespaciados) se conoce como **arreglo de Wenner**.

**Ejemplo 3-8:** Hallar la resistividad de un semiespacio isótropo y homogéneo a partir de mediciones realizadas por un arreglo de Wenner.

Podemos analizar la inyección de corriente por un electrodo colocado sobre la superficie de un semiespacio conductor isótropo y homogéneo a partir de los resultados del **Ejemplo 3-3** del rayo, que es equivalente. Allí hallamos que la densidad de corriente que existe dentro del



semiespacio es:  $j = \frac{I_0}{2\pi r^2} = \frac{E}{\rho}$

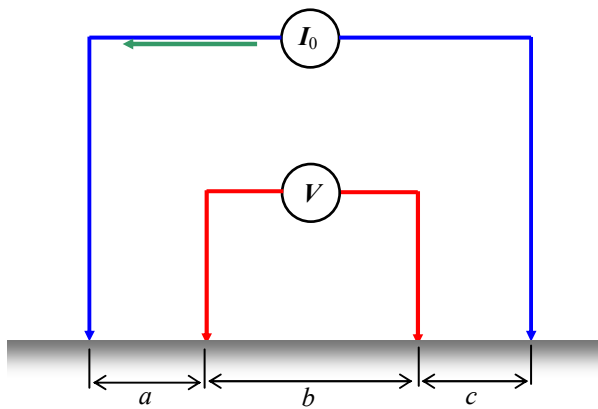
mientras que la ddp entre dos puntos distantes  $r_1$  y  $r_2$  del punto de inyección de corriente es:

$$\Delta V = \frac{\rho I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Si tomamos uno de los puntos en el infinito, el potencial sobre el otro debido al electrodo que

inyecta corriente es:  $V = \frac{\rho I_0}{2\pi r_1}$ .

Como se ve en la figura, a medida que se separa el electrodo de tensión del electrodo de corriente, la semiesfera que mide el flujo de corriente sobre el punto donde se halla el electrodo de tensión es más grande, incorporando el comportamiento de capas más profundas. Así es posible explorar el comportamiento eléctrico del terreno en profundidad moviendo el electrodo de tensión.



El potencial de los electrodos de tensión del arreglo de Wenner de la figura será, incluyendo las dos fuentes de corriente y usando superposición:

$$V_1 = \frac{\rho I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \text{ (izquierdo)}$$

$$V_2 = \frac{\rho I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c} \right) \text{ (derecho)}$$

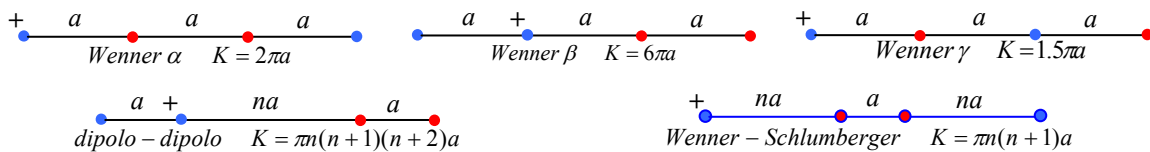
Por lo tanto, la ddp entre ambos electrodos de tensión, que es lo que medimos es:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\rho I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} \right)$$

Si todos los espaciamientos entre electrodos son iguales ( $b = c = a$ ):

$$V = \frac{\rho I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\rho I_0}{2\pi a} \Rightarrow \rho = \frac{2\pi a V}{I_0} = K \frac{V}{I_0} \quad \text{con} \quad K = 2\pi a$$

El factor  $K$  que relaciona la resistividad del terreno con la relación  $V/I_0$  se conoce como **factor de forma** y depende de la ubicación de los electrodos. En la siguiente figura se esquematizan algunas disposiciones comunes y se dan sus factores  $K$ :

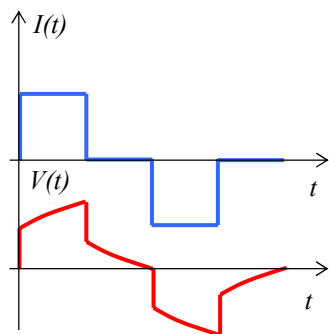


Los valores de  $K$  que surgen en este Ejemplo se calculan suponiendo que el terreno es un semiespacio isótropo y homogéneo. En terrenos reales ninguna de estas hipótesis se cumple, y la resistividad es una complicada (y desconocida) función de la posición en el terreno y la dirección de flujo de la corriente. Por lo tanto, las fórmulas de los diferentes arreglos nos dan la llamada **resistividad aparente**. Para realizar un modelo de terreno, se realizan diversas mediciones cambiando la separación entre electrodos, lo que produce resultados vinculados con capas de distinta profundidad. Hay dos procedimientos básicos de exploración:

- **Sondeo**, donde la disposición de electrodos se varía simétricamente alrededor de una posición fija y el espaciado entre electrodos se aumenta en incrementos fijos, lo que lleva a un mapeo 1D en profundidad o vertical. Esta técnica se usa para determinar la profundidad de una fuente de agua, el espesor de capas de arena, grava o roca y, en general, la estratigrafía en profundidad del terreno.
- **Perfilado**, donde la separación entre electrodos permanece constante y el conjunto se traslada por el terreno. Esta técnica produce un mapa 2D a profundidad constante y se usa cuando se desea una rápida exploración de un área. Es apropiada para buscar depósitos subterráneos de minerales o para detectar zonas de falla geológica o las fronteras entre capas de materiales diferentes.
- Los arreglos más comunes para trabajos de exploración de minerales son los dipolo-dipolo, mientras que para relevamiento de agua subterránea y estudios ambientales se usan el arreglo Wenner  $\alpha$  o el Schlumberger.

La exploración mineral y las exploraciones asociadas a estudios de agrimensura, ingeniería o ambientales difieren debido a la escala de los problemas. El sondeo, que se usa en la industria petrolera y en la determinación de napas de agua o perfiles de roca, lleva a ploteos de resistividad versus profundidad (modelos 1D) mientras que el perfilado permite obtener modelos de terreno 2D o 3D que actualmente se resuelven por técnicas numéricas de inversión.

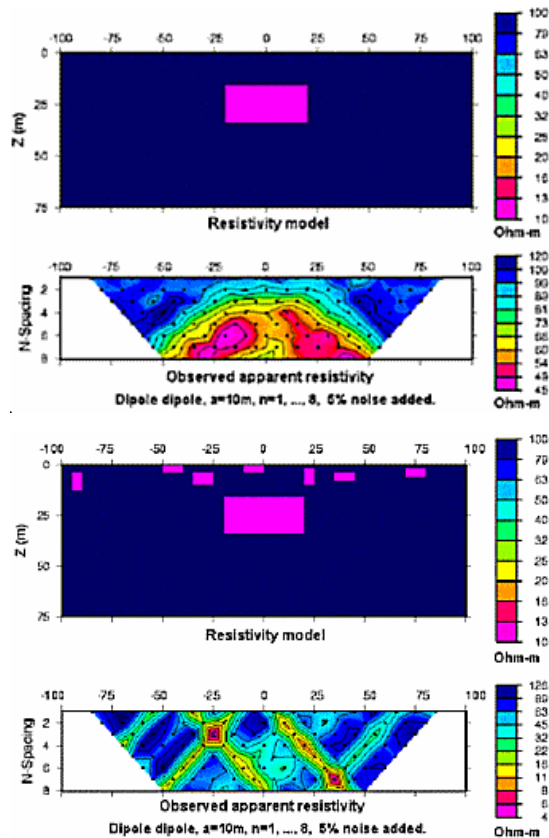
Además de las mediciones de resistividad, que están ligadas al flujo de corrientes eléctricas en el terreno, la presencia de elementos con características polares (como el agua) lleva a que se den fenómenos de polarización que implica la creación de **carga inducida** en las superficies de separación entre capas de distintas propiedades y carga inducida volumétrica debida a la inhomogeneidad del terreno. Las propiedades de la carga inducida se observan con mayor precisión con corrientes variables en el tiempo que con corriente continua. Por otra parte, el uso de corriente continua en cualquier tipo de medición eléctrica en terrenos, produce fenómenos de corrosión



electrolítica en los electrodos, inducción de cargas en su entorno que alteran los valores medidos y otros artefactos que se pueden eliminar usando corriente alterna de baja frecuencia.

Cuando se miden los efectos de la resistividad y de carga inducida simultáneamente, se suelen usar ondas cuadradas de baja frecuencia. El comportamiento transitorio da información sobre la carga inducida (efecto capacitivo o reactivo) mientras que el comportamiento permanente da el comportamiento resistivo del terreno (efecto activo). En la figura se muestra una forma de onda cuadrada de corriente inyectada

y la resultante forma de onda de tensión donde se observan (exagerados) los efectos reactivos.



Realizadas las mediciones, se tiene una tabla de valores de resistividad aparente en función de la posición de los electrodos. Como mayor separación de electrodos involucra mediciones asociadas a mayor profundidad, se puede obtener un perfil de resistividad aparente como el de la figura, asociada a un sondeo<sup>3</sup>. El eje horizontal mide la distancia en  $m$  desde la posición del electrodo de corriente central (fijo), mientras que el eje vertical mide la separación entre electrodos. Los puntos de igual resistividad se unen formando un diagrama de contornos de resistividades. La interpretación de estos diagramas, llamados **seudo-secciones**, es difícil y requiere experiencia. En la figura se ve la simulación de un bloque subterráneo de resistividad diferente del medio, ambos de propiedades homogéneas. Por ejemplo, si se agrega “ruido”, en forma de pequeñas incrustaciones de resistividad diferente, se obtiene un perfil completamente distinto.

Por estos motivos se han desarrollado métodos numéricos de **inversión**. En la jerga matemática, se habla de problemas directos y problemas inversos. El problema directo en este contexto sería tener la

geometría detallada del subsuelo y las propiedades resistivas de cada región. A partir de las

<sup>3</sup> Las figuras de esta sección están tomadas de D. Oldenburg y F. Jones, “Basic Concepts of Resistivity and Induced Polarization Profiling”, The UBC Geophysical Inversion Facility, 1998.

ecuaciones del electromagnetismo se obtiene el perfil de resistividades. El problema inverso, que es el que se tiene en la práctica, implica tener las mediciones y alguna estimación de sus incertezas, y deducir a partir de ellas mediante una teoría la geometría de la distribución de la resistividad de un modelo  $M$  de terreno. El objetivo es hallar el modelo  $M$  que da lugar a las mediciones. El problema fundamental es que este proceso no es único, es decir, se pueden obtener varios modelos diferentes que dan lugar al mismo conjunto de observaciones, ya que se trata de un problema donde hay menos ecuaciones que incógnitas. La idea es diseñar un modelo definido por una función objetiva, que refleje adecuadamente las propiedades del terreno y permita una interpretación más o menos sencilla de los resultados. El método de inversión consiste en optimizar la función objetiva de acuerdo a estos criterios. Una posibilidad es usar modelos de referencia de situaciones estándar a los cuales se agregan términos “perturbativos” (supuestamente pequeños) para tener en cuenta las diferencias del terreno real respecto del terreno de referencia.

Para resolver el problema numéricamente, se divide el terreno en celdas cuboidales dentro de las cuales se asume resistividad constante. Las celdas son suficientemente pequeñas como para que esta hipótesis no introduzca errores muy grandes y suficientemente grandes como para que el volumen y tiempo de cálculo no sean inmanejables. El modelo se convierte en un arreglo de valores (un “vector”) y el problema se resuelve minimizando la función objetiva del modelo sujeta a las condiciones impuestas por las observaciones. Las incertezas de las mediciones requieren un estudio estadístico para incluirlas en el modelo. Si la relación entre los parámetros del modelo y los datos es lineal, la solución es (conceptualmente) invertir la matriz del modelo, mientras que si la relación es no lineal, se requieren procedimientos iterativos, como el método de gradientes conjugados o de descenso más rápido.

## Puesta a Tierra

La puesta a tierra de instalaciones eléctricas o electrónicas es de primordial importancia para evitar fenómenos de ESD o para proteger los sistemas de caída de rayos o impulsos provenientes de líneas alimentadoras o instalaciones cercanas.

El objetivo de la puesta a tierra es proveer un punto común de referencia de potencial para diversos equipos eléctricos que trabajan conjuntamente. Este objetivo es necesario cuando se opera con fuentes de energía diferentes, como por ejemplo:

- Diferentes fuentes de energía (sistema público, generadores locales, baterías).
- Diferentes valores de tensión simultáneamente presentes.

También este objetivo es de importancia para la protección de operadores y de los equipos ante sobretensiones y/o para disminuir las fuentes de interferencia en sistemas que procesan señales.

Normalmente la Tierra (el planeta) se considera como una fuente infinita de carga o un conductor de capacidad infinita (y por lo tanto de potencial constante) para la mayoría de las situaciones, pero las características conductivo/dieléctricas de la tierra (suelo) determinan que estas consideraciones sean válidas. Estas características dependen del contenido de humedad, metales y electrolitos que contenga el suelo y de las variaciones climáticas.

Las técnicas de puesta a tierra involucran la colocación de jabalinas, mallas o placas metálicas enterradas junto con vainas de concreto conductor para proteger los elementos metálicos de la corrosión. El diseño de un sistema de puesta a tierra involucra tres etapas:

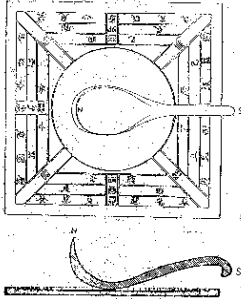
- Medición de la resistividad del suelo para seleccionar el sitio más adecuado para la implantación del sistema de protección. Habitualmente se considera que el mejor sistema de puesta a tierra se consigue con un suelo de baja resistividad. Si este no es el caso deben usarse placas o mallas conductoras subterráneas y/o jabalinas con núcleo electrolítico para mejorar la conductividad de la instalación.
- Diseño del sistema de electrodos de acuerdo a las características del suelo y la resistencia deseada para el sistema de protección de acuerdo a la instalación a proteger. La distancia entre electrodos debe ser tal que no se superpongan las esferas de influencia de cada electrodo de acuerdo a su profundidad, como se describe en la sección precedente.
- Chequeo del sistema para asegurar que cumple las especificaciones.

El primer punto utiliza técnicas similares a las descriptas para la prospección geofísica. En el archivo **SOLID.PDF** se da una breve introducción al diseño de una sistema de puesta a tierra para telecomunicaciones.

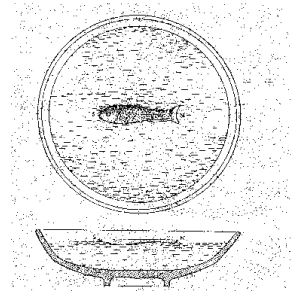
## Magnetismo. Breve introducción histórica<sup>4</sup>

En la electrostática hemos visto interacciones entre cargas **en reposo** entre sí. Cuando las cargas tienen movimiento relativo aparece un nuevo tipo de interacción que se denomina **magnética**.

La interacción magnética es conocida desde muy antiguo a partir de las propiedades de los óxidos de hierro, en particular la llamada **magnetita** ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Ya los griegos comprobaron el poder de atracción de las piedras de magnetita sobre pequeños trozos de hierro. Aparentemente los primeros en darse cuenta de la propiedad de brújula de trozos de esta sustancia fueron los chinos. A partir de alrededor del año 100 hay referencias en textos chinos respecto de un "puntero al sur", que se piensa podría ser una cuchara de magnetita montada sobre una placa plana de baja rugosidad, como se muestra en la figura. La forma de la cuchara permite que gire fácilmente en respuesta a la cupla magnética generada por el campo terrestre. De acuerdo a los historiadores su uso en esta época sería ritual o religioso más que una ayuda a la navegación.



Parece que el uso de agujas imantadas como brújulas también se descubrió en China. En un libro chino sobre forja de hierro alrededor de 1040 aparece la primera brújula conocida: un trozo de magnetita en forma de pez flotando en un tazón de agua. Este libro describe cómo el hierro puede calentarse y templarse para producir imanes permanentes. La primera descripción clara de una brújula magnética suspendida fue hecha por Shen Kua en 1088. Las brújulas fueron usadas como ayuda y guía por navegantes chinos y portugueses al menos desde el siglo XIV. Cristóbal Colón llevó una brújula en su viaje de descubrimiento de América, instrumento que cita repetidas veces en su libro de bitácora. Quizás fuera un modelo similar al de la figura., usada por navegantes portugueses en el siglo XVI.



El primer texto europeo que menciona la aguja imantada es del siglo XIII, escrito en París por el monje inglés Alexander Neckham. El primer tratado sobre las propiedades de los imanes parece ser el escrito por **Petrus Peregrinus** en 1269: "Epistolia de Magnete". En esta obra describe experimentos realizados con una esfera de magnetita, que llama "terella". Quizás lo más interesante es una serie de dispositivos que Peregrinus inventó para hacer uso de las nuevas fuerzas, en particular un perpetuum mobile destinado al fracaso, en caso de haber sido construido.



En 1600, el clérigo inglés **William Gilbert** (1540-1603) publicó su libro **De Magnete** donde, a partir de experimentos con una esfera magnetizada (la "terella" de Peregrinus) postula que la Tierra es un inmenso imán (*Magnus magnes ipse est globus terrestris*), y ese es el motivo del comportamiento de la aguja magnética. Gilbert asocia el magnetismo terrestre con su rotación<sup>5</sup>, y esto explica que la brújula apunte al norte. El hecho ya



<sup>4</sup> Parte del material presentado en esta sección proviene de la serie "Magnetism through the ages", del Magnetism Group, Physics Department, Trinity College, Dublin (<http://www.tcd.ie/Physics/Schools/what/materials/magnetism/one.html>)

<sup>5</sup> En 1600 la teoría oficial negaba el movimiento de la Tierra. En este mismo año Giordano Bruno fue quemado en la hoguera por sus escritos sobre el movimiento de la Tierra y la existencia de "infinitos mundos", relativizando la posición y status de la Tierra en el universo.

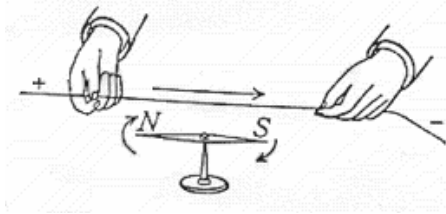


observado en esa época de que hay una ligera desviación entre la dirección del norte geográfico y el norte magnético (la declinación magnética) llevó a Gilbert a teorizar que la Tierra no era una esfera perfecta.

En 1635 **Henry Gellibrand** descubrió que el ángulo de declinación varía lentamente con el tiempo. Una explicación de estas observaciones se deben a **Edmond Halley**, famoso luego por aplicar las leyes de Newton a la predicción de la aparición del cometa que lleva su nombre. En 1692 Halley supuso que la Tierra está formada por capas de diferentes propiedades magnéticas, en lenta rotación unas respecto las otras.

A pesar de ser el primer tratado científico en el sentido que damos a esta palabra en la época moderna, De Magnete está plagado de ideas animistas que asignan un "alma" al imán. Recién un siglo después **René Descartes** publicó una teoría no animista de los fenómenos magnéticos introduciendo una primera versión de la idea de influencia sobre el medio ambiente que luego se convertiría en la moderna idea de campo.

La existencia de una conexión entre la electricidad y el magnetismo surge con los trabajos del físico danés **Hans Christian Oersted** (1777-1851). Se sabía desde hacía tiempo que los rayos hacían mover las agujas magnéticas usadas como brújulas en la navegación. En cuanto Oersted se enteró de la pila eléctrica creada por Volta, comenzó una serie de observaciones sobre el efecto de una "corriente galvánica" sobre una aguja magnética. Los resultados de estos experimentos (contrarios a lo que creía Oersted, es decir, que la electricidad no ejercía influencia alguna sobre una aguja imanada), fueron publicados en julio



de 1820 (**Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam**), y mostraban que una corriente eléctrica que circula cerca de una aguja imanada produce su movimiento, hallando por vez primera una relación entre la electricidad y el magnetismo.



A partir de las observaciones de Oersted, en pocas semanas **Jean-Baptiste Biot** (1744-1862) y **Felix Savart** (1791-1841) realizaron experimentos usando las oscilaciones de la aguja magnetizada cerca de un hilo que transportaba una corriente, que les llevaron a señalar que la fuerza sobre la aguja es inversamente proporcional a la distancia perpendicular al hilo de corriente desde el punto de observación.

El 11 de setiembre de 1820 **Dominique Francois Jean Arago** (1786-1853), que era el secretario de la Academia de Ciencias francesa, hizo una presentación en París de los resultados de Oersted y algunos otros propios. En el auditorio se hallaba **Andre-Marie Ampère** (1775-1836, figura),



quien en sólo una semana desarrolló una teoría completa de la interacción magnética y obtuvo una descripción matemática general, que aún utilizamos. Su punto de partida fue que, si una corriente actuaba sobre un imán, dos corrientes interactuarían entre sí. Profundizó y perfeccionó su teoría en los siguientes años. Al contrario que otro contemporáneo ilustre, **Simeon Denis Poisson** (1781-1840) Ampère pensaba que los fenómenos eléctricos y los magnéticos estaban relacionados íntimamente entre sí. Por ejemplo describió el magnetismo postulando la existencia de pequeños circuitos de corriente dentro del material magnetizado.

En 1826 Ampère publicó su "**Memoria sobre la Teoría Matemática de los Fenómenos Electrodinámicos, deducida únicamente**

**de la Experiencia**", donde deduce la ley de la acción electrodinámica y sienta las bases para el descubrimiento, en 1831, de la ley de inducción electromagnética que completa la simetría entre campo eléctrico y magnético, realizada por **Michael Faraday** (1791-1876).

Esta obra se basaba en experimentos que mostraron que dos conductores paralelos que transportan corriente en el mismo sentido se atraen, mientras que si las corrientes son de sentidos opuestos se rechazan. A partir de los experimentos Ampère concluyó que:

- Fuera de su cuerpo material, un imán permanente es equivalente en su acción magnética a una bobina de alambre que transporta una corriente (que llamó "solenoides").
- Cada molécula de un imán permanente tiene una espira de corriente asociada.
- La magnetización es el alineamiento de las moléculas con un campo exterior (Ampère utilizó otro nombre, ya que la idea de campo magnético no existía en esa época)

## Campo Magnetostático

En el resto del Capítulo veremos características y aplicaciones de los campos magnetostáticos. En el **caso estático** los campos y sus fuentes **no dependen del tiempo**. Las fuentes son corrientes **estacionarias** o continuas.

Los campos eléctrico y magnético están **desacoplados**. El campo magnético (**magnetostático**) depende solamente de la distribución de corrientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

**B** se conoce como **campo de inducción magnética** y **H** como **campo magnético**.

## Magnetostática en el vacío

En el vacío, los campos **B** y **H** están ligados a través de la **constante magnética del vacío**:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad \mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

y entonces las ecuaciones del campo magnetostático en el, vacío son:

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

De acuerdo al teorema de Helmholtz si se conocen la divergencia y el rotor de un campo vectorial el campo queda unívocamente determinado. El campo magnetostático en el vacío tiene únicamente **fuentes vectoriales** (la distribución de corriente eléctrica). El teorema de Helmholtz lleva también al **potencial magnetostático** en el vacío, que cumple la ecuación diferencial vectorial de **Poisson**, cuya solución particular es la llamada **integral de Poisson**:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

En sitios del espacio donde no existen fuentes de campo [ $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ ] se cumple la **ecuación de Laplace**:  $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$

Analizaremos primero los efectos ponderomotrices (fuerzas) creados por el campo magnético sobre cargas en movimiento.

## Fuerzas magnéticas sobre cargas en movimiento.

Una carga  $q$  en movimiento en una región donde existe un campo magnético experimenta una fuerza diferente de las eventuales fuerzas eléctricas. Esta fuerza se denomina **magnética** y, **para velocidades constantes<sup>6</sup> pequeñas frente a la velocidad de la luz**, se puede escribir:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Así, en general, si en una región del espacio existen simultáneamente un campo eléctrico **E** y un

<sup>6</sup> Respecto de un referencial inercial.

campo de inducción magnética  $\mathbf{B}$ , la fuerza sobre una carga (móvil) de prueba  $q$  en la posición  $\mathbf{r}$  será, por superposición:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Esta es la llamada **fuerza de Lorentz**. Obsérvese que sólo hay fuerza magnética si la carga se mueve. Sin embargo, hay fuerza eléctrica siempre que exista campo eléctrico.

**Fuerza y cupla sobre una corriente**

Una corriente es un flujo ordenado de cargas, de modo que en presencia de un campo magnético existe una fuerza magnética sobre el conjunto de cargas en movimiento. Resulta así una fuerza neta sobre el conductor que transporta la corriente.

Podemos medir esta acción considerando que cada elemento de volumen del conductor contiene una carga  $dq(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) dv$  y se mueve con velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Si este campo de velocidades es **constante en el tiempo**, la fuerza magnética sobre este elemento es:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = dq(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv$$

donde hemos usado la definición de la densidad de corriente. La fuerza sobre todo el cuerpo conductor es, por superposición:  $\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') dv$

En el caso de mucho interés de un **conductor filiforme**, podemos escribir, en general:

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv = \int_C \left[ \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) ds \right] dl = \mathbf{I} \int_C dl = I \int_C d\mathbf{l}$$

donde  $S$  es la sección y  $C$  la curva que define el conductor. Este pasaje de una integral de volumen a una integral de línea (y viceversa) para un circuito filiforme es de uso común.

Entonces:

$$\mathbf{F} = I \int_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

**Nótese que todos estos resultados son válidos solamente para corrientes estacionarias, que son las que surgen del flujo de cargas a velocidad constante.**

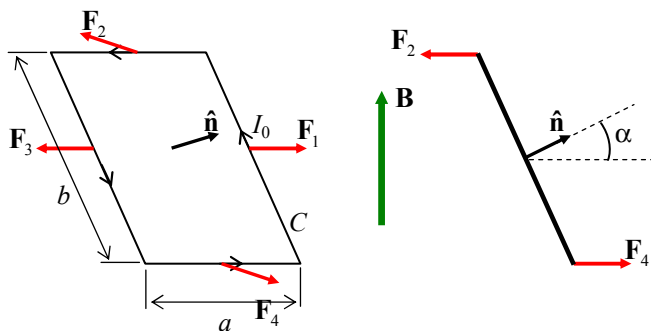
En el caso de un **circuito cerrado**, si además el campo  $\mathbf{B}$  es **uniforme** sobre todo el circuito:

$$\mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = I \left[ \oint_C d\mathbf{l} \right] \times \mathbf{B} = 0$$

porque la integral del **vector** diferencial de arco, sobre un camino **cerrado**, es cero.

**La fuerza ejercida por un campo magnético uniforme sobre un circuito cerrado es cero.**

Aunque un campo uniforme no ejerce fuerza sobre un circuito cerrado, sí produce una **cupla**.



Analizamos el caso (sencillo desde el punto de vista matemático) de una espira rectangular plana por la que circula una corriente continua  $I_0$ . En la figura se muestra la situación. La normal al plano de la espira forma un ángulo  $\alpha$  con el campo aplicado  $\mathbf{B}$  (nótese que se ha aplicado la regla de la mano derecha para determinar el sentido de la normal a partir del sentido de circulación de la corriente). La fuerza total sobre la

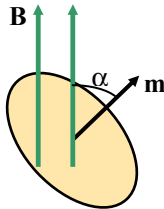
espira es cero, dado que sobre cada tramo recto se ejercen fuerzas que se anulan de a pares. En particular, las fuerzas del par  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3$  son colineales, pero las fuerzas del par  $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_4$  no lo son, sino

que forman una **cupla**, como se ve en la vista lateral. La magnitud de estas fuerzas es:  $F_2 = F_4 = I_0 a B$  de modo que la cupla vale:

$$T = F_2 b \sin \alpha = I_0 ab B \sin \alpha = I_0 S B \sin \alpha \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

donde  $\mathbf{m} = I_0 S \hat{\mathbf{n}}$  es el llamado **momento magnético** de la espira.

La expresión de la cupla se puede generalizar a espiras de cualquier forma<sup>7</sup>. El momento magnético es una propiedad importante de la espira, como el momento dipolar en el campo eléctrico.



La existencia de la cupla lleva a que la espira tienda a rotar de manera que el momento magnético se coloque paralelo al campo aplicado. En esta situación el producto vectorial es nulo (porque lo es el seno del ángulo entre  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{B}$ ) y se anula la cupla. Podemos asociar una **energía potencial** a la posición angular del momento magnético respecto del campo aplicado, energía que se hace mínima en la posición de equilibrio. Una rotación

infinitesimal produce una variación de esta energía potencial que podemos escribir:

$$dU_m = T d\alpha = mB \sin \alpha d\alpha$$

**Momento magnético de una espira:**  $\mathbf{m} = I_0 S \hat{\mathbf{n}}$

donde:

- $I_0$  es la **corriente** (continua) que circula por la espira,
- $S$  es el **área** de la espira,
- $\hat{\mathbf{n}}$  es la **normal** a la espira.

Integrando: 
$$U_m = \int mB \sin \alpha d\alpha = -mB \cos \alpha = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

es la **energía potencial de rotación** asociada a la posición angular de la espira en el campo magnético.

**Ejemplo 3-9:** Hallar la cupla máxima que ejerce el campo magnético terrestre a latitud media y a nivel del mar sobre una espira circular de  $10 \text{ cm}$  de radio por la que circula una corriente de  $1 \text{ A}$ .

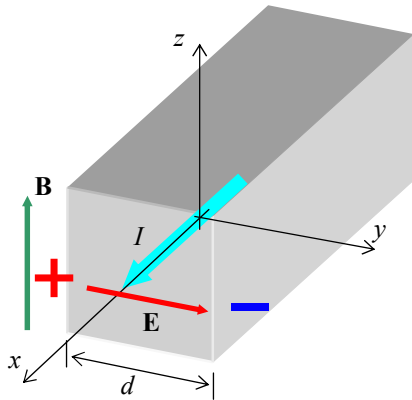
El campo magnético terrestre a latitud media y al nivel del mar es aproximadamente de  $6 \times 10^{-5} \text{ T}$ . El momento magnético de la espira es  $m = I_0 S \approx 3.14 \times 10^{-2} \text{ Am}^2$ . La cupla máxima será entonces:  $\tau_M = mB \approx 1.9 \times 10^{-6} \text{ Nm}$ . Como se ve, una cupla muy pequeña

<sup>7</sup> La espira no necesariamente debe ser una curva plana. En general, el vector momento magnético para una curva cualquiera se puede escribir:  $\mathbf{m} = I(S_{yz} \hat{\mathbf{x}} + S_{zx} \hat{\mathbf{y}} + S_{xy} \hat{\mathbf{z}})$  donde  $S_{yz}$ ,  $S_{zx}$  y  $S_{xy}$  son las proyecciones de la superficie alabeada sobre los planos subíndices (ver J.R. Reitz, F.J. Milford y R.W. Cristy, "Fundamentos de la teoría electromagnética", 4ta. Ed., Addison-Wesley Iberoamericana, 1996, Sección 8.2, para más detalles).

**Efecto Hall**

Si se coloca un conductor en forma de paralelepípedo que transporta corriente en presencia de un campo magnético, se genera una fuerza magnética sobre los portadores de carga:

$$\mathbf{F}_m = q \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B} = q \langle v \rangle \hat{\mathbf{x}} \times B \hat{\mathbf{z}} = -q \langle v \rangle B \hat{\mathbf{y}}$$



donde  $\langle v \rangle$  es la velocidad media del conjunto de portadores. Debido a esta fuerza, se produce una acumulación de carga positiva sobre una cara lateral (la izquierda en el ejemplo de la figura) del conductor, y una acumulación de carga negativa sobre la otra cara. Esto da lugar a un campo eléctrico, que se opone a la redistribución de carga inducida por el campo magnético. Se llega a una situación de equilibrio cuando:

$$F_e = qE = F_m = q \langle v \rangle B \Rightarrow E = \langle v \rangle B$$

Podemos relacionar la velocidad media de los portadores de carga con la corriente ya que:

$$\mathbf{j} = \rho \langle \mathbf{v} \rangle = qn \langle \mathbf{v} \rangle \Rightarrow E = jB / qn = R_H j B$$

donde  $R_H = 1/qn$  es el llamado **coeficiente de Hall**<sup>8</sup> del material. Otro parámetro usado en la literatura es la **movilidad de Hall**, definida como el producto del coeficiente de Hall y la conductividad del material:  $\mu_H = R_H \sigma$ . En términos de la descripción microscópica de la corriente

(pág. 3-4) podemos escribir:  $\mu_H = R_H \sigma = \frac{\sigma}{qn} = \mu$  y se ve que la movilidad de Hall coincide con

la movilidad de los portadores en el caso simple cuando hay un único tipo de portadores.

El campo de Hall da lugar a una ddp entre las caras laterales del conductor que vale:  $\Delta V = Ed = \langle v \rangle Bd \propto B$  y es proporcional al valor de la inducción magnética. En la figura se muestra la polaridad de esta ddp para portadores de carga positiva.

Entre otras aplicaciones se usa este efecto para medir campos magnéticos o para determinar el signo y la movilidad de los portadores de carga en un material. Se ve que el signo de la ddp de Hall está relacionado con el signo de los portadores de carga. En un experimento se conoce la corriente aplicada y entonces la densidad  $j$ , el campo magnético aplicado, las dimensiones y se mide la ddp. De estos valores se puede obtener la movilidad de los portadores y a partir de ella la concentración de portadores (número por unidad de volumen).

**Ejemplo 3-10:** Halle la ddp de Hall para una cinta de cobre de sección cuadrada de  $1\text{mm}^2$  que lleva una corriente de 25 A, cuando se aplica un campo  $\mathbf{B}$  de 2T. Considere que los portadores de corriente son electrones y que su concentración es  $n = 8.4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

La densidad de corriente en la cinta es:  $j = I / S = 2.5 \times 10^7 \text{ A / m}^2$

La velocidad media de los electrones es:  $\langle v \rangle = j / en \approx 1.86 \times 10^{-3} \text{ m / s}$

El campo eléctrico transversal de Hall es:  $E = \langle v \rangle B \approx 3.72 \text{ mV / m}$

Y la ddp de Hall es:  $\Delta V = Ed \approx 3.72 \text{ } \mu\text{V}$

La movilidad de los electrones y el coeficiente de Hall son:

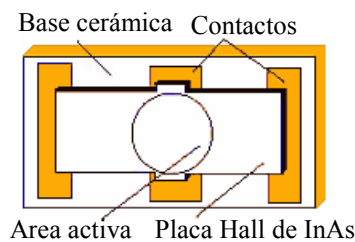
$$\mu = \langle v \rangle / E = 2 \text{ m}^2 / \text{Vs} \quad R_H = 1 / qn \approx 7.43 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{C}$$

de forma que la conductividad de la muestra es:  $\sigma = \mu / R_H \approx 2.7 \times 10^{10} (\Omega\text{m})^{-1}$

<sup>8</sup> En general, el coeficiente de Hall depende del tipo (o tipos) de colisión que da lugar a la resistividad del material, las movilidades y tipos de portadores del material. Esto es particularmente aplicable al importante caso de la aplicación del efecto Hall a la caracterización de semiconductores. Para más detalles ver, por ejemplo, S.M. Sze, "Physics of Semiconductor Devices", Wiley-Interscience, New York, 1969.

## Sensores Hall

Este efecto fue descubierto en 1879 por el físico norteamericano Edwin Hall sobre hojas de oro. Todos los conductores presentan efecto Hall, pero los valores de tensión medidos son muy pequeños, de modo que sólo se logró utilizar este fenómeno para aplicaciones industriales recientemente, cuando se desarrollaron semiconductores de GaAs o InAs, que dan tensiones de Hall relativamente grandes. Prácticamente todos los sensores modernos se basan en estos materiales. En la figura se muestra un esquema de un sensor Hall. Sobre un sustrato cerámico se crece una capa de InAs a la que se fijan contactos metálicos. El área activa es el centro de la capa, donde los efectos de los bordes y contactos no introducen deformaciones en las líneas de corriente. Con las técnicas actuales se logran áreas activas de diámetros del orden de  $0.13\text{mm}$  y espesores de  $0.25\text{mm}$ , lo que lleva a dispositivos muy pequeños.

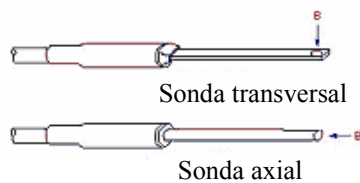


En la siguiente tabla se dan las especificaciones de algunos dispositivos fabricados por Honeywell Inc.

TIPO	Tensión Alimentación (V)	Rango de uso (G)	Sensibilidad (mV/G)
SS94A1	6.6 - 12.6	$\pm 500$	5
SS94A1F	6.6 - 12.6	$\pm 100$	25
SS94A2C	6.6 - 12.6	$\pm 1000$	2.5
SS94A2D	6.6 - 12.6	$\pm 2500$	1

Las ventajas principales en el uso de sensores basados en el efecto Hall son:

- dispositivos de estado sólido, fácilmente incorporable a circuitos integrados;
- sin partes móviles ni frágiles;
- fácilmente encapsulables para protección en ambientes hostiles;
- larga vida (del orden de 30 billones de operaciones);
- alta velocidad de respuesta (por encima de 100 kHz);
- compatible con niveles de lógica integrada;
- amplio rango de temperaturas de operación ( $-40^{\circ}\text{C}$  a  $150^{\circ}\text{C}$ );
- operación repetible;



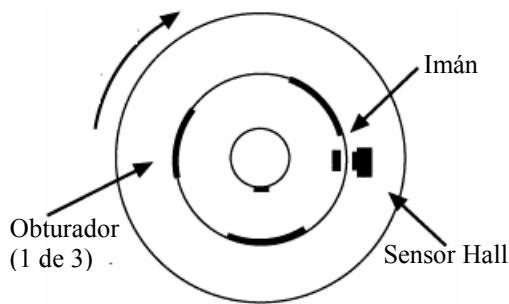
Una de las aplicaciones más comunes de los sensores Hall son los medidores de campo magnético o **gaussímetros**. En estos aparatos se tiene una sonda con el sensor y circuitería electrónica de procesamiento, amplificación y presentación. Hay fundamentalmente dos tipos de sondas: la **sonda transversal**, que mide la componente del campo magnético perpendicular a ella, y la **sonda axial**, que mide la componente del campo magnético a lo largo de ella.

El límite inferior de campo que los gaussímetros de efecto Hall puede medir es actualmente del orden de  $1\text{mG}$  (el campo magnético terrestre a nivel del mar es del orden de  $1\text{G}$ ). Por debajo de este valor, el nivel de ruido no permite obtener mediciones precisas.

En otra aplicación, se puede usar el sensor de Hall para medir la corriente que circula por un circuito. Esta corriente se hace pasar por una bobina que crea el campo magnético que actúa sobre el sensor propiamente dicho.

Otras aplicaciones comunes de sensores Hall son sensores de posición y movimiento lineal o rotativo. Aparecen sensores Hall en múltiples sistemas de control de velocidad, frenado y torque en automóviles actuales. Chrysler comenzó a utilizar sensores de Hall para controlar el avance de encendido en el año 1978. La mayoría de los diseños utilizan un obturador que pasa frente a una abertura en el sensor, obstruyendo las líneas de campo magnético producidas por un imán per-

manente. Este tipo de sensor se conoce como **sensor de paleta** u obturador). Cuando el campo



actúa sobre el sensor, se detecta un voltaje de Hall aproximadamente constante. En el momento en que el obturador corta las líneas de campo, el voltaje de Hall cae rápidamente, detectando el pasaje del obturador. Este sencillo esquema permite detectar el pasaje de un elemento frente a una posición fija. Si el elemento móvil gira, (el caso de mayor interés en aplicaciones a automotores) se produce una señal periódica de la que se puede extraer fácilmente la velocidad de giro. Si el móvil se

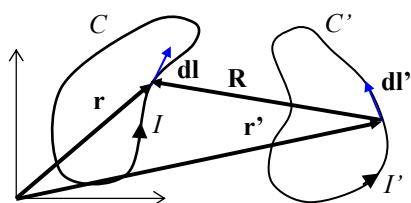
mueve linealmente, se colocan varios sensores a lo largo de la línea de movimiento y las sucesivas señales dan información acerca de su posición y velocidad.

La señal Hall puede procesarse, de acuerdo a las necesidades, para dar una salida digital o analógica. En el primer caso el sistema habitualmente se usa para tomar decisiones a partir de la información, y se conocen como **interruptores Hall (Hall switches)**. En el segundo caso se requiere una salida aproximadamente proporcional a la señal medida, y se habla de **sensores de Hall lineales**. Un cuadro de algunas aplicaciones actuales de ambos tipos es el siguiente:

Aplicaciones en automotores	Aplicaciones industriales
<p><b>Hall switches</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• posición de árbol de levas</li> <li>• posición de cigüeñal</li> <li>• sensor de ignición</li> <li>• velocidad del motor</li> <li>• velocidad de las ruedas</li> <li>• control de tracción</li> <li>• sistemas de limpiavidrios</li> <li>• cerradura</li> <li>• seguridad central</li> <li>• ajuste de asientos</li> <li>• levantador de ventanilla</li> <li>• deslizador de techo</li> <li>• switch del cinturón de seguridad</li> <li>• switch de luz de frenos</li> <li>• ajuste de espejos</li> <li>• asistencia de frenos</li> <li>• posición de diferencial</li> </ul> <p><b>Sensores lineales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• dirección automática</li> <li>• frenos automáticos</li> <li>• sensor de posición del acelerador</li> <li>• control de suspensión activa</li> <li>• ángulo de la dirección</li> <li>• ajuste del alcance de luces</li> <li>• medición de corriente</li> <li>• mantenimiento de batería</li> <li>• sensor de nivel de líquido</li> <li>• dirección de potencia</li> </ul>	<p><b>Hall switches</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• conmutación de motores CC sin escobillas</li> <li>• ventiladores de refrigeración</li> <li>• medición de RPM</li> <li>• sensores de velocidad de volantes</li> <li>• switch de posición</li> <li>• switch sin contacto</li> <li>• nivel de líquidos</li> <li>• flujo de líquidos</li> <li>• switch de presión</li> <li>• switch rotativo</li> </ul> <p><b>Sensores lineales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• sensor de posición angular</li> <li>• medición de corriente</li> <li>• medición de posición</li> <li>• medición de distancia</li> <li>• medición de presión</li> <li>• medición de fuerza</li> <li>• medición de cupla o torque</li> <li>• medición de campo magnético</li> </ul>

**El campo magnético de corrientes estacionarias. Ley de Biot-Savart**

Las experiencias realizadas por Oersted señalaron la existencia de una acción magnética de una corriente sobre una aguja imanada. Las características de esta acción, descriptas en términos de una fuerza fueron descubiertas en experimentos realizados por Biot y Savart. La extensión al descubrimiento de la acción magnética sobre conductores que transportan corriente y la forma matemática precisa de este fenómeno fueron establecidos por Ampère.



En notación moderna, la fuerza que describe la acción magnética de la corriente **estacionaria**  $I'$  que circula a lo largo de un circuito  $C'$  sobre otro circuito  $C$  por el que circula la corriente **estacionaria**  $I$  se puede escribir como:

$$\mathbf{F}_C = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \oint_C I I' \frac{d\mathbf{l} \times (d\mathbf{l}' \times \mathbf{R})}{R^3} \quad \text{donde} \quad R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

Pero habíamos definido previamente la fuerza que un campo magnético ejerce sobre un circuito que transporta corriente como:  $\mathbf{F}_C = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$

Nuevamente nos encontramos con una ecuación que describe la **acción directa**, en este caso magnética, entre dos circuitos que transportan corriente y de otra ecuación que introduce un campo mediador, en este caso el campo de inducción magnética. Por los mismos motivos que en el caso eléctrico, es conveniente utilizar el modelo de campo, donde una corriente crea la perturbación campo en el espacio, y este campo actúa sobre la otra corriente, en forma local, dando lugar a la acción ponderomotriz. De estas dos ecuaciones podemos expresar el campo de inducción magnética creado por la corriente que circula por un circuito:

$$\mathbf{F}_C = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \oint_C I I' \frac{d\mathbf{l} \times (d\mathbf{l}' \times \mathbf{R})}{R^3} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} I' \frac{(d\mathbf{l}' \times \mathbf{R})}{R^3} \right] \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

Esta expresión se conoce como **ley de Biot-Savart**.

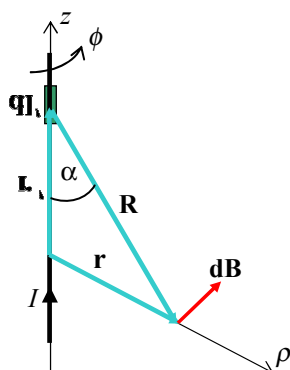
Podemos reescribir esta expresión realizando el cambio ya introducido:  $I \int_C d\mathbf{l} = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv$

con lo que obtenemos otra forma de la ley de Biot-Savart:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv'$$

**Ejemplo 3-11:** Hallar el campo de inducción magnética  $\mathbf{B}$  creado por un hilo de corriente recto de longitud infinita.

Debido a la simetría cilíndrica de la distribución de corriente, elegimos un sistema de coordenadas cilíndricas con su eje  $z$  coincidente con la línea de corriente. Para un diferencial de línea  $dl'$  la ley de Biot-Savart permite calcular el campo elemental creado en un punto cualquiera del espacio:



$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz' \sin \alpha}{R^2} \hat{\phi}$$

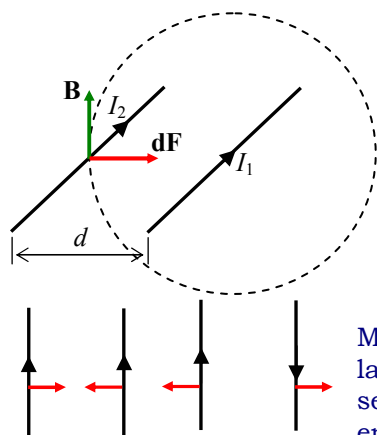
ya que  $d\mathbf{l}' = dz' \hat{z}$  y  $\alpha$  es el ángulo formado entre  $d\mathbf{l}'$  y  $\mathbf{R}$ . Se ve que el campo tiene únicamente dirección según el versor  $\hat{\phi}$ . Como  $\sin \alpha = \rho / R$  tenemos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{R^2} dz' = \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{R^3} = \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[\rho^2 + z'^2]^{3/2}}$$

La integral vale  $2/\rho^2$  y entonces:  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi}$  y sólo es función de la distancia a la línea. Se ve además que las líneas de campo son cerradas.



**Ejemplo 3-12:** Hallar la fuerza por unidad de longitud entre dos hilos de corriente rectos y paralelos, de longitud infinita separados en  $d$ .



Consideramos primero que las corrientes circulan en el mismo sentido. Podemos calcular la fuerza que el hilo 1 ejerce sobre un elemento del otro:  $d\mathbf{F}_2 = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1$

Como el campo creado por el hilo 1 es perpendicular a la corriente de la figura observamos que la fuerza es de **atracción** y tenemos:

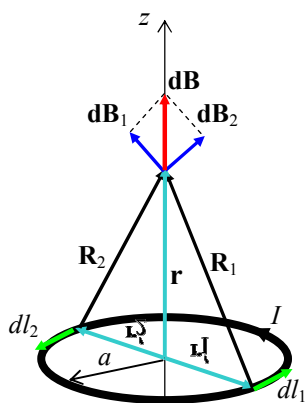
$$dF_2 = I_2 dl_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl_2 \Rightarrow \frac{dF_2}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Mediante un razonamiento análogo, se obtiene el mismo valor para la fuerza que el hilo 2 ejerce sobre el hilo 1. Si las corrientes tienen sentidos opuestos, las fuerzas serán de repulsión, como se muestra en la figura.

Por otra parte, la fuerza entre dos hilos de corriente da el soporte para la definición de la unidad de corriente en el SI. De acuerdo a la definición oficial, que reproducimos del cuadro del Capítulo 1:

**Ampere:** Corriente eléctrica constante que, si se mantiene en dos conductores rectos paralelos de longitud infinita y despreciable sección circular recta, separados en 1 metro, produciría entre estos conductores una fuerza igual a  $2 \times 10^{-7}$  newtons por unidad de longitud.

**Ejemplo 3-13:** Hallar el campo de inducción magnética creado por una espira de corriente sobre su eje.



Debido a la simetría cilíndrica del problema, elegimos un sistema de referencia con su eje  $z$  coincidente con el eje de la espira. Como se ve en la figura, dos elementos de arco de la espira ubicados simétricamente respecto de su centro producen campos cuyas componentes normales a  $z$  se anulan entre sí y sólo nos quedan las componentes según  $z$ .

Entonces: 
$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \Big|_z \hat{\mathbf{z}}$$

Como: 
$$\begin{cases} d\mathbf{l}' = a d\phi' \hat{\phi} \\ \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z \hat{\mathbf{z}} - a \hat{\rho} \end{cases} \Rightarrow d\mathbf{l}' \times \mathbf{R} = z d\phi' \hat{\rho} + a d\phi' \hat{\mathbf{z}}$$

y siendo  $dl' = a d\phi'$  tenemos:

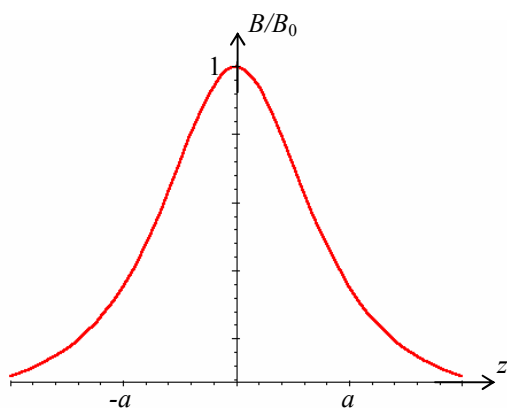
$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2 d\phi'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

Pero:  $\mathbf{m} = I a^2 \hat{\mathbf{z}}$  es el **momento magnético** de la espira, y entonces:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mathbf{B}_0}{(1 + z^2/a^2)^{3/2}}$$

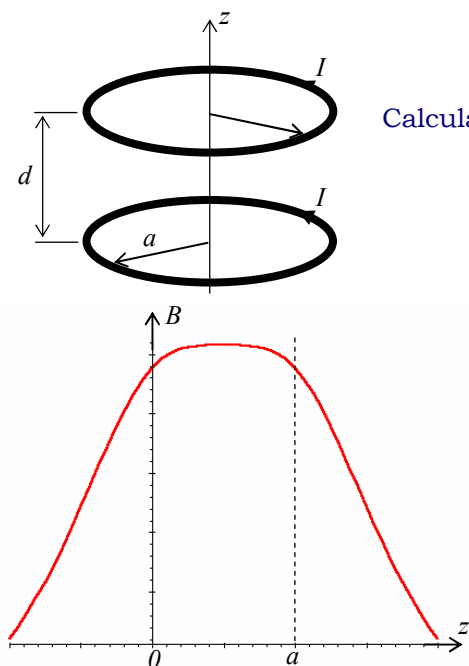
con 
$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{\mathbf{z}}$$

En la figura se muestra la variación del vector de inducción magnética sobre su eje con la distancia a la espira.



**Ejemplo 3-14:** Hallar el campo de inducción magnética creado por un par de espiras con eje común por las que circula la misma corriente (**bobinas de Helmholtz**)

De acuerdo al resultado del Ejemplo previo:



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 a^3 \left[ \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right]$$

Calculamos las primeras dos derivadas respecto de  $z$ :

$$\frac{d\mathbf{B}}{dz} = -3\mathbf{B}_0 a^3 \left[ \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{z-d}{(a^2 + (z-d)^2)^{5/2}} \right]$$

$$\frac{d^2\mathbf{B}}{dz^2} = 3\mathbf{B}_0 a^3 \left[ \frac{4z^2 - 3a^2}{(a^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{4(z-d)^2 - 3a^2}{(a^2 + (z-d)^2)^{7/2}} \right]$$

Se puede demostrar (hacerlo) que la primera derivada se anula para  $z = d/2$  y la segunda vale:

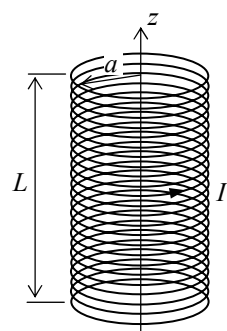
$$\frac{d^2\mathbf{B}}{dz^2} = 768\mathbf{B}_0 a^3 \frac{d^2 - a^2}{(4a^2 + d^2)^{7/2}}$$

o sea que también se anula para  $d = a$ . En estas circunstancias el campo  $\mathbf{B}$  es casi constante sobre el eje de las espiras en el espacio entre ellas. Por ello esta disposición se utiliza (en lugar de las espiras únicas hay bobinas o solenoides de sección circular para aumentar el

campo) para lograr un **campo uniforme** en una región del espacio.

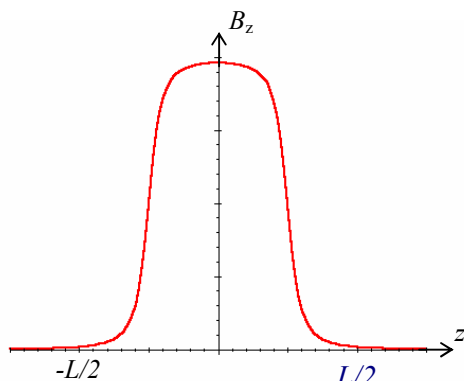
Una aplicación usual de las bobinas de Helmholtz es lograr una región libre de campo magnético (por ejemplo, contrarrestando el campo magnético terrestre) para la realización de experiencias donde no existan acciones magnéticas.

**Ejemplo 3-15:** Hallar el campo de inducción magnética creado por un **solenoides**.



Un solenoide es un conductor filiforme arrollado en forma helicoidal por el que circula una corriente. Esta estructura fue inventada por Ampère para realizar sus experimentos. Lo podemos modelizar por un conjunto de espiras adyacentes. Siguiendo la nomenclatura habitual, llamamos  $N$  a la cantidad de vueltas (o de espiras) y  $n = N/L$  al número de vueltas por unidad de longitud. Así, podemos calcular el campo  $\mathbf{B}$  creado en el eje del solenoide superponiendo los campos creados por cada espira. Para facilitar esta superposición, consideramos que el solenoide se puede dividir en “rodajas” de espesor infinitesimal, cada una de las cuales tendrá  $n dz'$  espiras. De acuerdo a los resultados del **Ejemplo 3-13** un elemento situado a la altura  $z'$  creará un campo en  $z$  dado por:

$$d\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} n dz'}{2[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \quad \text{con} \quad \mathbf{m} = I a^2 \hat{\mathbf{z}} \quad \text{e integrando a todo el solenoide:}$$



$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} n}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \quad \text{de donde:}$$

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[ \frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

El campo en el interior del solenoide es bastante uniforme hasta cerca de los extremos, con valores cercanos al del centro:

$$B(z=0) = \frac{\mu_0 n I L}{\sqrt{L^2 + 4a^2}}$$

Cuando el solenoide es muy largo ( $L \gg a$ ) podemos usar la aproximación:

$$\mathbf{B}(z) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}}$$

### Propiedades del campo de inducción magnética

Como todo campo vectorial, el campo  $\mathbf{B}$  creado por corrientes estacionarias queda unívocamente definido si se especifican su divergencia y su rotor. Ambas cantidades surgen de las ecuaciones de Maxwell. También se pueden obtener a partir de la ley de Biot-Savart que hallamos en la sección precedente, llegando a idénticos resultados. Estas demostraciones están el **Apéndice 4**:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

- Estas ecuaciones solamente se cumplen para el campo de inducción magnética creado por **corrientes estacionarias**.
- Se observa que el campo de inducción magnética **no tiene fuentes escalares** (es un campo solenoidal) y entonces **sus líneas de campo son cerradas**.
- Se observa que el campo de inducción magnética **tiene fuentes vectoriales** (la densidad de corriente eléctrica) y que, en general, **no es conservativo**.

Estas propiedades diferenciales del campo  $\mathbf{B}$  se pueden escribir como propiedades integrales:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$$

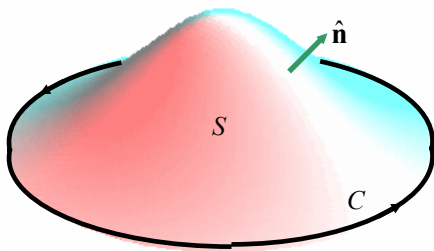
donde se ha utilizado el teorema de la divergencia. Esta es la "**ley de Gauss**" para el campo de inducción magnética.

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \int_S [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} ds = \int_S \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} ds = \mu_0 I_S$$

Usando el teorema de Stokes:

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} ds = \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_S$$

y la circulación del vector  $\mathbf{B}$  a lo largo de una curva cerrada es igual a  $\mu_0$  multiplicado por la corriente eléctrica que fluye a través de una superficie abierta cualquiera cuya frontera es la curva. También se dice que la corriente es la "concatenada" o "encerrada" por la curva. En esta expresión el sentido de circulación a lo largo de la curva y la normal a la superficie abierta (que define el sentido positivo de la corriente concatenada) deben cumplir con la regla de la mano derecha que surge de aplicar el teorema de Stokes, como se indica en la figura.



Esta expresión se conoce como **ley de Ampère** para el campo de inducción magnética.

Por otra parte, las propiedades de  $\mathbf{B}$  dan origen a **potenciales magnéticos**, que tienen la misma utilidad para el cálculo del campo que el potencial electrostático para el campo eléctrico. Analizamos los potenciales magnéticos en la siguiente sección.

**Potencial vectorial magnético**

Como el campo de inducción magnética es solenoidal, se puede expresar como el rotor de otro campo vectorial, que llamamos **potencial vectorial magnético**, ya que la divergencia de un rotor siempre es cero:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

A partir de la expresión de la ley de Biot-Savart podemos hallar una expresión para  $\mathbf{A}$  en función de las fuentes, ya que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dv'$$

Como además:  $\nabla \times (\phi \mathbf{F}) = \phi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \phi$  (Capítulo 1 – Identidades vectoriales), si consideramos:

$$\begin{cases} \phi = 1/R \\ \mathbf{F} = \mathbf{j} \end{cases} \Rightarrow \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{R} \right) = \frac{\nabla \times \mathbf{j}}{R} - \mathbf{j} \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right)$$

Tenemos entonces:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right) \right] dv'$$

La primera integral se anula porque  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  no depende de las coordenadas de punto campo y entonces las derivadas implícitas en la operación rotor son nulas y en la segunda integral podemos sacar el operador rotor fuera de la integral porque opera sobre las coordenadas de punto campo mientras que la integración se realiza sobre las coordenadas de punto fuente. Tenemos así:

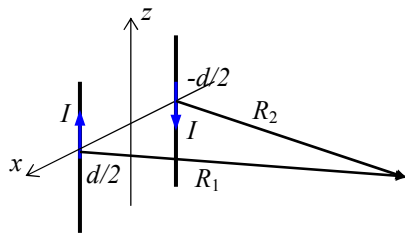
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dv' \right] \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

La integral que define el potencial vectorial es en ocasiones de cálculo más sencillo que la integral que da el campo  $\mathbf{B}$ , aunque no lo es en los sistemas simples que hemos usado como ejemplo. Su mayor importancia radica en el análisis de la radiación electromagnética (emisión de ondas) creada por corrientes variables en el tiempo.

El potencial vectorial para **circuitos filiformes** es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l}'}{R}$$

**Ejemplo 3-16:** Hallar el potencial vectorial magnético creado por una línea bifilar recta de longitud infinita.



La línea bifilar consta de dos hilos que llevan corrientes de igual amplitud y sentidos opuestos, separados en  $d$ . Usamos por comodidad el sistema de coordenadas de la figura. Como los campos no pueden depender de  $z$ , por ser los hilos infinitos, calculamos sobre el plano  $z = 0$ . Para evitar indeterminaciones en el cálculo de las integrales, consideraremos primero que los hilos se extienden entre  $-L$  y  $L$ . Dado que las corrientes

se hallan en la dirección  $z$ , el vector  $\mathbf{A}$  sólo tendrá componente  $z$ , y podemos escribir:

$$\begin{aligned} A_z(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \int_{C_1} \frac{dl'_1}{R_1} - \int_{C_2} \frac{dl'_2}{R_2} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2 + z'^2}} - \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2 + z'^2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2 + z'^2}} - \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2 + z'^2}} \right] \end{aligned}$$

Estas integrales pueden calcularse para obtener:

$$A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{L + \sqrt{(x-d/2)^2 + y^2 + L^2}}{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2}} \right) - \ln \left( \frac{L + \sqrt{(x+d/2)^2 + y^2 + L^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2}} \right) \right]$$

O sea: 
$$A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{L + \sqrt{(x-d/2)^2 + y^2 + L^2}}{L + \sqrt{(x+d/2)^2 + y^2 + L^2}} \frac{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2}} \right)$$

y, para  $L \rightarrow \infty$ , la primera fracción se simplifica, con lo que queda:

$$A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2}} \right)$$

Se observa que con un solo hilo del par el potencial vectorial queda indefinido cuando  $L \rightarrow \infty$ .

En la figura se muestra la variación de  $A(x,y)$  para  $d = 1m$ . Se observa que  $A$  tiende rápidamente a  $\pm\infty$  cuando nos acercamos a los hilos.

Podemos calcular el campo de inducción magnética como:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ - \left( \frac{y}{(x-d/2)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+d/2)^2 + y^2} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{x-d/2}{(x-d/2)^2 + y^2} - \frac{x+d/2}{(x+d/2)^2 + y^2} \right) \hat{\mathbf{y}} \right]$$

que puede escribirse:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \times \left( \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^2} - \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^2} \right)$$

Cada producto vectorial da un campo con líneas circulares alrededor de cada hilo.

### Ecuación diferencial para el potencial vectorial magnético

La ley de Ampère se puede escribir en función del potencial vectorial:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Pero: 
$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} + \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right] dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dv'$$

donde hemos usado la identidad vectorial (Capítulo 1):  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \phi$

y el hecho que la densidad de corriente  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  no es función de las coordenadas de punto campo.

Podemos reescribir esta ecuación usando la misma identidad vectorial como:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right] dv'$$

La integral del segundo término se anula porque tratamos con corrientes estacionarias  $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$  y la integral del primer término se puede reescribir usando el teorema de la divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right) dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{R} ds' = 0$$

El recinto  $V$  es arbitrario, pero debe incluir todas las fuentes de campo (corrientes). Se puede elegir entonces una superficie frontera  $S$  alejada donde  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  es cero y la integral se anula.

De la ley de Ampère queda entonces la **ecuación vectorial de Poisson** para  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

cuya solución particular es justamente la expresión de  $\mathbf{A}$  que hallamos previamente.

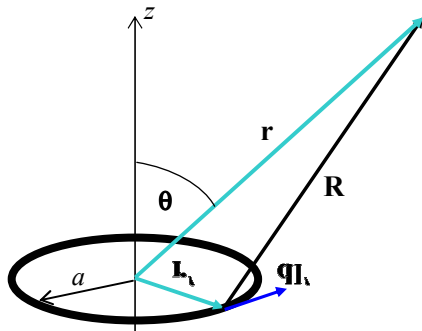
**Dipolo magnético**

En el Ejemplo 3-13 se halló el campo  $\mathbf{B}$  producido por una espira circular sobre su eje:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para grandes distancias podemos despreciar  $a^2$  frente a  $z^2$  y:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2z^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \hat{\mathbf{z}}$$



Este es el valor aproximado del campo lejano del llamado **dipolo magnético**. Se observa que es proporcional al momento magnético del dipolo e inversamente proporcional al **cubo** de la distancia.

Para obtener una expresión más precisa de la aproximación dipolar del campo creado por una espira usamos el potencial vectorial:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{R}$$

Vamos a calcular el potencial magnético  $\mathbf{A}$  a distancias lejanas ( $r \gg a$ ) de manera que podemos escribir:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}}} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right)$$

y entonces, a primer orden:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_C \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right) d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

donde se anula la integral del primer término. El integrando restante se puede escribir usando las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}') \mathbf{r}' \\ d[\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')] &= (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}') \mathbf{r}' + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro tenemos:  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} + d[\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')] \}$

e introduciendo este resultado en la integral previa nos queda:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{\mu_0 I}{8\pi r^3} \oint_C \{ (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} + d[\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')] \}$$

El segundo término contiene una diferencial total exacta, que evaluada sobre una curva cerrada se anula. Queda entonces:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{I}{2} \oint_C \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' \right] \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

porque la cantidad entre corchetes es el producto de la corriente  $I$  por el área (vectorial)  $S \hat{\mathbf{n}}$  de la superficie encerrada por la curva  $C$ . Este es el potencial vectorial magnético lejano creado por un

dipolo magnético<sup>9</sup>.

El campo lejano de inducción magnética que crea el dipolo magnético es:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right)$$

Usando la identidad vectorial (Capítulo 1):

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

tenemos:

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\nabla \times \left( \mathbf{m} \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right) = -\mathbf{m} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) + \nabla \left( \frac{1}{r} \right) (\nabla \cdot \mathbf{m}) - \left( \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \nabla \right) \mathbf{m} + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \nabla \left( \frac{1}{r} \right)$$

El primer término se anula porque es proporcional a la delta de Dirac centrada en cero, y aquí estamos calculando el campo lejano. El segundo y tercer términos se anulan porque el momento magnético es una constante. Queda entonces, operando:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right]$$

### Potencial escalar magnético

La ley de Ampère establece que para corrientes estacionarias el rotor del campo  $\mathbf{B}$  es proporcional a la densidad de corriente en todo punto del espacio. Si en un recinto del espacio no hay corrientes (las corrientes que crean el campo deben estar entonces **fuera** del recinto en consideración) el rotor de  $\mathbf{B}$  se anula en ese recinto y puede expresarse como un gradiente de una cierta función escalar que se conoce como **potencial escalar magnético**:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \text{si } \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \Psi_m(\mathbf{r})$$

El potencial escalar magnético es de interés en campos creados por material magnetizado, donde no existen corrientes eléctricas fuentes de campo. Por ello suele derivarse sus expresiones de cálculo a partir del campo de dipolos magnéticos, que se usan en la modelización del material magnetizado, como veremos más abajo. La ecuación del campo lejano de inducción magnética de un dipolo magnético puede escribirse como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right] = -\mu_0 \nabla \left( \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \right)$$

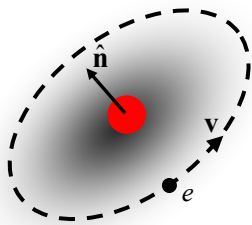
(como puede comprobarse realizando el cálculo en coordenadas esféricas) de manera que podemos definir el **potencial escalar magnético lejano** creado por un dipolo magnético:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

<sup>9</sup> Obsérvese que en este desarrollo no se ha utilizado la forma circular de la espira. En realidad los resultados obtenidos son válidos para espiras de cualquier forma.

### Materiales magnetizados

Las corrientes eléctricas no son las únicas fuentes que generan interacciones magnéticas. Los materiales magnetizados han sido históricamente las primeras fuentes de interacciones magnéticas. Para describir el comportamiento de los materiales magnetizados usaremos un modelo similar al que utilizamos en el estudio de la polarización. Dado que los electrones pertenecientes a los átomos de un sólido se mueven en las cercanías del núcleo, un modelo ingenuo de un átomo hidrogenoide se puede representar como una carga positiva (el núcleo) alrededor del cual gira una carga negativa (el electrón). Esta carga móvil es efectivamente una corriente, de manera que podemos interpretar este modelo como una espira con un dado momento magnético<sup>10</sup>.

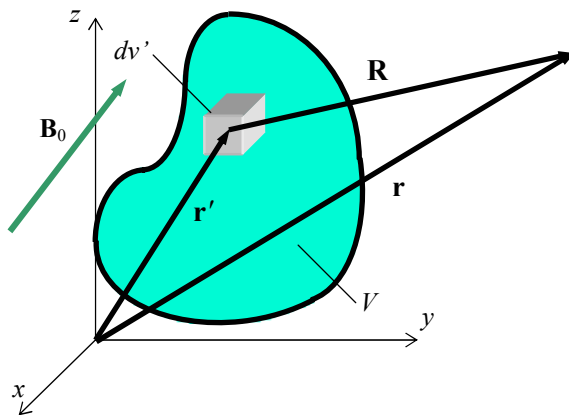


En el estado “normal” de un material no magnetizado, los momentos magnéticos de los átomos (o moléculas u otras unidades magnetizables del material) están orientados al azar y no existe un momento magnético neto en una región macroscópica cualquiera del material.

Al colocar el material en un campo de inducción magnética exterior, aparece una cupla sobre las “espiras” atómicas que tiende a alinear los momentos magnéticos con el campo aplicado. De esta forma surge un momento magnético neto en regiones del cuerpo que crea un campo de inducción magnética **inducido**, que se superpone con el original.

### Potencial vectorial inducido

Podemos calcular este campo inducido dividiendo el cuerpo en elementos de volumen, cada uno de los cuales tiene asociado un momento magnético elemental  $d\mathbf{m}(\mathbf{r}')$ . Como se trata de un elemento de volumen infinitesimal, se puede modelizar como un **dipolo magnético**, y el potencial vectorial magnético lejano que genera es, de acuerdo a lo hallado en la sección precedente:



$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3}$$

Definimos el **vector magnetización** como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \left. \frac{d\mathbf{m}}{dv'} \right|_{\mathbf{r}'} \Rightarrow d\mathbf{m}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv'$$

con lo que: 
$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv'$$

e integrando a todo el volumen del cuerpo resulta:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv'$$

Este es entonces el potencial vectorial magnético inducido creado por el cuerpo magnetizado. A partir de él se puede calcular el campo  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

<sup>10</sup> Este momento magnético se conoce como momento magnético **orbital** del electrón, porque en mecánica cuántica está asociado a su momento angular orbital. En la teoría del magnetismo se debe tener en cuenta además el momento magnético de **spin** que da origen a fenómenos como el ferromagnetismo y otros. En el próximo Capítulo presentamos una introducción fenomenológica a las propiedades de los materiales magnéticos.



### Corrientes equivalentes de magnetización

El cálculo del potencial vectorial inducido a partir de la magnetización del material puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dv'$$

Pero (Capítulo 1):  $\nabla \times (\phi \mathbf{F}) = \phi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \phi$

Entonces:  $\nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} - \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right)$

y tenemos:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} \right) \right] dv'$

La segunda integral se puede reescribir usando la identidad (Capítulo 1):

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dv = \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) ds \text{ y queda: } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} dv' + \int_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}}{R} ds' \right]$$

Si observamos la primera integral, vemos que **matemáticamente** es equivalente a la ecuación que da el potencial vectorial magnético creado por corrientes eléctricas:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

siempre que se identifique:  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$  como **una distribución volumétrica de corriente equivalente**. Análogamente, la segunda integral se puede interpretar como el potencial vectorial magnético creado por una **distribución superficial de corriente equivalente**:  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}$ . Por lo tanto:

**El potencial vectorial inducido creado por un material magnetizado puede calcularse reemplazando al material por una distribución de corriente volumétrica en el volumen del material más una distribución de corriente superficial sobre la superficie frontera de este volumen:**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{R} dv' + \int_S \frac{\mathbf{j}_{M_S}(\mathbf{r}')}{R} ds' \right]$$

**con**  $\mathbf{j}_M(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$   $\mathbf{j}_{M_S}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}$

### Potencial escalar magnético inducido

Así como un material magnetizado puede reemplazarse por un conjunto equivalente de corrientes para el cálculo del potencial vectorial magnético (y a partir de él calcular el campo de inducción magnética), el modelo de dipolos elementales nos lleva a una descripción alternativa usando el potencial escalar magnético, que puede utilizarse ya que no existen (en el recinto de integración, que ocupa el cuerpo magnetizado) corrientes verdaderas.

Recordamos que el potencial escalar magnético creado por un dipolo magnético elemental en el

origen de coordenadas es:  $\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$ . Por lo tanto, si dividimos al cuerpo magnetizado en

elementos de volumen como en la sección precedente tenemos que el potencial escalar magnéti-

co creado por uno de ellos es:

$$d\Psi_m(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3} dv'$$

e integrando a todo el volumen del cuerpo magnetizado:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}}{R^3} dv'$$

### Cargas equivalentes de magnetización

Esta expresión puede reescribirse usando las mismas técnicas que nos llevaron a las cargas equivalentes de polarización en el caso de los cuerpos polarizados, ya que se trata de ecuaciones matemáticamente idénticas. Como:

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \quad \Rightarrow \quad \Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dv'$$

y siendo:  $\mathbf{F} \cdot \nabla f = \nabla \cdot (f\mathbf{F}) - f \nabla \cdot \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'(1/R) = \nabla' \cdot [\mathbf{M}(\mathbf{r}')/R] - \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')/R$  (observe que las derivadas se realizan sobre las coordenadas primadas), tenemos:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} \right] dv' = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{R} ds' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia para reescribir la primera integral. Esta última expresión es equivalente a:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

que equivale al **potencial electrostático** que crearía una **distribución de carga libre** con densidades volumétrica  $\rho_m(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')$  y superficial  $\sigma_m(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

Por lo tanto:

**Podemos calcular el potencial escalar magnético inducido creado por un cuerpo magnetizado reemplazando al cuerpo por una distribución equivalente de carga libre y hallando el potencial electrostático asociado:**

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

**con**  $\rho_m(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad \sigma_m(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}$

A diferencia del uso del potencial vectorial magnético, que puede usarse cuando hay corrientes verdaderas o corrientes equivalentes de magnetización, el potencial escalar magnético **sólo** es utilizable cuando en el recinto de integración no hay corrientes verdaderas, y por lo tanto su mayor utilidad se da cuando se trabaja con imanes permanentes.

### Campo magnético. Forma general de la ley de Ampère

La ley de Ampère liga el rotor del campo de inducción magnética  $\mathbf{B}$  con las corrientes eléctricas, que son sus fuentes vectoriales. Cuando existen además materiales magnetizados éstos son también fuentes de campo, y pueden introducirse por superposición en la ley de Ampère a través de las corrientes equivalentes de magnetización:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_m(\mathbf{r})]$$

de donde: 
$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} \right) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Llamamos: 
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad [H] = \frac{A}{m}, \quad 1 \text{Oe} = 79.6 \text{ A/m}$$

$\mathbf{H}$  es el vector **campo magnético**. Aunque en el SI la unidad es [A/m], se usa también la unidad *Oersted*.

Finalmente: 
$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = I$$

es la nueva forma de la **ley de Ampère** donde se ve que **las fuentes vectoriales del campo magnético son las corrientes reales**.  $\mathbf{H}$  tiene el mismo sentido físico que el vector desplazamiento en la electrostática, es decir ligar al campo con sus fuentes de carga o corrientes **reales**. Como dijimos al comienzo de esta sección, en general el material se ve magnetizado por la alineación de sus elementos magnetizables (átomos, moléculas, etc.) con un campo aplicado<sup>11</sup>. Por lo tanto, la magnetización tiene que ser función del campo aplicado (y del campo total) y podemos escribir:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}[\mathbf{B}(\mathbf{r})] = \mathbf{M}[\mathbf{H}(\mathbf{r})]$$

En muchos materiales la magnetización es proporcional al campo magnético:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

donde  $\chi_m$  se conoce como **susceptibilidad magnética** del material, y que normalmente depende también del campo magnético, aunque en muchos materiales no fácilmente magnetizables es constante respecto del campo.

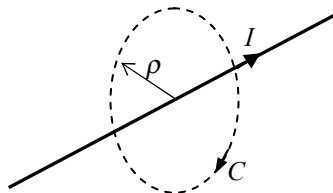
Además, como: 
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r})] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 [1 + \chi_m] \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

$\mu$  se conoce como **permeabilidad** del material. También se puede escribir:  $\mu = \mu_r \mu_0$  donde  $\mu_r$  es la **permeabilidad relativa**.

En el Capítulo siguiente, donde estudiamos en mayor detalle las propiedades magnéticas de los materiales, presentamos varias tablas de propiedades magnéticas de materiales comúnmente usados en la ingeniería.

**Ejemplo 3-17:** Hallar el campo magnético creado por un hilo de corriente recto de longitud infinita.

Este problema fue resuelto en el **Ejemplo 3-11** usando la ley de Biot-Savart. Ahora vamos a usar la ley de Ampère.



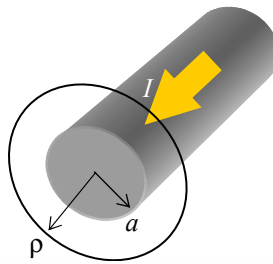
Tomamos un sistema de coordenadas cilíndricas con su eje z coincidente con el hilo. La simetría cilíndrica del problema hace que el campo magnético creado no puede depender del ángulo alrededor del eje ni de la posición a lo largo del mismo. Luego:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\rho)$ . Además, la ley de Biot-Savart nos permite deducir que sólo hay componente según  $\hat{\phi}$ . Con todo esto, las líneas de campo son circulares.

Tomamos entonces una curva para calcular la circulación de la ley de Ampere que es una circunferencia de radio  $\rho$  con su centro sobre el hilo. Tenemos así:

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = I \quad \Rightarrow \quad H(\rho) 2\pi\rho = I \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

que es el mismo resultado obtenido en el **Ejemplo 3-11**.

<sup>11</sup> En el próximo capítulo veremos el caso de los imanes que tienen una magnetización aún en ausencia de campo aplicado.



**Ejemplo 3-18:** Hallar el campo magnético creado por un conductor cilíndrico recto muy largo en todo el espacio.

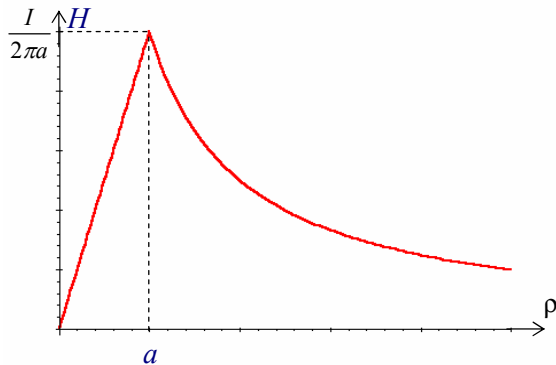
Aplicando la ley de Ampère, el campo magnético fuera del conductor ( $\rho > a$ ) es igual al que se obtiene si toda la corriente está concentrada en un hilo de sección nula en el eje del conductor:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (\rho \geq a)$$

Para puntos interiores del conductor ( $\rho < a$ ) la expresión de  $\mathbf{H}$  es similar, pero sólo debe considerarse la corriente encerrada por la curva de circulación. Suponemos que la corriente está distribuida uniformemente en la sección:

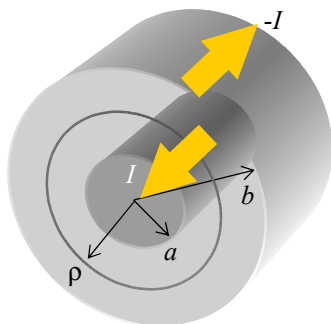
$$I_\rho = \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I_\rho}{2\pi\rho} \hat{\phi} = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad (\rho \leq a)$$



de modo que el campo crece linealmente con el radio dentro del conductor y luego decae inversamente proporcional al radio. Sobre el borde del conductor ambos valores son iguales.

**Ejemplo 3-19:** Hallar el campo magnético creado por un cable coaxil recto de longitud infinita.



Un coaxil transporta corrientes de igual magnitud y sentido opuesto en ambos conductores. Aplicamos el resultado del Ejemplo precedente. Entre los dos conductores sólo aparece el campo creado por el conductor interior, ya que la corriente que circula por el conductor exterior no es concatenada por la curva de circulación.

Además, como se trata de radios mayores que el radio del conductor interior, el campo es equivalente al de un hilo que transporta toda la corriente en el eje del coaxil:

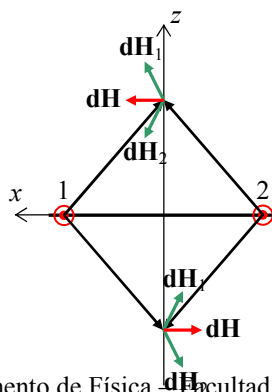
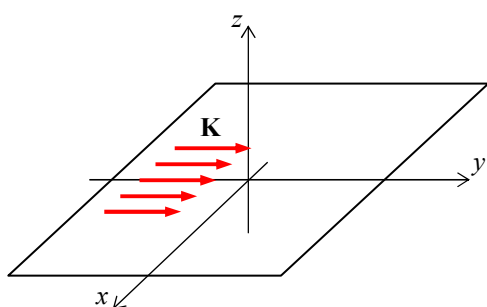
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (a \leq \rho \leq b)$$

Dentro del conductor interior, si la distribución de corriente es uniforme, el campo es el mismo que en el Ejemplo precedente:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad (\rho \leq a)$$

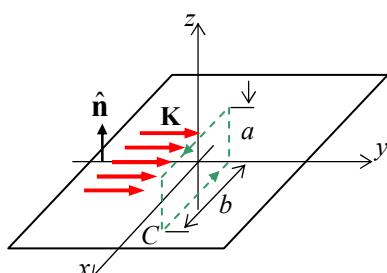
Finalmente, si aplicamos la ley de Ampère para una curva fuera del coaxil, como el campo magnético debe seguir manteniendo las mismas características de simetría que en el resto del espacio, y como la corriente concatenada es cero [ $I+(-I)$ ], el campo también debe ser cero. No existe así campo magnetostático fuera de un coaxil. Tampoco existe campo electrostático cuando los conductores del coaxil están cargados como un capacitor, lo que hace que a baja frecuencia un cable coaxil no genere interferencias.

**Ejemplo 3-20:** Hallar el campo magnético en el interior de una línea infinita de planos paralelos.



Primero analizamos el campo creado por un solo plano. Como se ve en la figura, circula una corriente uniforme sobre el plano de densidad  $\mathbf{K}$  ( $A/m$ ). Podemos dividir el plano en cintas a lo largo del eje  $y$  con espesor infinitesimal  $dx$ , hallar el campo que generan estas cintas, que se comportan como hilos con-

ductores, y luego aplicar superposición. Nosotros vamos a usar la ley de Ampère, pero esta idea nos sirve para determinar las propiedades del campo creado por el plano total. De la figura de la derecha se ve que, por simetría, el campo  $\mathbf{H}$  debe ser horizontal (paralelo al plano) y tiene distintos sentidos al atravesar el plano, ya que todo el plano se puede modelizar como la superposición de pares de cintas como las indicadas con 1 y 2 en la figura.



Tomamos entonces la curva  $C$ , un rectángulo vertical de lados  $a$  y  $b$  para aplicar la ley de Ampère (obsérvese que hemos elegido el sentido de circulación para que el flujo de corriente sobre la superficie del rectángulo sea positivo). Sólo habrá contribución a la circulación sobre los lados horizontales, donde  $\mathbf{H}$  es paralelo a la curva y se tiene:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2H_0 b = Kb \Rightarrow H_0 = K/2$$

Como  $\mathbf{H}$  tiene la dirección de  $x$  resulta:  $\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{n}$

Resuelto el problema de un solo plano, para hallar el campo en el caso de la línea de planos paralelos aplicamos superposición, teniendo en cuenta que las corrientes en ambos planos tienen sentidos opuestos. Si un plano está en  $z = 0$  y el otro en  $z = d$ , queda entonces:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{para } z < 0 \\ \mathbf{K} \times \mathbf{n} & \text{para } 0 < z < d \\ 0 & \text{para } z > d \end{cases}$$

Nuevamente en este caso, como en el del coaxial, no hay campo fuera de la estructura.

### Condiciones de frontera del campo magnético.

Las propiedades de los vectores magnéticos (ley de Gauss y de Ampère) llevan a que se deben cumplir ciertas condiciones de frontera al cruzar la interfase entre dos medios de permeabilidades diferentes. Estas propiedades se deducen de la misma manera que las correspondientes al campo electrostático:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 & \Rightarrow B_{n_1} = B_{n_2} & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) & \Rightarrow H_{t_1} - H_{t_2} = j_s & \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s \end{aligned}$$

En esta última ecuación se conservan las componentes tangenciales del vector campo magnético al cruzar la interfase, salvo que exista sobre ella una **densidad superficial de corriente eléctrica**. En la práctica no existen corrientes superficiales, de manera que habitualmente la condición de borde es que se conservan las componentes tangenciales del vector campo magnético al cruzar la interfase.

### Flujo magnético

El flujo del campo de inducción magnética a través de una superficie, el llamado **flujo magnético**, es una cantidad que es de mucha utilidad. Podemos expresarla en términos del potencial vectorial magnético:

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \Rightarrow \Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S (\vec{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \Rightarrow \Phi_m = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

**El flujo magnético a través de una superficie abierta  $S$  es igual a la circulación del potencial vectorial magnético a lo largo de la curva borde de la superficie:**

$$\Phi_m = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

**Autoinductancia e inductancia mutua**

La acción de campos magnéticos sobre circuitos es de mucha importancia en la ingeniería eléctrica, especialmente cuando se trata de campos variables en el tiempo, que veremos en un Capítulo posterior.

Para describir esta acción se introducen los conceptos de:

**Inductancia:** Flujo sobre un circuito producido por la propia corriente

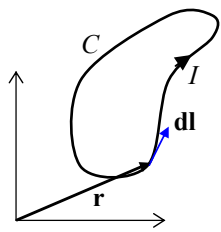
$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{d\Phi_m}{dI}$$

**Inductancia mutua:** Flujo sobre un circuito producido por la corriente que circula en otro

$$\Phi_{m_1} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_1 = \oint_{C_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \quad \Rightarrow \quad M_{12} = \frac{d\Phi_{m_1}}{dI_2}$$

A partir de la expresión del potencial vectorial podemos obtener ecuaciones de cálculo de estos parámetros.

En el caso de la **autoinductancia** tenemos:

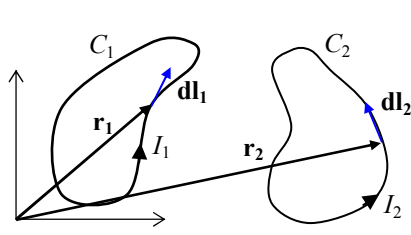


$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{d\Phi_m}{dI} \quad \text{y como:}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{R} \quad \Rightarrow \quad \Phi_m = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{R} \right] \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{R}$$

de donde:  $L = \frac{d\Phi_m}{dI} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{R}$  con:  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

En este caso ambos vectores posición refieren a puntos sobre el mismo circuito C.



En el caso de la **inductancia mutua** tenemos:

$$\Phi_{m_1} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_1 = \oint_{C_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \quad \Rightarrow \quad M_{12} = \frac{d\Phi_{m_1}}{dI_2}$$

Dado que:  $\mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{R_2}$

$$\Phi_{m_1} = \oint_{C_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 = \oint_{C_1} \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{R_{12}} \right] \cdot d\mathbf{l}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R_{12}}$$

de donde:  $M_{12} = \frac{d\Phi_{m_1}}{dI_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R_{12}} = M_{21}$  con:  $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

Se observa que la inductancia mutua entre dos circuitos es **simétrica**:  $M_{12} = M_{21}$

Estas fórmulas para L y M<sub>12</sub> se conocen como **fórmulas de Neumann**, y de ellas se deduce que la autoinductancia (también llamada **inductancia propia** o **inductancia a secas**) y la inductancia mutua son propiedades que sólo dependen de la geometría de los circuitos.

Las fórmulas de Neumann se puede usar numéricamente sólo en pocos casos debido a la complejidad de los cálculos involucrados, de manera que es más común calcular inductancias propias y mutuas por sus definiciones a partir de los flujos magnéticos.

Cuando existen varios circuitos por los que circula corriente, el flujo magnético  $\Phi_{mi}$  concatenado por uno cualquiera de ellos está dado por la suma de los flujos creados por el campo de inducción magnética propio (descrito a través de la autoinductancia  $L_i$ ) y los campos de inducción magnética debidos a los otros circuitos (descritos a través de las inductancias mutuas  $M_{ij}$ ):

$$\Phi_{m_i} = L_i I_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_{ij} I_j = \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j \quad \text{con} \quad L_{ii} = L_i \quad L_{ij} = M_{ij}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial:  $[\Phi_m] = [L][I]$

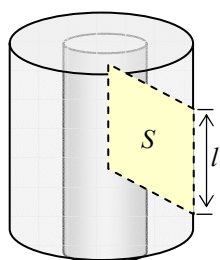
donde la matriz tiene coeficientes que son las inductancias propias y mutuas del sistema. Esta ecuación matricial es equivalente a la obtenida en el caso electrostático para los coeficientes de capacidad/inducción.

**Ejemplo 3-21:** Hallar las autoinductancias externa e interna de un cable coaxil.

En el **Ejemplo 3-19** hemos hallado el campo magnético producido por un coaxil:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad (\rho \leq a) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi \rho} \hat{\phi} \quad (a \leq \rho \leq b) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\rho > a)$$

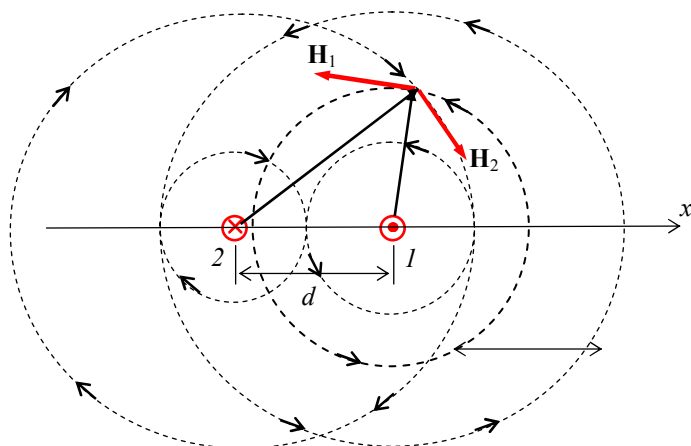
Si no existiera campo dentro del conductor interior, el flujo magnético sólo se debería al campo entre los conductores. Tomando como área de cálculo del flujo un rectángulo de longitud  $l$  y ancho  $(b-a)$  tenemos:



$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_0^l \int_a^b \mu_0 \frac{I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Generalmente el radio del conductor interior es muy pequeño y el flujo aportado por el campo en el conductor interior es despreciable. Si no es así, se debe agregar a la autoinductancia un sumando  $\frac{\mu_0 l}{8\pi}$  que se conoce como **inductancia interna**. El valor que hemos calculado arriba se conoce como **inductancia externa**.

**Ejemplo 3-22:** Hallar la autoinductancia externa de una línea bifilar.

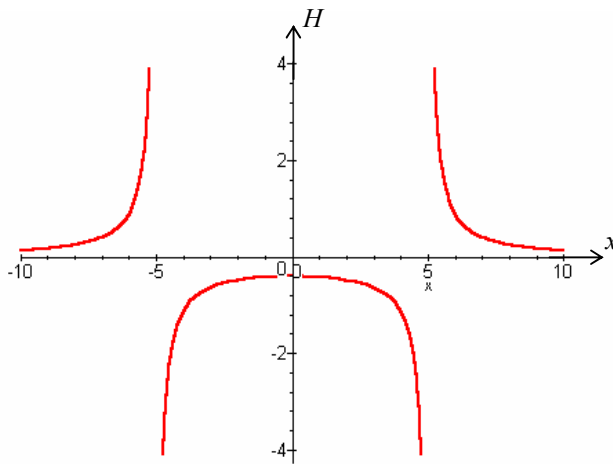


Vamos a considerar conductores de grosor despreciable. Cada conductor crea un campo magnético con líneas circulares centradas en el mismo. Se ve que hay puntos donde los campos se refuerzan y otros donde se oponen.

La forma matemática del campo en cualquier punto del espacio es un poco complicada, de manera que vamos a escribirla sobre un eje  $x$  perpendicular a los conductores y con origen equidistante a ellos. Para todo punto  $x$  sobre ese eje, los campos creados por cada conductor son verticales, y de valor:

$$H_1 = \frac{I}{2\pi(x-d/2)} \quad x \neq d/2 \quad H_2 = -\frac{I}{2\pi(x+d/2)} \quad x \neq -d/2$$

Entonces, el campo para todo  $x$  será: 
$$H = \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{1}{x-d/2} - \frac{1}{x+d/2} \right] = \frac{I}{2\pi} \frac{d}{x^2 - d^2/4} \quad |x| \neq d/2$$



Esta es la gráfica de  $H$  versus  $x$  para  $d = 5 \text{ m}$ .

Nótese que hay campo en el espacio entre los conductores y también fuera de ese espacio. A diferencia del coaxil, el campo creado por esta línea se extiende a todo el espacio, lo que disminuye la energía útil que propaga y genera problemas de interferencia con otros circuitos cercanos. Tomando el plano que contiene a los conductores como superficie de integración, podemos calcular la autoinductancia (aproximada) de la línea. Si  $a$  es el radio de los conductores, el flujo a través de un tramo de longitud  $l$  sobre este plano y entre los conductores es:

$$\Phi_m = \int_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi} \int_{-(d/2-a)}^{d/2-a} \frac{dx}{x^2 - d^2/4}$$

Esta integral se puede escribir:

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi} 2 \int_0^{d/2-a} \frac{dx}{x^2 - d^2/4} = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \int_0^{d/2-a} \left[ \frac{1}{x+d/2} - \frac{1}{x-d/2} \right] dx = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \left[ \ln \frac{d-a}{d/2} - \ln \frac{a}{d/2} \right]$$

y finalmente se tiene: 
$$\frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \left( \frac{d-a}{a} \right) \Rightarrow L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \left( \frac{d-a}{a} \right)$$

### MODELO ESTÁTICO

En la siguiente tabla se resumen las propiedades básicas de los campos estáticos.

	<b>Electrostática</b>	<b>Corriente Estacionaria</b>	<b>Magnetostática</b>
Ecuaciones básicas del campo	$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$
Relaciones constitutivas	$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$	$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$
Condiciones de borde	$(\mathbf{D}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{D}_2(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma(\mathbf{r})$ $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{r})) = 0$	$(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{j}_2(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial \sigma(\mathbf{r})}{\partial t}$	$(\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{B}_2(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{r})) = \mathbf{j}_s(\mathbf{r})$
Potenciales	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r})$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r})$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \Psi_m(\mathbf{r})$
Ecuaciones del potencial	$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) / \varepsilon$	$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0$	$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{j}(\mathbf{r})$ $\nabla^2 \Psi_m(\mathbf{r}) = 0$
Parámetros circuitales	<b>Capacidad</b> $[Q] = [C][\Phi]$	<b>Resistencia</b> $R = \Delta \Phi / I$	<b>Inductancia</b> $[\Phi_m] = [L][I]$



## RESUMEN

- Se introduce en este capítulo la noción de **corriente eléctrica** como un **transporte ordenado de carga** y se define la cantidad básica, el campo de densidad de corriente. El principio de conservación de la carga lleva a la **importante ecuación diferencial de continuidad**, de la cual se desprende el concepto de **corriente estacionaria**:

$$I = \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad \text{con} \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{CC})$$

- Es fundamental la noción de régimen **cuasi-estacionario** (o **cuasi-estático**), que se refiere a un transporte de corriente dependiente del tiempo, pero cuyo contenido espectral se limita a bajas frecuencias. En tal caso, es **aproximadamente válido** usar las ecuaciones (rigurosamente válidas sólo para CC) de la teoría de circuitos.
- En muchos materiales hay una relación de proporcionalidad entre la densidad de corriente y el campo eléctrico dentro del conductor. Esta relación es la **ley de Ohm**. Las características de transporte de corriente del material se resumen en su **conductividad** (o la inversa, la **resistividad**) y la **movilidad** de los portadores de carga:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \mu = \frac{\sigma}{\rho(\mathbf{r})}$$

- El campo eléctrico dentro de un conductor no es conservativo. Su circulación a lo largo de un circuito cerrado es la **fem** (fuerza electromotriz) sobre el circuito. Se puede relacionar la fem con la corriente circulante a través de la **resistencia** del circuito (ley de Ohm macroscópica):

$$fem = \frac{L}{q} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \frac{j}{\sigma} dl \quad R = \int_C \frac{dl}{\sigma S} = \int_C \frac{\rho dl}{S}$$

- Existe una analogía matemática formal entre las expresiones que permiten calcular la capacidad y la resistencia entre dos conductores, lo que lleva a que los métodos de cálculo sean los mismos:

$$R = \frac{fem}{I} = \frac{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS} \quad C = \frac{\int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t=0) e^{-t/\tau} \quad \tau = \epsilon / \sigma$$

- A partir de la ecuación de continuidad es posible demostrar que una inhomogeneidad de carga dentro de un conductor decae rápidamente (en unos  $10^{-18}$  s). Este es el **tiempo de relajación** del conductor. El exceso de carga se distribuye sobre la superficie del conductor y se llega rápidamente a la situación electrostática:
- El trabajo cedido por el campo eléctrico a las cargas en movimiento que conforman una corriente eléctrica produce una transferencia de potencia del campo al conductor que se traduce macroscópicamente en un calentamiento del material (**efecto Joule**):

$$W = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV$$

- Se han establecido las **condiciones de frontera** que cumple el campo de densidad de corriente sobre la interfase entre dos medios de propiedades diferentes:

$$(\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\sigma_l}{dt}$$

En este capítulo también analizamos el campo magnético creado por corrientes estacionarias, llamado también campo magnetostático.

- Para corrientes estacionarias las ecuaciones de Maxwell llevan a las ecuaciones del campo magnetostático:  $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$      $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$
- $\mathbf{B}$  se conoce como **campo de inducción magnética** y  $\mathbf{H}$  es el llamado **campo magnético**. En el vacío estos campos están relacionados:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad \mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

- Una carga móvil en la presencia de un campo eléctrico y un campo magnético experimenta la llamada fuerza de Lorentz:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
- Consideramos la fuerza magnética sobre un circuito que transporta corriente.

$$\mathbf{F} = I \int_C \mathbf{dl} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Un campo magnético **uniforme** en una región del espacio donde se halle una **espira** (circuito cerrado) no genera fuerza neta sobre ella, pero genera una **cupla**, que tiende a hacer girar la espira de manera de alinear su normal con el campo aplicado:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad \text{donde} \quad \mathbf{m} = I_0 S \hat{\mathbf{n}} \quad \text{es el momento magnético de la espira.}$$

Esto lleva a definir una **energía potencial de rotación** de una espira en un campo magnético:  $U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$

- Se introduce el **efecto Hall**, asociado a la fuerza magnética sobre los portadores de carga en un conductor y se presentan algunas aplicaciones tecnológicas, como caracterización de semiconductores, medidores de campo magnético (gaussímetros) y dispositivos de sensado (Hall switches) que se utilizan en la industria.
- Se presenta la expresión clásica de **Biot-Savart**, que da el campo de inducción magnética creado por una distribución de corriente:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv' \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{dl}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

Se dan ejemplos de cálculo del campo de inducción magnética creado por diversos circuitos: hilo infinito, espira circular, bobinas de Helmholtz, solenoide.

- El campo de inducción magnética puede determinarse a partir de sus fuentes, representadas por la divergencia y el rotor.

Se halla que la divergencia del campo de inducción magnética es nula, lo que indica que no hay fuentes escalares para este campo y que las líneas de campo son cerradas. Por otra parte, el rotor es proporcional a la densidad de corriente punto a punto, que es la fuente vectorial del campo. Esta relación es la llamada **ley de Ampère**:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

y en forma integral:  $\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$      $\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_S$

Como el campo  $\mathbf{B}$  es solenoidal, siempre se puede expresar como el rotor de otro

campo vectorial que llamamos **potencial vectorial magnético**:  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$

Las ecuaciones que permiten calcular el potencial vectorial a partir de las fuentes son:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dv' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l}'}{R}$$

El potencial vectorial magnético es de mayor utilidad cuando el efecto magnético es causado por corrientes eléctricas. Se demuestra que cumple una ecuación diferencial vectorial de Poisson:  $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$  por lo que los métodos matemáticos y numéricos de la teoría del potencial son también aplicables al cálculo del potencial vectorial.

Para puntos de un recinto donde no hay corrientes, el rotor de  $\mathbf{B}$  se anula, y entonces se puede expresar al campo como el gradiente de un campo escalar que llamamos **potencial escalar magnético**:

$$\text{si } \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \Psi_m(\mathbf{r})$$

El potencial escalar es de mayor utilidad cuando el efecto magnético es creado por cuerpos magnetizados.

- Así como el dipolo eléctrico modeliza la polarización de las unidades elementales que forman un cuerpo dieléctrico extenso, en el magnetismo de materiales es útil el **dipolo magnético**, que es una pequeña espira de corriente. Es de interés el campo lejano que crea este elemento.

Se realiza el cálculo a través del potencial vectorial:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$

o a partir del potencial escalar:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

Estos cálculos dan dos modelos alternativos para el análisis de los **materiales magnetizados**. Para calcular el campo de inducción magnética creado por un material magnetizado se divide al material en elementos de volumen infinitesimales, a cada uno de los cuales se les adjudica un momento dipolar magnético. De aquí surge la noción del **campo de magnetización** del material:

$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \frac{d\mathbf{m}}{dv'} \Big|_{\mathbf{r}'}$

Ahora se pueden seguir dos caminos alternativos: a partir del potencial vectorial o a partir del potencial escalar creado por cada elemento de volumen, para luego aplicar superposición.

- A partir del **potencial vectorial** se obtiene:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv'$

y se demuestra que el material magnetizado genera un campo idéntico al generado por distribuciones equivalentes de corrientes volumétricas y superficiales llamadas **corrientes de magnetización**:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{R} dv' + \int_S \frac{\mathbf{j}_{M_s}(\mathbf{r}')}{R} ds' \right]$$

con  $\mathbf{j}_M(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad \mathbf{j}_{M_s}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}$

- A partir del **potencial escalar** se obtiene:  $\Psi_m(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}}{R^3} dv'$

y se encuentra que el material magnetizado genera un campo matemáticamente

idéntico al campo eléctrico generado por distribuciones equivalentes de cargas volumétricas y superficiales llamadas **cargas de magnetización**:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

con:

$$\rho_m(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad \sigma_m(\mathbf{r}') = \epsilon_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

- En general, las fuentes del campo de inducción magnética son las corrientes eléctricas y los materiales magnetizados, que pueden representarse por las corrientes equivalentes de magnetización, de manera que aparecen corrientes de ambos tipos en la ley de Ampère:  $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_m(\mathbf{r})]$

Es posible definir el **campo magnético**, cuyas fuentes son las corrientes reales. De aquí surge la forma general de la ley de Ampère:  $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$

donde:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})/\mu_0 - \mathbf{M}(\mathbf{r})$

Existe relación entre el campo magnético y el campo de magnetización dentro de un material. Esta relación lleva a definir la susceptibilidad magnética y la **permeabilidad** de un material magnético:  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r})$   $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$

con  $\mu = \mu_0 [1 + \chi_m]$

- El campo magnético cumple **condiciones de frontera** al cruzar la interfase entre dos medios de distintas permeabilidades:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 & \Rightarrow B_{n_1} = B_{n_2} & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) & \Rightarrow H_{t_1} - H_{t_2} = j_s & \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s \end{aligned}$$

- Las nociones de autoinductancia e inductancia mutua son esenciales en la utilización de los fenómenos magnéticos en circuitos. Se deducen las fórmulas de Neumann que dejan ver claramente la forma geométrica de estos parámetros.

$$L = \frac{d\Phi_m}{dI} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{R} \quad \text{con: } \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{m_1}}{dI_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R_{12}} = M_{21} \quad \text{con: } \mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

**APENDICE 4 – Propiedades del campo B**

A partir de la ley de Biot-Savart y propiedades del análisis vectorial podemos hallar la divergencia y el rotor de **B** creado por corrientes estacionarias:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv' \quad \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$$

donde  $V$  es un recinto del espacio arbitrario pero que contiene a todas las fuentes de campo, es decir, las corrientes. Por lo tanto, se puede elegir un recinto donde  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  se anule sobre su superficie frontera  $S$ . Luego:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv' \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \right) dv'$$

donde hemos usado el hecho de la independencia de las operaciones de divergencia (opera sobre coordenadas de punto campo) y de integración (opera sobre coordenadas de punto fuente).

Además (ver las identidades vectoriales del Capítulo 1):  $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

Tomando: 
$$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ \mathbf{G} = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla \left( \frac{1}{R} \right) \end{cases} \Rightarrow \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot (\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) + \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \left( \nabla \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) = 0$$

El primer término es cero porque  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  no depende de las coordenadas campo y el segundo se anula por ser el rotor de un gradiente. Finalmente, entonces:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

Procedemos de forma similar para calcular el rotor:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv' \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \right) dv'$$

Usamos la identidad vectorial:  $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$

Aquí, por ejemplo:  $(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} = \left( G_x \frac{\partial}{\partial x} + G_y \frac{\partial}{\partial y} + G_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{F}$  es un campo vectorial.

Usando las mismas identificaciones que en el caso anterior nos queda:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ -\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') - (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') - (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] dv'$$

El segundo y tercer término del integrando se anulan porque implica derivar  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  respecto de coordenadas de punto campo. El primer término se puede escribir en función de la delta de Dirac (ver Capítulo 1):

$$\int_V \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') dv' = -4\pi \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Nos queda así: 
$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla') \frac{\mathbf{R}}{R^3} dv'$$

donde hemos pasado de  $\nabla \rightarrow -\nabla'$  en el integrando. Para calcular esta integral observamos que,

por ejemplo, la componente  $x$  del integrando:  $[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'] \frac{(x-x')}{R^3}$  se puede integrar por partes:

$$[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'] \frac{(x-x')}{R^3} = \nabla' \cdot \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{(x-x')}{R^3} \right] - \frac{(x-x')}{R^3} \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \nabla' \cdot \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{(x-x')}{R^3} \right]$$

ya que  $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$  porque tratamos con corrientes estacionarias. La integral de esta componente queda así:

$$\int_V (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla') \frac{\mathbf{R}}{R^3} \Big|_x dv' = \int_V \nabla' \cdot \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{(x-x')}{R^3} \right] dv' = \oint_S \frac{(x-x')}{R^3} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} ds' = 0$$

Esta integral se anula porque el vector densidad de corriente se anula por hipótesis sobre  $S$ . Lo mismo ocurre con las otras componentes de la integral original y finalmente nos queda:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

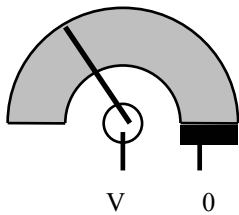
## PROBLEMAS

- 3.1) Un conductor de cobre AWG#12 tiene un diámetro de  $0.205 \text{ cm}$ . Si su longitud es de  $15.24 \text{ m}$  y conduce una corriente de  $20 \text{ A}$ , determine:  
 a) la densidad de corriente que circula, b) el campo eléctrico en el cable, c) la caída de tensión entre sus extremos y d) la resistencia del mismo.  $\sigma_{\text{Cu}} = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$

[Respuesta:  $R \approx 7.95 \times 10^{-2} \Omega$ ]

- 3.2) Determine la resistencia eléctrica asociada a las siguientes configuraciones sabiendo que el material entre los electrodos tiene una conductividad  $\sigma$ :  
 a) Resistor de placas paralelas de área  $A$  y separación  $d$ . b) Resistor cilíndrico de radio interno  $a$ , externo  $b$  y longitud  $L$ . Considere la resistencia “radial” y la “longitudinal”, c) Resistor esférico de radios interno  $a$  y externo  $b$ .

- 3.3) Se desea construir un potenciómetro de pista semicircular de carbón ( $\sigma = 7.14 \times 10^4 \text{ mho}^{-1}$ ) de  $1 \text{ mm}$  de espesor según indica la figura. Calcule el potencial, el campo eléctrico y la densidad de corriente en todo punto de la pista. Determine que radios interno y externo debe tener dicha pista para que la resistencia máxima sea de  $1 \text{ M}\Omega$  con un área de  $60 \text{ mm}^2$ .



Sugerencia: pruebe con un potencial de la forma  $V(\varphi) = a\varphi + b$ .

- 3.4) Para una espira circular de radio  $R$  orientada según el eje  $z$  por la que circula una corriente  $I$ , calcular: a) el campo de inducción  $\mathbf{B}$  en el eje de simetría. b) el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  en dicho eje. ¿Puede obtener  $\mathbf{B}$  a partir de ese  $\mathbf{A}$ ?
- 3.5) En un conductor cilíndrico de  $1 \text{ mm}$  de diámetro fluye una corriente de  $2 \text{ A}$  uniformemente distribuida. Hallar y graficar el campo  $\mathbf{B}$  dentro y fuera del conductor. ¿Cómo se modifica el problema si ahora la misma corriente circula con una distribución del tipo  $A r^2$  ( $A$  es una constante que debe hallarse y  $r$  es la distancia al eje del cilindro)?
- 3.6) Un conductor rectilíneo de longitud muy grande lleva una corriente  $I$ . A una distancia  $d$  se coloca una pequeña espira de radio  $a$  ( $d \gg a$ ) por la que circula la corriente  $i$ . Si el plano de la espira forma un ángulo  $\theta$  con el conductor rectilíneo, determinar a) el flujo magnético concatenado por la espira y b) el par que actúa sobre ella.
- 3.7) Calcule el potencial vectorial magnético creado en todo el espacio por un solenoide muy largo de radio  $R$  por el que circula una corriente superficial  $K_0 \varphi$ .
- 3.8) Para una esfera de radio  $R$  magnetizada uniformemente según  $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{z}$ , calcule las corrientes equivalentes de magnetización. En base a estas corrientes, ¿cómo imagina las líneas de campo  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  dentro y fuera de la esfera?
- 3.9) Determine el campo  $\mathbf{B}$  en el eje de un cilindro circular magnetizado uniformemente. El cilindro tiene radio  $R$ , longitud  $L$  y magnetización axial  $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{z}$ . Calcule el campo en el centro del imán para el caso  $R = 5 \text{ cm}$ ,  $L = 12 \text{ cm}$  y magnetización axial  $130 \text{ A/cm z}$ .

[Rta:  $12.55 \text{ mT z}$ ]

- 3.10) Calcular, a partir de la energía, la autoinductancia externa por unidad de longitud de una línea de transmisión coaxial de radios interno  $a$  y externo  $b$ .

[Rta:  $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$ ]

3.11) Una bobina toroidal de  $N$  vueltas tiene un radio central igual a  $R$  y el radio de su sección circular es  $a$ . Demostrar que  $L = \mu_0 N^2 \left( R - \sqrt{R^2 - a^2} \right)$ .

3.12) Despreciando todo efecto de borde, determine cuantas vueltas se necesitan para que un solenoide de  $30 \text{ cm}$  de longitud y  $4 \text{ cm}$  de diámetro, tenga una inductancia de  $10 \text{ mH}$ . El medio dentro del solenoide es aire.

[Rta:  $1380$  vueltas]

3.13) Considere un conjunto de  $N_a = 200$  espiras de radio  $R_a = 1 \text{ cm}$  separadas de otro conjunto de espiras por una distancia  $d = 5 \text{ cm}$  con  $N_b = 100$  espiras de radio  $R_b = 0.1 \text{ cm}$ . El eje de las espiras es común. Calcule de manera aproximada el coeficiente de inducción mutua.

3.14) Se tiene una espira circular de radio  $a$ , resistencia  $R$  y coeficiente de autoinducción  $L$  perpendicular a un campo magnético uniforme. Si el campo se apaga exponencialmente con un tiempo característico  $\tau$ , calcular la corriente  $I(t)$  inducida en la espira.

$$\left[ \text{Rta : } I(t) = \frac{\pi a^2 B_0}{R\tau - L} \left( e^{-t/\tau} - e^{-Rt/L} \right) \right]$$

3.15) Determine los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  y las corrientes de magnetización para los siguientes casos: a) Una corriente volumétrica uniformemente distribuida  $J_0 \hat{z}$  en un cilindro de radio  $R$  y permeabilidad  $\mu$  limitada por el espacio libre. b) Una lámina de corriente  $K_0 \hat{z}$  ubicada entre dos placas de espesor  $d/2$ , permeabilidad  $\mu$  y rodeada por espacio libre.