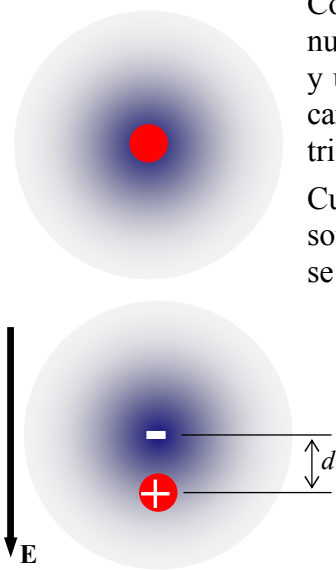


## 2 - Campos Cuasi-Estáticos 1 (cont.)

### Campo Electroestático en medios materiales.

#### Polarización

Hasta aquí hemos analizado el campo electrostático creado por distribuciones de cargas puntuales o en conductores. Estas cargas son **libres** ya que en presencia de un campo se pueden mover prácticamente sin restricciones. Sin embargo, en los dieléctricos existe carga **ligada**, que está sujeta por importantes fuerzas de cohesión a la red cristalina y frente a un campo eléctrico su movilidad es muy limitada.



Consideremos el caso más simple de un átomo hidrogenoide que, desde nuestro punto de vista, puede representarse como un núcleo de carga  $+e$  y un electrón de carga  $-e$ . En estado normal, los centros de masa de las cargas positiva y negativa coinciden, y el átomo no genera campo eléctrico apreciable.

Cuando se coloca el átomo en presencia de un campo externo sus cargas son atraídas en sentidos opuestos y tienden a separarse. Esta separación se ve contrarrestada por las fuerzas de cohesión atómica y finalmente se llega a una situación de equilibrio con una distancia  $d$  entre los centros de masa de ambas cargas. El átomo ahora produce un campo eléctrico, que se denomina **inducido**. El fenómeno de la separación (limitada) de carga se denomina **polarización** del material y el átomo se convierte en un **dipolo**. La polarización aumenta (en general no proporcionalmente) con la intensidad del campo exterior. Si el campo sigue aumentando, llega un momento en que las fuerzas de cohesión no pueden mantener juntas las cargas y el átomo se ioniza por desprendimiento de electrones. Estos

electrones "cuasi-libres" se aceleran en presencia del campo, constituyendo una corriente eléctrica. Esta corriente puede ser muy intensa y destructiva, ya que en presencia de campos intensos los electrones se aceleran a energías muy altas y pueden experimentar una colisión con un elemento neutro, arrancando más electrones, lo que lleva a un **efecto de avalancha**. Este fenómeno se conoce como **ruptura dieléctrica**, y depende fundamentalmente del tipo y estado del material, que tolera un campo máximo antes de la ruptura. Ya hemos visto el caso del aire, donde los campos de las líneas de alta tensión pueden producir ruptura dieléctrica. Las nubes cargadas eléctricamente producen ruptura dieléctrica en el aire cuyos efectos visibles son los rayos.

#### Ruptura dieléctrica

El **campo de ruptura**  $E_r$  es la intensidad de campo eléctrico que hace que un material aislador (o dieléctrico) se convierta en conductor. A menudo la ruptura dieléctrica es seguida por la circulación de una corriente eléctrica (de miliamperes a millones de amperes, según las circunstancias) a través de la recientemente formada región conductora. Si la conducción se produce en un gas ionizado (**plasma**) esta conducción posterior a la ruptura se conoce como **arco** o **chispa**.

A continuación se presentan algunas características de la ruptura dieléctrica en distintos casos de interés en la ingeniería de alta tensión.

**Gases** ( $E_r < 25 \text{ MV/m}$ ) El aire atmosférico es el material gaseoso dieléctrico más usado. Otros gases de uso común en ingeniería de alta tensión son el dióxido de carbono, el nitrógeno y el hexafluoruro de azufre. El oxígeno en el aire y el fluor en el azufre del hexafluoruro son importantes porque atrapan fácilmente electrones libres, que son los agentes que inician una ruptura

dieléctrica. Los materiales gaseosos pueden repararse por sí mismos luego de un evento de ruptura dieléctrica. Esto significa que el material puede recuperar sus propiedades aislantes. Esta habilidad se ve disminuida por la presencia de contaminantes, que pudieron haberse formado en un evento previo de ruptura o por exposición a humedad u otras sustancias.

**Líquidos** ( $E_r < 100 \text{ MV/m}$ ) Los líquidos proveen refrigeración además de aislación eléctrica, como en el caso del aceite de los transformadores de potencia. Como los gases, los líquidos se pueden recuperar pero la influencia de los contaminantes es en ellos generalmente mayor que en los gases. Se ha usado agua deionizada y una gran variedad de aceites orgánicos y minerales como dieléctricos líquidos en sistemas de alta tensión. También se usan las propiedades dieléctricas de alimentos líquidos en la pasteurización por campos pulsados y en los hornos de microondas. El agua deionizada se usa por su gran permitividad (alrededor de 80) mientras que los aceites tienen permitividades menores (alrededor de 3). El aceite de castor es un aceite dieléctrico muy popular. En el pasado se usaron aceite con compuestos de la familia de los bifenilos policlorados (polychlorinated biphenyls - PCB's), por su propiedad de líquido resistente al fuego, pero se ha encontrado que son muy tóxicos y no biodegradables, por lo que existen regulaciones muy estrictas que prohíben el uso de PCB en instalaciones eléctricas.

**Sólidos** ( $E_r < 200 \text{ MV/m}$ ) Las rupturas superficiales pueden ser autorrecuperables, pero en muchas ocasiones se produce un daño permanente en forma de carbonización u oxidación de canales en la superficie que constituyen caminos de baja impedancia. La ruptura en el seno de un material sólido es habitualmente destructiva. Un dieléctrico sólido muy usado es resina epoxi depositada en estado líquido bajo condiciones de vacío para impedir la formación de burbujas (donde el campo eléctrico es mayor que en el dieléctrico, facilitando la ruptura), que se deja endurecer antes de someterse a tensión.

La ruptura dieléctrica es generalmente una situación no deseada que puede generar daños y problemas de inmensa magnitud económica. Por ello es de máxima importancia el correcto diseño de los aisladores, separadores y sistemas de descarga a tierra en las instalaciones eléctricas, dado que, además del peligro de destrucción de la instalación y/o dispositivos y aparatos conectados a ella existe el peligro de incendio y la formación de reacciones químicas tóxicas o contaminantes.

La siguiente tabla presenta los campos de ruptura de algunas sustancias:

Sustancia	$E_r \text{ (MV/m)}$	Sustancia	$E_r \text{ (MV/m)}$
Aire (a presión atmosférica)	3	vidrio (placa)	30
aceite mineral	15	Parafina	30
papel impregnado	15	cuarzo fundido	30
Poliestireno	20	mica	200
Bakelita	25		

El archivo **INSULATE.PDF** presenta una lista de dieléctricos usados en la ingeniería eléctrica.

### Efecto Corona

Muchos efectos de interés tecnológico están ligados a la ruptura dieléctrica del aire u otros gases debido a campos entre cuerpos conductores. Hay cuatro tipos de descarga gaseosa: descarga luminiscente, corona, chispas y arcos. Estas descargas se dan tanto en CC como en CA.

Un **arco** se produce a bajas tensiones y altas corrientes (la soldadura de arco emplea fuentes de alrededor de 10 V y 10 kA) generando un alto calentamiento. La **chispa** ocurre en el caso inverso, es decir, altas tensiones y bajas corrientes, como en algunos casos de ESD. Un caso que no cae fácilmente dentro de esta clasificación es el rayo, donde la tensión y la corriente son ambas grandes. La **descarga luminiscente** se produce en situaciones de alta presión (o muy alto campo) cuando los electrones reciben suficiente energía para emitir radiación luminosa en sus choques con átomos o moléculas del gas en el que se hallan.

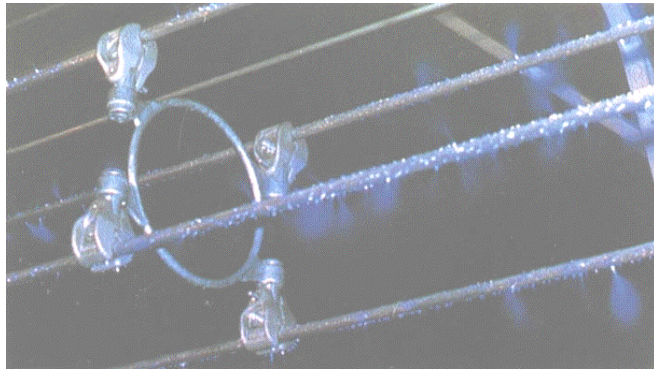
La **corona** es una descarga incipiente, que se produce cuando hay una ruptura dieléctrica localizada debido a un campo que supera sólo **localmente** al campo de ruptura del gas. El resto de la

región presenta campos que no superan el valor crítico y no se produce entonces un arco o chispa. En la literatura se habla de **descargas parciales**. La **descarga** y la **luminiscencia** son variantes inestables, y tienen forma de corona (de donde quizás surgió el nombre del efecto) cuando el fenómeno se produce en una punta. El valor del campo al cual comienza a observarse el fenómeno (luminiscencia, interferencia de RF, ruido audible) se denomina **campo de inyección**. La presencia sobre la superficie de los conductores de pequeñas protuberancias, como gotas de agua, copos de nieve, insectos o los bordes levantados de los hilos o hebras en un cable multifilar producen fuertes campos locales que pueden superar el campo de inyección aún cuando en la mayor parte de la superficie del conductor el campo sea menor.

En el aire este campo depende de la rugosidad de la superficie conductora y de las condiciones de presión y temperatura del aire:

- Para alambres o cables debe multiplicarse por un **factor de rugosidad**:
  - = 1 para alambres pulidos;
  - = 0.98 a 0.93 para alambres rugosos, sucios o gastados;
  - = 0.87 a 0.83 para cables.
- El valor del campo debe multiplicarse por el **factor de densidad del aire**:
 
$$\delta \approx 3.92 p/T$$
 donde  $p$  es la presión en  $cm\ Hg$  y  $T$  la temperatura en  $K$ .

El efecto corona en sistemas de potencia produce **pérdidas de energía** debido a la energía que el



campo cede a los iones y electrones en movimiento, genera **ruido audible** e **interferencia**, especialmente en señales de radios de AM y TV de aire. En la figura se muestran algunos puntos de corona luminiscente sobre los cables de un haz de alta tensión. Las pérdidas aumentan con la frecuencia del campo, de manera que son mayores para armónicas o transitorios en la línea.

Cuando el campo aumenta lo suficiente para producir el salto de la chispa o el arco,

habitualmente la corona precede a la chispa. Esto también ocurre en la caída de rayos. El efecto corona también crea iones en las cercanías de las instalaciones y estos iones tienen efectos **térmicos**, **corrosivos** y **oxidativos** sobre los materiales de las instalaciones, efectos que pueden llegar a deteriorar la capacidad de aislación de los materiales produciendo defectos más importantes.

Por otra parte, el efecto corona tiene aplicaciones industriales:

- Dispositivos generadores de ozono utilizados por sus efectos bactericida, fungicida y oxidativo en limpieza de aire, agua, instrumentos quirúrgicos, preservación de alimentos, etc.
- Precipitadores electrostáticos (ESP) para remover partículas de polvo o materiales no deseados del ambiente en sistemas de control de polución, etc.
- Tratamiento de recubrimientos plásticos o de papel para modificar las propiedades de rugosidad y triboeléctricas, tratamientos para impresión, mejora de adherencia de polímeros, etc.
- Se han publicado trabajos donde imágenes de la luminiscencia se usan para medir voltajes en dispositivos de alta tensión<sup>1</sup>.

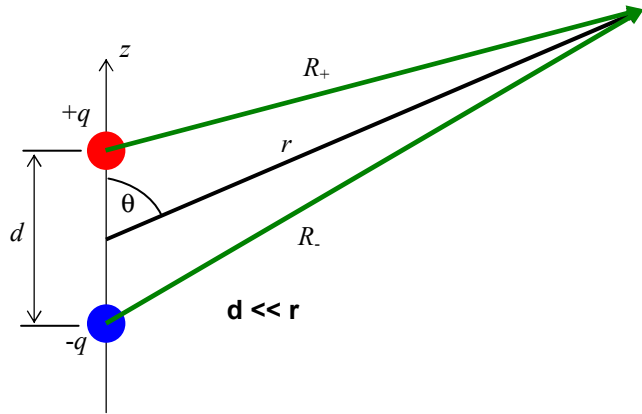
<sup>1</sup> "Developments in High Voltage Measurement Techniques and a Novel Corona Assessment Method", D.L.Hickery & P.J.Moore, 35th Universities Power Engineering Conference, 2000.

"HVAC Measurements by Corona Analysis", D.L.Hickery & P.J.Moore, 36th Universities Power Engineering Conference, 2001.

"High-speed Imaging of AC Corona for Voltage Measurement", D.L.Hickery & P.J.Moore, International Symposium of High Voltage Engineering, 2001.

**Dipolo eléctrico. Potencial y campo lejanos**

Antes de llegar a estas situaciones a veces catastróficas, los materiales dieléctricos se polarizan. Un material polarizado genera un campo eléctrico inducido. Vamos a analizar brevemente la descripción de este fenómeno. Para ello vamos a usar un modelo en donde las unidades elementales polarizables del material (átomos, moléculas, etc.) se consideran **dipolos**, es decir, una dupla de cargas puntuales de igual magnitud de carga pero signo opuesto, separadas en una distancia que en la práctica es muy pequeña frente a la distancia al punto de observación.



El potencial creado en un punto  $\mathbf{r}$  lejano ( $r \gg d$ ) por el dipolo de la figura es:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_-} \quad \text{con:}$$

$$R_+ \cong r - \frac{d}{2} \cos\theta \quad R_- \cong r + \frac{d}{2} \cos\theta$$

Desarrollando por Taylor:

$$\frac{1}{R_{\pm}} \cong \frac{1}{r \mp \frac{d}{2} \cos\theta} \cong \frac{1}{r} \left[ 1 \pm \frac{d \cos\theta}{2r} + O\left(\frac{d^2}{r^2}\right) \right]$$

de donde:

$$\Phi(\mathbf{r}) \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 + \frac{d \cos\theta}{2r} - 1 + \frac{d \cos\theta}{2r} \right] = \frac{qd \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

y finalmente:

$$\Phi(\mathbf{r}) \cong \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \cong \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

donde:  $\mathbf{p} = qd \hat{\mathbf{z}}$  es el llamado **momento dipolar** del dipolo, un vector que va desde la carga negativa a la positiva.

El siguiente ejemplo presenta el llamado **desarrollo multipolar** del potencial, que muestra que una distribución arbitraria de carga se puede pensar como la superposición de una carga puntual (la carga neta), un dipolo elemental, un cuadrupolo elemental, etc., situados en el origen de coordenadas.

**Ejemplo 2-18:** Analizar el potencial creado por una distribución arbitraria de carga a grandes distancias.

Supongamos una distribución arbitraria de carga  $\rho(\mathbf{r}')$  en un recinto  $V$ . El potencial electrostático que genera es:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dv' \quad \text{con} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}}$$

Para  $r \gg r'$  es posible desarrollar en serie de Taylor el factor  $1/R$  del integrando:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r\sqrt{1+x}} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \dots \right] \quad \text{con} \quad x = -2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}$$

Luego, manteniendo hasta el término cuadrático solamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r\sqrt{1+x}} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} - \frac{r'^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \left( -2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^2 - \dots \right] \\ &\approx \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} - \frac{r'^2}{2r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^2} + \dots \right] = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

y entonces:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dv' \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left[ 1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) + \dots \right] dv' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots\end{aligned}$$

con:

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dv'$$

la **carga total o carga neta** de la distribución

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv'$$

el **momento dipolar** de la distribución

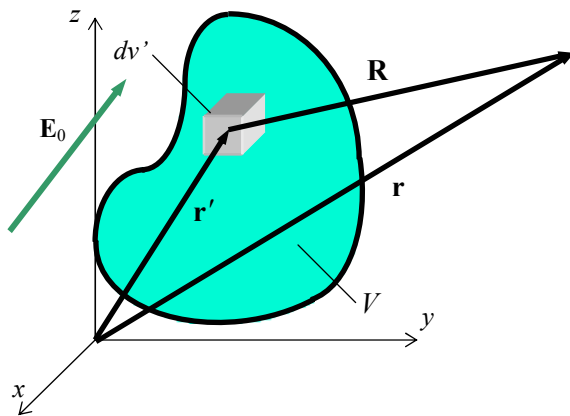
$$\tau = \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{2} \left( \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) dv'$$

el **momento cuadrupolar** de la distribución

y hay más términos de orden superior. Se ve entonces que el potencial se puede expresar como la suma de los llamados términos multipolares, cada uno de los sucesivos con menos peso en la suma. Sin embargo, si el cuerpo es neutro ( $Q = 0$ ) comienzan a tener relevancia los sucesivos términos de este desarrollo multipolar.

---

**Potencial inducido. Vector Polarización**



Cuando un cuerpo dieléctrico se coloca en una región del espacio donde haya campo eléctrico, sus unidades elementales (átomos moléculas, etc.) se polarizan, generando un campo inducido. Podemos analizar este fenómeno dividiendo el cuerpo en elementos de volumen infinitesimales y adjudicando a cada uno un momento dipolar elemental  $dv' \rightarrow dp$ .

Este momento dipolar crea un potencial lejano:

$$d\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} dv' \quad \text{donde:}$$

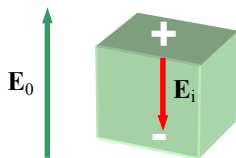
$$\mathbf{R} = R \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad \text{y hemos definido el vector polarización : } \mathbf{P}(\mathbf{r}') = \left. \frac{d\mathbf{p}}{dv'} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}$$

Ahora aplicamos superposición para sumar los potenciales creados por todos los elementos de volumen del cuerpo:

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv'$$

Este es el potencial inducido creado por el cuerpo polarizado. A partir de él podemos calcular el campo inducido  $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_i(\mathbf{r})$  y el campo total:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_0(\mathbf{r}).$$



Como se ilustra en la figura, la polarización crea un campo inducido que se opone al campo original, de modo que dentro del material el proceso lleva a que el campo total es **menor** que el original. La expresión del potencial inducido puede reescribirse viendo que:

$$\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \Rightarrow \Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) dv'$$

Además:  $\mathbf{F} \cdot \nabla f = \nabla \cdot (f\mathbf{F}) - f \nabla \cdot \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'(1/R) = \nabla' \cdot [\mathbf{P}(\mathbf{r}')/R] - \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')/R$

(las derivadas se realizan sobre las coordenadas primadas). Tenemos así:

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[ \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \right] dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia para reescribir la primera integral.

Esta última expresión es equivalente a:

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

que es el potencial que crearía una hipotética distribución de carga **libre** con densidades volumétrica  $\rho_P(\mathbf{r}')$  y superficial  $\sigma_P(\mathbf{r}')$ .

**Por lo tanto podemos resolver el problema del potencial inducido por un cuerpo polarizado reemplazando al cuerpo por una distribución equivalente de carga libre, para la cual valen las consecuencias de la ley de Coulomb y la electrostática de cargas libres.**

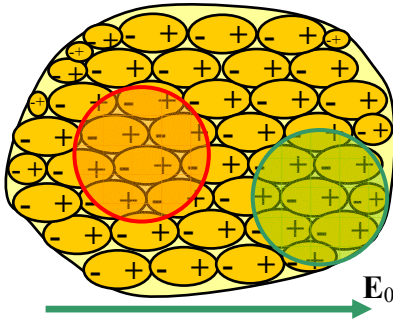
Por otra parte, se observa que la llamada **densidad de carga equivalente de polarización superficial**  $\sigma_P(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}$  es la proyección del vector polarización sobre la superficie frontera del cuerpo polarizado y la **densidad de carga equivalente de polarización volumétrica**

$\rho_P(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')$  está ligada con las inhomogeneidades en la polarización en el seno del material, representada por la divergencia del vector de polarización.

### ¿Cuál es la realidad de estas cargas?

Desde un punto de vista formal, podemos considerar a las cargas de polarización como un conveniente artificio destinado al cálculo: se reemplaza el cuerpo polarizado por una distribución de carga real que da el mismo campo.

En la figura ilustramos la polarización de un cuerpo dieléctrico. Se forman (u orientan) dipolos en la dirección del campo aplicado. Se observa que se produce un exceso de carga negativa sobre el lado izquierdo y un exceso de carga positiva sobre el lado derecho. Esta redistribución de la carga ligada está asociada a las cargas superficiales de polarización. Por otra parte, si elegimos un recinto en el seno del material, podemos ver que en casos (el círculo rojo) la densidad neta de carga encerrada es cero, mientras que en otros casos (el círculo verde) la densidad neta de carga encerrada no es cero porque hay inhomogeneidades, simbolizadas por dipolos de menor tamaño. Esta densidad de carga está asociada a las cargas volumétricas de polarización, y la no homogeneidad en la distribución de carga genera líneas de campo.



### Forma general de la ley de Gauss. Vector desplazamiento

La ley de Gauss proporciona la relación local entre el campo eléctrico y sus fuentes. Hasta el momento, las únicas fuentes de campo eléctrico eran las distribuciones de carga libre, pero ahora hemos agregado la contribución del campo inducido por material polarizado, que podemos representar por las cargas equivalentes de polarización. Tenemos entonces que debemos agregar a las fuentes del campo descriptas por la ley de Gauss esta contribución:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l(\mathbf{r}) + \rho_P(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Pero como:  $\rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$  podemos escribir:  $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$

y entonces:  $\nabla \cdot [\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})] = \rho_l(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_l(\mathbf{r}) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_l$

que es la **forma general de la ley de Gauss**, donde:  $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$

es el llamado **vector desplazamiento**. Se observa que **las fuentes del vector desplazamiento son las cargas libres**. Esto facilita el cálculo del campo en situaciones donde hay simultáneamente distribuciones de carga libre y dieléctricos polarizados.

La polarización de un material depende del campo exterior, y a su vez crea un campo inducido que se superpone al campo exterior. Existe entonces una ligazón entre estos campos, y en particular entre el vector polarización y el campo total (que es la cantidad mensurable).

En **dieléctricos lineales** (que son los materiales de mayor interés tecnológico) vale la relación:  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$  donde la cantidad  $\chi$  es la llamada **susceptibilidad dieléctrica** del material. La cantidad  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 (1 + \chi)$  se denomina **permitividad** o **constante dieléctrica** del material, y el parámetro adimensional  $\epsilon_r$  es la **permitividad relativa**.

Cuanto mayor es la permitividad del material, más fuertemente se polariza y son mayores los efectos eléctricos. Presentamos a continuación una tabla de permitividades relativas de distintas sustancias de uso en la técnica:

Sustancia	$\epsilon_r$	Sustancia	$\epsilon_r$
Aire (a presión atmosférica)	1.0006	vidrio con borosilicato	4
PVC expandido	1.1	Cuarzo	5
polifoam	1.1	bakelita	5
n-hexano	1.9	mica rubí	5.4
parafina	2.1	PVC sólido	6.1
tetracloruro de carbono	2.2	neoprene	7
teflón	2.1	mármol	8
polietileno	2.2	silicio	12
madera prensada	2.2	etanol (alcohol etílico)	24
madera seca	2.4	metanol (alcohol metílico)	33
poliestireno	2.7	nitrobenzeno	35
plexiglas	3.4	glicerina	50
suelo arenoso seco	3.4	hielo	75
sílice (dióxido de silicio)	3.8	agua pura	80

Existen materiales que presentan **polarización espontánea**, en ausencia de campo eléctrico exterior. Estos materiales se caracterizan por su red cristalina que presenta enlaces fuertemente iónicos. En estos materiales existen regiones permanentemente polarizadas (dominios eléctricos) que pueden orientarse mediante un campo aplicado y luego permanecer en esa orientación por la interacción con otros dominios adyacentes. Se trata de materiales ferroeléctricos. Su comportamiento es similar al de los imanes y tienen permitividades muy elevadas (por ejemplo, el titanato de bario es una sal natural con  $\epsilon_r \geq 2100$ . Hay cerámicos artificiales de desarrollo reciente con permitividades aún más altas).y presentan histéresis entre el vector polarización y el campo aplicado. Algunos materiales, llamados **electretos**, presentan una polarización permanente desde su fabricación, a partir de ceras o resinas que se colocan líquidas en un campo eléctrico logrando la orientación de las moléculas. Al enfriar el material queda polarizado en forma más o menos permanente. Se utilizan para fabricar dispositivos con propiedades anisótropas o direccionales.

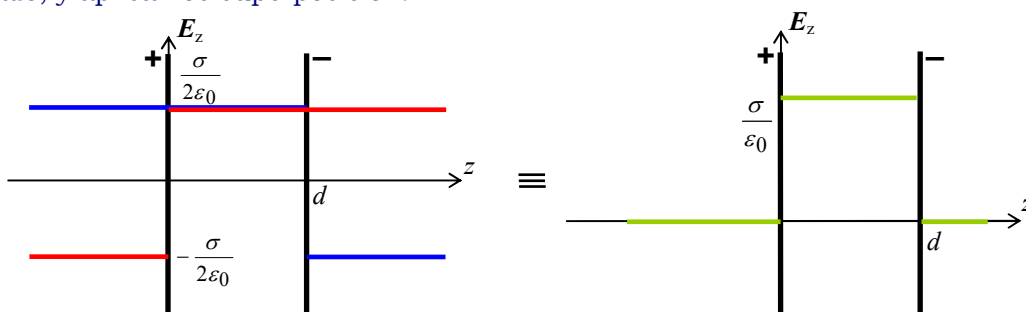
Otros efectos de polarización que se utilizan en la técnica son:

- **electrostricción**: cambio de tamaño del cuerpo debido a la fuerza entre los elementos polarizados,
- **piezoelectricidad**: efecto electrostrictivo reversible. Una modificación en las dimensiones del cuerpo produce un campo eléctrico y una ddp mensurables .
- **pirelectricidad**: polarización inducida por enfriamiento o calentamiento del cuerpo.

A continuación se presentan algunos simples ejemplos de cálculo del campo electrostático a partir de la ley de Gauss en sistemas con dieléctricos.

**Ejemplo 2-19:** Hallar el campo creado por dos planos conductores infinitos cargados respectivamente con densidades de carga  $+\sigma$  y  $-\sigma$ , paralelos entre sí y separados una distancia  $d$  si: a) hay aire b) hay un dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r = 16$  entre ellos.

a) Usamos el resultado del **Ejemplo 2-6**, donde se halló el campo creado por un único plano cargado, y aplicamos superposición:



Se ve que el campo se anula fuera de la estructura y es uniforme dentro de ella.

b) Cuando se coloca un dieléctrico entre los planos conductores, cambia el campo dentro del material, pero no el vector desplazamiento porque está ligado únicamente a las cargas li-



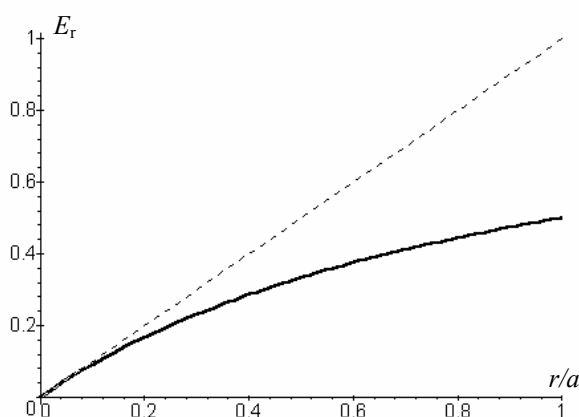
bres. Aplicando la ley de Gauss a un cilindro con tapas paralelas a los planos, una tapa en la región donde no hay campo y la otra donde sí lo hay, se halla que:  $D_z = \sigma \Rightarrow E_z = \sigma / \epsilon$   
El campo dentro del material es ahora 16 veces **menor** que en el caso en que no había dieléctrico.

**Ejemplo 2-20:** Una esfera está cargada uniformemente y tiene una permitividad variable con el radio:  $\epsilon_r = 1 + r/a$  donde  $a$  es el radio de la esfera. Hallar el campo eléctrico en todo el espacio y las cargas equivalentes de polarización.

Este problema es similar al del **Ejemplo 2-7**. Fuera de la esfera el campo sólo depende de la carga total:  $E(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r^2 \quad r \geq a$

Dentro de la esfera, aplicando en la misma forma la ley de Gauss, tenemos que:

$$D(r)4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \Rightarrow D(r) = \frac{\rho_0 r}{3} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0(1+r/a)} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3(1+r/a)} \quad r \leq a$$



En la gráfica se muestra el campo en el interior de la esfera cuando hay vacío (línea de rayas) y cuando el material es el dieléctrico del enunciado (línea llena). Se ve nuevamente que la presencia del dieléctrico disminuye el campo en su interior.

Para calcular las cargas de polarización hallamos el vector **P**:

$$\mathbf{P} = \chi\epsilon_0\mathbf{E} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mathbf{E} \quad \text{de donde:}$$

$$P_r = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \frac{\rho_0 r}{3\epsilon} = \frac{\rho_0 r^2}{3(a+r)}$$

Sobre la superficie de la esfera se induce una **carga superficial equivalente de**

**polarización:**  $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P_r|_{r=a} = \frac{\rho_0 a}{6} \Rightarrow Q_{p_s} = 4\pi a^2 \sigma_p = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{6} \Rightarrow Q_{p_s} = \frac{Q}{2}$

Se ve además que la presencia de la carga superficial de polarización está asociada a un salto en el campo eléctrico al atravesar la superficie de la esfera:

$$\Delta E = E_e|_{r=a} - E_i|_{r=a} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2} = \epsilon_0 \sigma_p$$

Es posible que exista densidad volumétrica de carga equivalente de polarización porque la polarización no es homogénea (esta es condición necesaria, pero no suficiente):

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho_0 r^4}{3(a+r)} \right) = -\frac{\rho_0}{3r^2} \frac{r^3(4a+3r)}{(a+r)^2} = -\frac{\rho_0}{3} \frac{r(4a+3r)}{(a+r)^2}$$

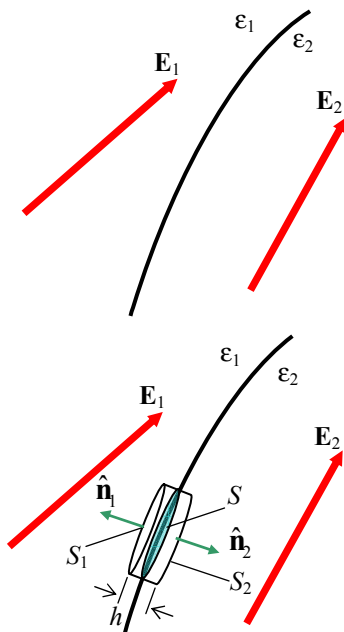
La carga total de polarización en el volumen de la esfera es:

$$Q_{p_v} = \int_V \rho_p dv = -\frac{\rho_0}{3} 4\pi \int_0^a \frac{r(4a+3r)}{(a+r)^2} r^2 dr = -\frac{\rho_0}{3} 4\pi \frac{a^3}{2} \Rightarrow Q_{p_v} = -\frac{Q}{2}$$

Se ve que las cargas de polarización se equilibran dentro de la esfera.

**Condiciones de frontera del campo eléctrico**

Cuando existe una superficie interfase entre dos regiones de propiedades dieléctricas diferentes, la aplicación de las leyes del campo eléctrico llevan a que se establezcan relaciones entre las componentes de los campos a través de la interfase. Estas relaciones surgen de las propiedades fundamentales del campo electrostático.



En la figura se esquematiza la situación. Una superficie interfase separa dos medios de permitividades diferentes. En cada medio hay un campo eléctrico, y en general son diferentes. Para obtener la relación entre ambos campos eléctricos aplicamos las propiedades del campo.

Primero usamos la divergencia de **E** a través de la ley de Gauss:

$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_l$  donde  $S$  es la superficie del cilindro de la figura de la derecha y  $Q_l$  es la carga libre encerrada por el cilindro. Este cilindro tiene una altura  $h$  muy pequeña, y una de sus tapas está en el medio 1 y la otra en el medio 2. Suponemos además que la superficie de las tapas es lo suficientemente pequeña para que el tramo de superficie interfase encerrada por el cilindro ( $S$ ) se pueda suponer plana. La integral de superficie puede escribirse entonces como:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS + \int_{S_{lat}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_l$$

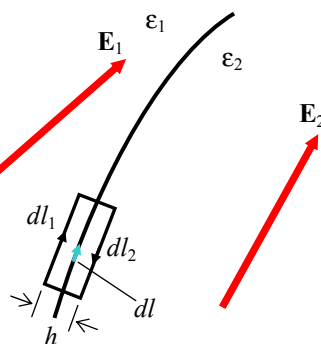
Si ahora tomamos el límite de esta expresión para  $h \rightarrow 0$ , la integral sobre la superficie lateral se anula porque la superficie misma se anula, las dos superficies tapas tienden a la superficie encerrada  $S$  y, tomando convencionalmente el versor normal a la interfase desde el medio 1 al medio 2, tenemos que:  $\mathbf{n}_1 \rightarrow -\mathbf{n}$   $\mathbf{n}_2 \rightarrow \mathbf{n}$  y queda:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS + \int_{S_{lat}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \rightarrow -\int_S \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

de donde:  $\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \rightarrow \int_S (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_l = \int_S \rho_s dS \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_s$

donde  $\rho_s$  es la **densidad de carga libre superficial** que existe en la interfase. La relación obtenida vale punto a punto sobre la interfase e involucra las componentes **normales** a la interfase de los vectores desplazamiento. Si no hay carga libre superficial sobre la interfase, las componentes normales del vector desplazamiento se conservan al cruzar la interfase (en general no se conservan las componentes normales del campo eléctrico, ya que las permitividades de los medios son diferentes).

Ahora utilizamos el rotor de **E**. Sabemos que el campo es irrotacional y entonces:  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ .



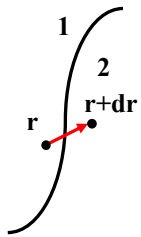
En la figura de la izquierda se toma una curva de circulación que es un rectángulo de altura  $h$ , una de cuyas bases está en el medio 1 y la otra en el medio 2. Tenemos entonces:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_{lat}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

donde la última integral se extiende a los dos lados laterales (cortos) del rectángulo. Si ahora nuevamente tomamos  $h \rightarrow 0$ , la tercera integral se anula porque el intervalo de integración se anula y además:  $d\mathbf{l}_1 \rightarrow -d\mathbf{l}$   $d\mathbf{l}_2 \rightarrow d\mathbf{l}$ .

Entonces:  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow -\int_l \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_l \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = \int_l (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\mathbf{l} = 0$

La relación obtenida vale punto a punto sobre la interfase e implica que las componentes **tangenciales** a la interfase del vector campo eléctrico se conservan. Podemos escribir las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  en la forma:  $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}}$ .



El potencial electrostático cumple también una condición de frontera sobre la interfase. Como  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ , la circulación a lo largo de un camino infinitesimal que una dos puntos a ambos lados de la interfase es proporcional al trabajo de transportar una carga de prueba a través de la interfase. Como este trabajo es infinitesimal, el potencial electrostático es continuo al cruzar la interfase<sup>2</sup>:

$$\int_r^{r+dr} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \Phi_1 - \Phi_2 \rightarrow 0 \quad \text{para } dr \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$$

Finalmente, podemos decir que las propiedades matemáticas del campo electrostático llevan a las siguientes condiciones de borde o condiciones de contorno al cruzar la interfase entre dos medios de permitividades diferentes:

$\Phi_1 = \Phi_2$   
 $\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = Q_l \Rightarrow (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_l$   
 $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0$

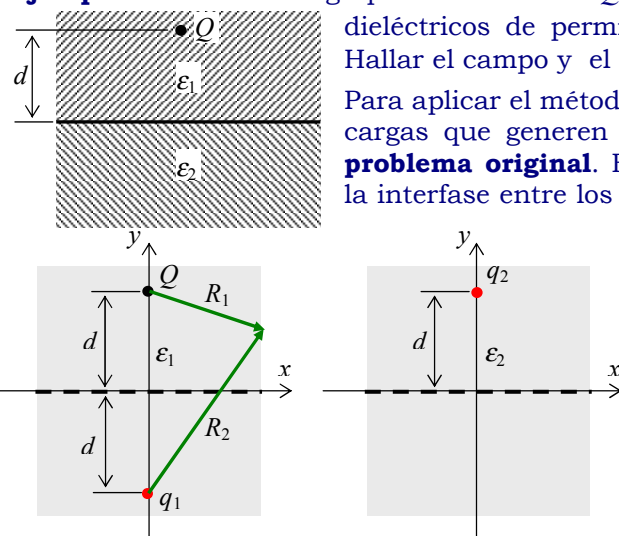
**Al cruzar la superficie que separa dos medios de propiedades distintas:**

- se conserva el potencial electrostático
- se conserva la componente tangencial del campo electrostático (siempre)
- se conserva la componente normal del vector desplazamiento, salvo que exista una distribución superficial de carga libre sobre la interfase.

### Imágenes dieléctricas

El método de imágenes puede utilizarse en el caso de superficies de separación entre dieléctricos de alta simetría, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2-21:** Una carga puntual de valor  $Q$  se halla frente a una interfase plana entre dos dieléctricos de permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , como se indica en la figura. Hallar el campo y el potencial en todo el espacio.



Para aplicar el método de imágenes debemos encontrar el conjunto de cargas que generen **las mismas condiciones de contorno que el problema original**. En este caso, las condiciones de contorno sobre la interfase entre los dos dieléctricos son la continuidad de la componente tangencial del vector  $\mathbf{E}$  y de la componente normal del vector  $\mathbf{D}$  al cruzar la interfase. Surge que se puede cumplir estas dos condiciones reemplazando el problema por la superposición de dos configuraciones:

- a) dos cargas, la real  $Q$  y una imagen  $q_1$  sumergidas en un medio de permitividad  $\epsilon_1$  que da el campo en el medio superior, y
- b) una carga imagen  $q_2$  situada en la posición de la carga real, sumergida en un medio de permitividad  $\epsilon_2$  que da el campo en

<sup>2</sup> Salvo cuando existe una doble capa o capa de dipolos sobre la interfase, caso en el cual el potencial tiene un salto de  $\tau/\epsilon_0$ , donde  $\tau$  es el momento dipolar por unidad de área sobre la interfase. Ver, por ejemplo, "Electromagnetic Theory", J.A. Stratton, McGraw-Hill, New York, 1941, pp.188-192.

el medio inferior:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{Q}{R_1} + \frac{q_1}{R_2} \right) \quad z \geq 0$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2}{R_1} \quad z \leq 0$$

donde  $R_{1,2} = |\mathbf{R}_{1,2}| = |x\hat{\mathbf{x}} + (y \mp d)\hat{\mathbf{y}}|$

de donde tenemos el campo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{Q\mathbf{R}_1}{R_1^3} + \frac{q_1\mathbf{R}_2}{R_2^3} \right) \quad z \geq 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2\mathbf{R}_1}{R_1^3} \quad z \leq 0$$

Las condiciones de contorno nos permiten calcular los valores de las cargas  $q_1$  y  $q_2$ :

$$y = 0 \Rightarrow R_{1,2} = |\mathbf{R}_{1,2}| = |x\hat{\mathbf{x}} \mp d\hat{\mathbf{y}}| \Rightarrow R_{1,2} = R = \sqrt{x^2 + d^2}$$

$$E_{1x} = E_{2x} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{Qx}{R^3} + \frac{q_1x}{R^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2x}{R^3} \Rightarrow Q + q_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} q_2$$

$$D_{1x} = D_{2x} \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{Qd}{R^3} + \frac{q_1d}{R^3} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{q_2d}{R^3} \Rightarrow -Q + q_1 = -q_2$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene:

$$q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q \quad q_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q$$

Se observa que si  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  (único medio),  $q_1 = 0$  y  $q_2 = Q$ , con lo que el potencial y el campo tienen una única expresión en todo el espacio. También se observa que el signo de la carga  $q_1$  depende de la relación de permitividades entre los medios.

---

**Capacidad de conductores**

La capacidad de un cuerpo conductor es una medida de la facilidad que tiene para acumular carga eléctrica.

**La capacidad se define como el cociente entre la carga neta acumulada en el conductor y el potencial al que se halla:  $C = Q/\Phi$**

La capacidad de algunos cuerpos de geometrías simples es:

**Esfera:**  $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 a$

**Cilindro:**  $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Rightarrow \Phi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln(a) \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(a)}$

Muchas veces se tiene más de un conductor. Como las distribuciones de carga sobre un conductor ejercen influencia sobre los otros, es necesario considerar esta influencia mutua para hallar los potenciales y campos en todo el espacio. Un caso particular de interés es el **capacitor**, que es un sistema de dos conductores cargados con  $Q$  y  $(-Q)$ . Definimos la **capacidad de un capacitor** como:  $C = Q/\Delta\Phi$  donde  $\Delta\Phi$  es la ddp entre los dos conductores.

**En general, la capacidad entre dos cuerpos cargados es:**  $C = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$

**donde S es la superficie de uno cualquiera de los cuerpos que se suponen cargados con cargas iguales y de signo opuesto.**

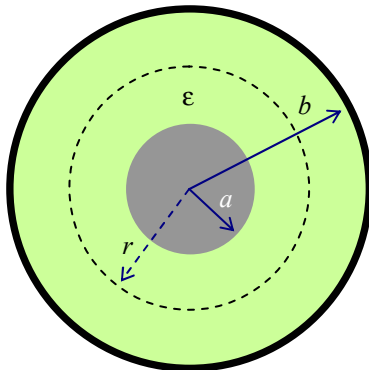
**La capacidad depende únicamente de la geometría de los conductores.**

**Ejemplo 2-21:** Capacitor plano. La configuración del **Ejemplo 2-19**, consistente de dos planos conductores cargados con  $+\sigma$  y  $-\sigma$  respectivamente, es un capacitor plano. Como se trata de distribuciones de carga no acotadas en el espacio, vamos a calcular la capacidad por área  $A$  de los planos. Como el campo es:  $E = \sigma/\epsilon$  (uniforme), las integrales que definen la capaci-

dad son:  $\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \sigma A \quad \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\sigma d}{\epsilon} \Rightarrow C = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\epsilon A}{d}$

Se observa que la capacidad es proporcional a la permittividad del dieléctrico. **Este es un resultado general.**

**Ejemplo 2-22:** Calcular la capacidad de un cable coaxial



Consideremos que el conductor interior, de radio  $a$ , se halla cargado con una densidad lineal uniforme  $\lambda$  y el conductor exterior, de radio  $b$ , se halla cargado con  $-\lambda$ . Entre ambos conductores hay un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ .

Para calcular el campo, dada la simetría cilíndrica del problema, podemos tomar superficies gaussianas cilíndricas coaxiales con el cable de longitud  $l$ . Para un radio  $\rho$  intermedio:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \lambda l \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda \hat{\rho}}{2\pi\epsilon\rho}$$

Para aplicar la definición de capacidad debemos calcular la circulación del campo entre ambos conductores:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \frac{\lambda \hat{\rho} \cdot d\mathbf{r}}{2\pi\epsilon\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

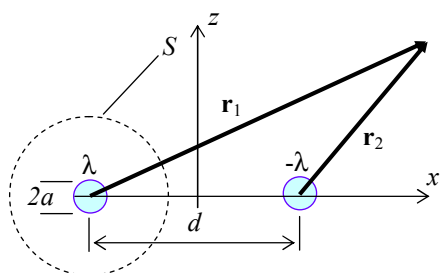
Luego:

$$C = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln(b/a)} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(b/a)}$$

La **capacidad por unidad de longitud** del cable coaxil es entonces:  $\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$

**Ejemplo 2-23:** Calcular la capacidad de un cable bifilar.

Esta es una configuración de dos hilos conductores rectos y paralelos. Si suponemos que el radio de los cables es mucho menor que su separación, podemos despreciar la influencia mutua entre los conductores y considerar que la distribución de carga en ellos es uniforme. El campo creado por los dos conductores es el mismo del **Ejemplo 2-16**:



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} \right)$$

El flujo a través de la superficie cilíndrica  $S$  cualquiera que rodea al alambre izquierdo es  $\lambda L$ . La circulación del campo es más sencilla sobre la recta que une ambos conductores. Tomando el sistema de coordenadas de la figura tenemos:

$$\Delta\Phi = \int_{-d/2+a}^{d/2-a} E_x dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_{-d/2+a}^{d/2-a} \left( \frac{1}{x+d/2} - \frac{1}{x-d/2} \right) dx = \frac{\lambda d}{2\pi\epsilon} \int_{-d/2+a}^{d/2-a} \frac{dx}{x-d^2/4} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

y finalmente:

$$C = \frac{\lambda l}{\Delta\Phi} \frac{\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} \approx \frac{\pi\epsilon l}{\ln(d/a)} \Rightarrow \frac{C}{l} \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln(d/a)}$$

donde hemos simplificado porque  $d \gg a$ .

**Coefficientes de potencial y de capacidad.**

Cuando existe un conjunto de conductores cargados a distancias no muy grandes entre sí, la distribución de carga y el potencial de cada uno depende de todos los otros debido a la redistribución de carga producida por la inducción electrostática. No es posible entonces usar la superposición de los potenciales creados por cada conductor individual sino que para analizar esta situación se deben utilizar los llamados **coeficientes de potencial**, que vamos a introducir.

Sean  $N$  conductores,  $i = 1, 2, \dots, N$ . El potencial electrostático que crean en un punto cualquiera del espacio es:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \frac{\sigma_i(\mathbf{r}')}{R_i} ds' \quad \text{donde} \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_i$$

En particular, el potencial del conductor  $j$ -ésimo del conjunto será:

$$\Phi_j = \Phi(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \frac{\sigma_i(\mathbf{r}')}{R_{ij}} ds'$$

Supongamos inicialmente que todos los conductores están descargados, salvo el  $i$ -ésimo. Entonces:

$$\Phi_j^{(i)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_i} \frac{\sigma_i(\mathbf{r}')}{R_{ij}} ds' \quad \text{es el potencial del conductor } j\text{-ésimo debido}$$

**únicamente** a la carga en el  $i$ -ésimo conductor.

Si modificamos ahora la carga de este conductor  $Q_j \rightarrow \lambda Q_j$  ( $\sigma_i \rightarrow \lambda\sigma_i$ ) se observa de la correspondiente ecuación que  $\Phi_j^{(i)} \rightarrow \lambda\Phi_j^{(i)}$ , es decir, hay una relación lineal entre la carga y el potencial que esa carga crea. Podemos escribir entonces:  $\Phi_j^{(i)} = P_{ij}Q_i$  donde  $P_{ij}$  es un factor de pro-

porcionalidad que depende de la geometría de la disposición de los dos conductores.

Si ahora damos carga a los otros conductores, podemos calcular el potencial del  $j$ -ésimo por superposición:

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^N P_{ij} Q_i$$

Los coeficientes  $\{P_{ij}\}$  de esta suma son los llamados **coeficientes de potencial** del conjunto de conductores.

Este es un sistema de ecuaciones lineales que puede expresarse en forma matricial:

$\Phi = [P] Q$  donde  $\Phi = [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \dots \Phi]^T$  y  $Q = [Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_N]^T$  son los vectores de potenciales y cargas sobre los conductores y  $[P]$  es la matriz de los coeficientes  $P_{ij}$ .

**Los coeficientes de potencial satisfacen varias propiedades:**

1.  $P_{ij} > 0$  (todos los coeficientes son positivos)
2.  $P_{ij} = P_{ji}$  (la matriz  $P$  es simétrica);
3.  $P_{ii} > P_{ij}$  (la matriz  $P$  es diagonal-dominante);

Estas propiedades se demuestran en el **Apéndice 3**.

La ecuación matricial  $\Phi = [P]Q$  puede invertirse para expresar las cargas de los conductores en función de sus potenciales:

$$Q = [P]^{-1} \Phi = [C] \Phi$$

donde los coeficientes diagonales  $C_{ii}$  de la matriz  $[C]$  se conocen como **coeficientes de capacidad** y los no diagonales  $C_{ij}$  ( $i \neq j$ ) **coeficientes de inducción**. Todos estos coeficientes tienen dimensiones de capacidad.

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j$$

**Los coeficientes de capacidad tienen propiedades que se deducen de las de los coeficientes de potencial:**

1.  $C_{ii} > 0$  (los coeficientes de capacidad son positivos);
2.  $C_{ii} \leq 0$  (los coeficientes de inducción son no positivos);
3.  $C_{ij} = C_{ji}$  (la matriz  $C$  es simétrica).

En términos de los coeficientes de capacidad y/o potencial, la capacidad entre dos conductores puede hallarse a partir de las ecuaciones lineales con  $Q_1 = Q$ ,  $Q_2 = -Q$ :

$$\Phi_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2 = (P_{11} - P_{12}) Q$$

$$\Phi_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2 = (P_{21} - P_{22}) Q$$

de donde:  $\Delta \Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = (P_{11} - P_{12} - P_{21} + P_{22}) Q = Q / C$

y finalmente:  $C = (P_{11} - 2P_{12} + P_{22})^{-1}$

Como:

$$[P] = [C]^{-1}$$

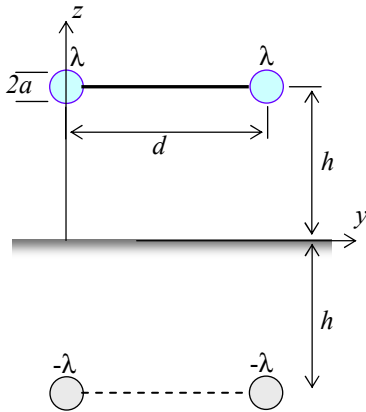
$$P_{11} = \frac{C_{22}}{\Delta} \quad P_{12} = -\frac{C_{12}}{\Delta} \quad P_{22} = \frac{C_{11}}{\Delta} \quad \text{con} \quad \Delta = C_{11} C_{22} - C_{12}^2$$

y se tiene:  $C = \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}} = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$

Los coeficientes de capacidad se utilizan para determinar la capacidad de cada par en sistemas de múltiples conductores y para hallar capacidades parásitas.

**Ejemplo 2-24:** Determinar el potencial creado por dos líneas horizontales de radio  $a$ , paralelas y conectadas entre sí que se encuentran a una altura  $h$  sobre tierra y separadas en  $d$ .

Cada línea tendrá una imagen especular respecto del plano de tierra. Como la distancia  $d$  entre conductores puede ser pequeña y dar lugar a redistribución de carga, debemos aplicar la noción de coeficientes de potencial. Para calcularlos cargamos sucesivamente cada línea por separado. Si cargamos solamente la primera línea (la de la izquierda), el potencial que crea es, a partir del resultado del **Ejemplo 2-16**:



$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right) \quad \text{con} \quad r_{1,1,2} = \sqrt{y^2 + (z \mp h)^2}$$

donde hemos tomado  $s \approx h$  (ya que  $h \gg a$ ) y el origen de coordenadas sobre el plano de tierra justo bajo la línea. El potencial sobre la línea  $y = 0, z = h - a$  es:

$$\Phi_{11} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h-a}{a}\right) \approx \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h}{a}\right) \Rightarrow P_{11} = \frac{\Phi_{11}}{\lambda_1} \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h}{a}\right)$$

El potencial sobre la otra línea  $y = d, z = h - a$  es:

$$\Phi_{21} = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d^2 + (2h-a)^2}{d^2 + a^2}\right) \approx \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d^2 + 4h^2}{d^2}\right) \quad \text{de donde:} \quad P_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\lambda_1} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d^2 + 4h^2}{d^2}\right)$$

Análogamente:  $P_{22} = P_{11}$  y además  $P_{12} = P_{21}$ .

Con esto podemos escribir el sistema lineal:

$$\begin{cases} \Phi_1 = P_{11}\lambda_1 + P_{12}\lambda_2 \\ \Phi_2 = P_{21}\lambda_1 + P_{22}\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{P_{22}\Phi_1 - P_{12}\Phi_2}{\Delta} \\ \lambda_2 = \frac{-P_{21}\Phi_1 + P_{11}\Phi_2}{\Delta} \end{cases} \quad \text{con} \quad \Delta = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}$$

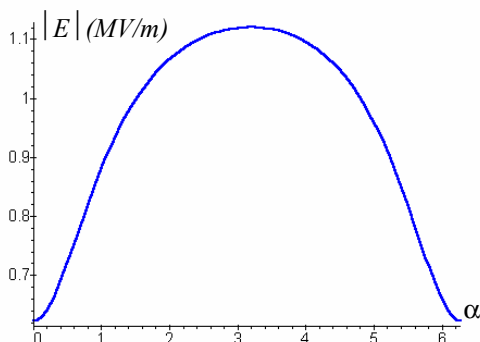
y entonces, como  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ :

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{P_{11} - P_{12}}{P_{11}^2 - P_{12}^2} \Phi = \frac{\Phi}{P_{11} + P_{12}} \approx \frac{\Phi}{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h}{a}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d^2 + 4h^2}{d^2}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 \Phi}{\ln\left(\frac{4h^2(d^2 + 4h^2)}{a^2 d^2}\right)}$$

Realizamos el cálculo para la línea del **Ejemplo 2-16** ( $\Phi_0 = 512 \text{ kV}, h = 12 \text{ m}$ ) y tomamos  $d = 20 \text{ cm}$ , con lo que se obtiene  $\lambda \approx 2.6 \mu\text{C}/\text{m}$ , valor que podemos comparar con la densidad de carga con un solo conductor, hallada en el **Ejemplo 2-16**:  $\lambda_0 \approx 4.61 \mu\text{C}/\text{m}$ . **Vemos que la densidad de carga se ha reducido en más del 40%**. Esto lleva a un menor valor de campo sobre la superficie de los conductores. El campo creado por los dos conductores es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{r}_{11}}{r_{11}^2} - \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^2} + \frac{\mathbf{r}_{22}}{r_{22}^2} - \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^2} \right) \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \mathbf{r}_{11,12} = y \hat{\mathbf{y}} + (z \mp h) \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{r}_{22,21} = (y-d) \hat{\mathbf{y}} + (z \mp h) \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

El primer subíndice indica el par línea-imagen (1 = izquierda, 2 = derecha) y el segundo el conductor dentro del par (1 = línea real, 2 = línea imagen). Sobre la superficie del conductor de la izquierda, por ejemplo:  $y = a \cos \alpha \quad z = h + a \sin \alpha$ .



Ploteamos el módulo del campo. Se observa que el máximo se da para  $\alpha = \pi$ , y el cálculo da el valor

$$\text{máximo:} \quad |E|_{\text{max}} \approx 1.12 \times 10^6 \text{ V/m}$$

que debemos comparar con el obtenido para un único conductor (**Ejemplo 2-16**):

$$|E|_{\text{max}} \approx 1.67 \times 10^6 \text{ V/m}$$

Disminuye aún más el campo máximo superficial si se conectan más conductores. Es común tener tres o cuatro en línea horizontal o en forma de cuadro, como en la foto del **Ejemplo 2-17**.

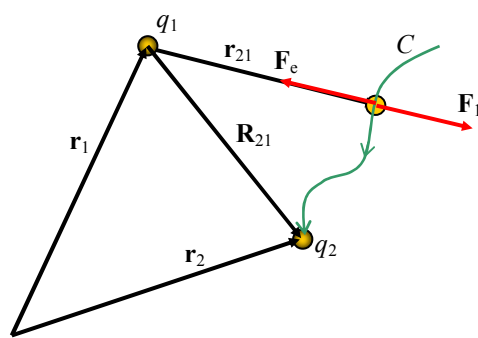


### Energía electrostática

Si colocamos una carga de prueba en una región del espacio donde exista campo eléctrico, aparece sobre ella una fuerza que hará que adquiera una aceleración, lo que implica el incremento de la energía cinética de la carga. Si extrapolamos la **conservación de la energía mecánica** a interacciones no mecánicas como las eléctricas, es necesario que la energía que recibió la carga haya sido cedida por otro sistema físico. En la situación que estamos describiendo el otro sistema físico existente es el conjunto de cargas que crea el campo eléctrico o el campo mismo.

Se puede analizar el campo eléctrico desde el punto de vista energético considerando que, debido a las fuerzas de repulsión entre cargas de igual signo, es necesario realizar un trabajo exterior para "construir" un sistema físico formado por un conjunto de cargas separadas por distancias finitas. Este trabajo realizado sobre el sistema "permanece" en él como energía potencial. Si se deja libradas a sí mismas a las cargas del sistema, se alejarán unas de otras adquiriendo energía cinética hasta separarse indefinidamente. Toda la energía potencial del sistema se ha convertido entonces en energía de movimiento.

El trabajo necesario para crear un sistema de cargas se calcula trayendo una a una desde el infinito hasta su posición final en forma "cuasi-estática", es decir, a velocidad constante. Consideremos un sistema de  $N$  cargas puntuales  $q_i$  situadas en las posiciones  $\mathbf{r}_i$ . Originalmente consideramos a las cargas situadas en el infinito y separadas entre sí distancias infinitas. No hay entonces interacciones eléctricas mensurables entre las cargas. Este es el estado de energía nula. Construimos ahora el sistema trayendo a las cargas una a una desde el infinito a su posición final.



Primero traemos la carga  $q_1$ . Como las otras cargas están infinitamente alejadas, no ejercen fuerzas de interacción sobre  $q_1$  y no se requiere trabajo alguno para llevarla a su posición final:  $q_1 : \infty \rightarrow \mathbf{r}_1 \Rightarrow L_1 = 0$

Ahora traemos a  $q_2$  desde el infinito hasta su posición final  $\mathbf{r}_2$  a lo largo de la curva  $C$ . Como ahora aparece sobre  $q_2$  la fuerza ejercida por  $q_1$ , para que el traslado sea "cuasi-estático" (a velocidad constante), debemos agregar punto a punto de la trayectoria una fuerza exterior  $\mathbf{F}_e$  que equilibre a la fuerza  $\mathbf{F}_1$  ejercida por  $q_1$ . Por lo tanto realizamos un trabajo:

$$L_2 = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r}_2 = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = -q_2 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = -q_2 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \right] \cdot d\mathbf{r}_2 = -\frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \cdot d\mathbf{r}_2$$

donde  $\mathbf{r}_{21}$  es el vector distancia entre una posición intermedia cualquiera sobre  $C$  de  $q_2$  y la posición de  $q_1$ . Pero:

$$\int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \cdot d\mathbf{r}_2 = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \nabla \left( \frac{1}{r_{21}} \right) \cdot d\mathbf{r}_2 = -\frac{1}{R_{21}} = -\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

en función de las posiciones finales de las cargas. Entonces:

$$L_2 = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r}_2 = -\frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \cdot d\mathbf{r}_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{21}}$$

Cuando traemos la tercer carga  $q_3$  debemos realizar trabajo en contra de las fuerzas eléctricas ejercidas por  $q_1$  y  $q_2$ :

$$L_3 = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r}_3 = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \cdot d\mathbf{r}_3 = -q_3 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{r}_3 = -q_3 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} \right] \cdot d\mathbf{r}_3$$

y finalmente:

$$L_3 = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r}_3 = -q_3 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} \right] \cdot d\mathbf{r}_3 = \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{31}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{32}}$$

En general, cuando traemos la carga  $i$ -ésima, debemos realizar trabajo en contra de las fuerzas

eléctricas ejercidas por las (i-1) cargas anteriores:

$$L_i = \int_{\infty}^{r_i} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}$$

Una vez construido el sistema, su energía es la suma de todos los trabajos parciales realizados en la operación de construcción:

$$U = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}$$

Esta doble sumatoria puede reescribirse notando que los elementos  $u_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}$  cumplen que

$j < i$ . Así, por ejemplo, tenemos  $u_{31}$  pero no tenemos  $u_{13}$ . Sin embargo, si existiera, se ve que sería  $u_{13} = u_{31}$ . Entonces podemos escribir la segunda sumatoria entre  $j = 1$  y  $j = N$ , lo que implica tomar dos veces el elemento  $u_{ij}$ , por lo que debemos dividir por dos, con lo que queda:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}$$

donde se ha cuidado de no tomar el elemento  $u_{ii}$ , que no existe. Operando:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i$$

donde  $\Phi_i$  es el potencial electrostático en el punto  $\mathbf{r}_i$  donde se halla la carga  $q_i$ .

Se puede extender esta definición a una distribución continua de carga. Para ello se "construye" la distribución trayendo desde el infinito a cada elemento de volumen (o de superficie, o de línea) la porción de carga que hay en él, o, alternativamente, aumentando paulatinamente la carga desde cero a su valor final en cada elemento en forma simultánea.

En cualquiera de ambos casos, el resultado es<sup>3</sup>:  $U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dv$

donde  $\rho(\mathbf{r})$  es la densidad de carga y  $\Phi(\mathbf{r})$  el potencial en puntos del interior del cuerpo cargado (habrá expresiones equivalentes para superficies o líneas cargadas). Si tenemos un **conjunto** de  $N$  cuerpos cargados podemos extender la expresión de la energía por superposición:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i(\mathbf{r}) \Phi_i(\mathbf{r}) dv$$

**Cuerpos conductores:** SI los cuerpos son conductores, el campo electrostático en su interior es cero, y el potencial sobre su superficie es constante, con lo que se llega a la misma expresión que en el caso de las cargas puntuales:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i$$

pero ahora el significado de los símbolos es diferente:

- $q_i$  es la carga acumulada en cada cuerpo conductor,
- $\Phi_i$  es el potencial de cada cuerpo conductor.

<sup>3</sup> La demostración de esta expresión puede verse en "Fundamentos de la teoría electromagnética", 4ta. Edición, J.R.Reitz, F.J.Milford, R.W.Christy. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1996, pág.143 y siguientes.

**Ejemplo 2-25:** Hallar la energía electrostática de una esfera de radio  $a$  cargada con carga  $Q$  distribuida uniformemente si a) es una esfera conductora (distribución superficial de carga), b) es una esfera dieléctrica de permitividad  $\epsilon$  (distribución volumétrica de carga).

a) Si la esfera es conductora, la energía almacenada es:  $U = Q\Phi/2$  donde  $Q$  es la carga almacenada y  $\Phi$  el potencial del conductor. Para una esfera conductora el campo y el potencial fuera de ella equivalen a los creados por una carga puntual en el centro de la esfera

(ver **Ejemplo 2-7**. Por lo tanto:  $\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q^2}{2C}$

donde  $C$  es la capacidad de la esfera conductora.

b) Si la esfera es dieléctrica, la carga está distribuida en todo su volumen, suponemos que uniformemente, y tenemos que (verificarlo):

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{3Q}{4\pi a^3} \Rightarrow \begin{cases} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{8\pi\epsilon a} \left[ \frac{2\epsilon}{\epsilon_0} + 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] & \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q r \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon a^3} & r \leq a \\ \Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq a \end{cases}$$

En este cálculo sólo nos interesa el potencial interior porque fuera de la esfera no hay carga y no hay contribución a la energía. Entonces:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dv = \frac{Q}{8\pi a} \int_0^a \frac{3Q}{4\pi a^3} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] 4\pi r^2 dr$$

$$U = \frac{3Q^2}{8\pi a^4} \int_0^a \left[ \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] r^2 dr = \frac{3Q^2}{8\pi a^4} \left[ \frac{a^3}{3\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \left( \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5} \right) \right]$$

y finalmente:  $U = \frac{3Q^2}{8\pi a^4} \left[ \frac{a^3}{3\epsilon_0} + \frac{a^3}{15\epsilon} \right] = \frac{Q^2}{8\pi a} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{5\epsilon} \right]$

Se ve que la energía almacenada en la esfera dieléctrica es mayor que para la esfera conductora.

### Energía y Campo

Podemos reescribir la expresión de la energía electrostática de un conjunto de cuerpos conductores en términos del campo electrostático de una forma conceptualmente conveniente aplicando la

ley de Gauss:  $\rho_i(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{D}_i(\mathbf{r}) \Rightarrow U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{D}_i(\mathbf{r}) V_i(\mathbf{r}) dv$

Pero:  $\Phi_i \vec{\nabla} \cdot \mathbf{D}_i = \vec{\nabla} \cdot (\Phi_i \mathbf{D}_i) - \mathbf{D}_i \cdot \vec{\nabla} \Phi_i = \vec{\nabla} \cdot (\Phi_i \mathbf{D}_i) + \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{E}_i$  y entonces:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} [\vec{\nabla} \cdot (\Phi_i \mathbf{D}_i) + \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{E}_i] dv = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \int_{V_i} \vec{\nabla} \cdot (\Phi_i \mathbf{D}_i) dv + \int_{V_i} \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{E}_i dv \right)$$

La primera integral se puede transformar mediante el teorema de la divergencia. Queda:

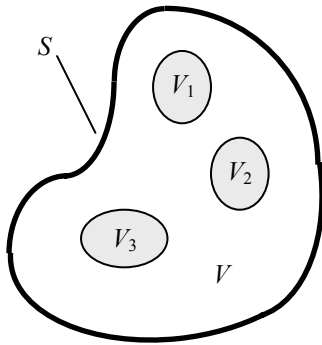
$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \int_{S_i} \Phi_i(\mathbf{r}) \mathbf{D}_i(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{V_i} \mathbf{D}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) dv \right)$$

La primera integral ahora se extiende sobre la superficie de los cuerpos cargados y la segunda a sus volúmenes.

La ecuación hallada expresa la energía del sistema de cargas **sólo en función del campo**. Aún

más, la ecuación original  $U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i(\mathbf{r}) \Phi_i(\mathbf{r}) dv$  se puede escribir como:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dv \quad \text{donde } V \text{ es un recinto cualquiera que incluye a todos los conductores}$$



(ver la figura). Estas expresiones son idénticas porque no existe densidad de carga fuera de los cuerpos cargados.

Por lo tanto podemos escribir, en forma general:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \Phi(\mathbf{r}) \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dv$$

donde  $S$  es la superficie frontera de  $V$ .

Consideremos ahora que  $S \rightarrow \infty$ , o sea que  $V$  abarca todo el espacio.

Como el potencial y el campo electrostáticos decrecen, respectivamente, como  $1/r$  y  $1/r^2$  para distancias lejanas, el integrando de la integral de superficie tiene a cero como  $1/r^3$  para  $r \rightarrow \infty$ , mientras que la superficie tiende a  $\infty$  como  $r^2$ . Por lo tanto en el límite esta primera integral se anula y tenemos:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dv$$

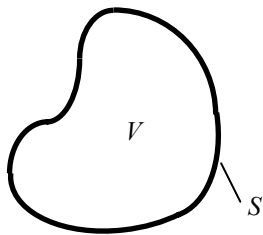
Este resultado es importante porque la energía se puede escribir como la suma de "energías" asociadas a cada elemento de volumen del espacio donde haya campo:

$$U = \int_{\text{todo el espacio}} u(\mathbf{r}) dv \quad \text{con} \quad u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$u(\mathbf{r})$  es entonces una **densidad de energía** electrostática.

**En esta visión la energía está distribuida en todo el espacio, mientras que en la ecuación original estaba concentrada en el sistema de cargas. Siguiendo entonces con el modelo local de campos que hemos introducido, vamos a asignarle al campo electrostático una energía, distribuida en todo el espacio donde exista campo, que puede intercambiarse localmente con otro sistema físico.**

Volvamos ahora a la expresión original:



$$U = \frac{1}{2} \int_S \Phi(\mathbf{r}) \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dv$$

levantando la condición de  $S \rightarrow \infty$ . Sabemos ya que la integral de volumen representa la energía asociada al campo **dentro** del recinto de integración  $V$ . Como hay campo fuera de  $V$ , entonces la integral de superficie representa la energía asociada al campo **fuera** de  $V$ . Es importante señalar que la influencia del campo exterior a  $V$  se puede expresar como una

integral de superficie sobre la frontera de  $V$ . Este es un caso particular de una propiedad más general de los campos que veremos en diversos casos.

**Ejemplo 2-26:** Repetir los cálculos del **Ejemplo 2-25** usando campos.

a) Esfera conductora. El campo es:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r \geq a \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad r < a$  Luego:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty E^2 4\pi r^2 dr = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

igual que antes.

b) Esfera dieléctrica. El campo es:

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r \geq a \quad \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{Qr\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon a^3} \quad r \leq a$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a E_i^2 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty E_e^2 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a \frac{Q^2 r^2}{16\pi^2 \epsilon^2 a^6} 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon a^6} \int_0^a r^4 dr + \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{40\pi \epsilon a} + \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 a} = \frac{Q^2}{8\pi a} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{5\epsilon} \right]
 \end{aligned}$$

y nuevamente tenemos el mismo resultado.

**Ejemplo 2-27:** Calcular la energía electrostática almacenada por unidad de longitud en un cable coaxil.

Usamos el campo calculado en el **Ejemplo 2-22**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda \hat{\rho}}{2\pi \epsilon \rho} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \, dv = \frac{\epsilon}{2} \int_{\text{todo el espacio}} E^2(\mathbf{r}) \, dv$$

Pero fuera del coaxil no hay campo, de modo que tenemos:

$$U = \frac{\epsilon}{2} \int_a^b \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \epsilon^2 \rho^2} 2\pi L \rho d\rho = \frac{\lambda^2 L}{4\pi \epsilon} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda^2 L}{4\pi \epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

y la energía almacenada por unidad de longitud es:  $\frac{U}{L} = \frac{\lambda^2}{4\pi \epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

### Energía y capacidad de un conductor

Un conductor cargado tiene la energía  $U = \frac{1}{2} Q \Phi$  donde  $Q$  es su carga y  $\Phi$  su potencial. Pero su capacidad es:  $C = Q/\Phi$  y se tiene:

$$U = \frac{1}{2} Q \Phi = \frac{1}{2} C \Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

(ver el **Ejemplo 2-25a**). Esta expresión también es válida para calcular la energía de un capacitor, siempre que el campo esté confinado a la región dentro del capacitor (es decir, que no exista campo disperso).

**Ejemplo 2-28:** Calcular la energía almacenada en:

- un capacitor plano de separación entre placas  $d$ ,
  - un cable coaxil de radios interior  $a$  y exterior  $b$ ,
  - un capacitor esférico de radios interior  $a$  y exterior  $b$ ,
- todos con dieléctrico de aire, a partir del campo y de la capacidad.

a) A partir del campo (ver **Ejemplo 2-19**):

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_c} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_c} E^2 \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_c} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \, dv = \frac{\sigma^2 V}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A}$$

donde  $A$  es el área de las placas. A partir de la capacidad (ver **Ejemplo 2-21**):

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2[\epsilon_0 A/d]} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A}$$

b) A partir del campo (ver **Ejemplo 2-22**):

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_c} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_c} E^2 \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 \rho^2} 2\pi L \rho d\rho = \frac{\lambda^2 L}{4\pi \epsilon_0} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda^2 L}{4\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

A partir de la capacidad:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\lambda^2 L^2}{2 \left[ \frac{2\pi \epsilon L}{\ln(b/a)} \right]} = \frac{\lambda^2 L}{4\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) A partir del campo:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{int}}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_{\text{int}}} E^2 \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} 4\pi r^2 \, dr = \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} 2\pi 2 \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

A partir de la capacidad: 
$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2 \left[ \frac{4\pi\epsilon_0}{1/a - 1/b} \right]} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

En estos ejemplos se calcula la energía asociada al campo confinado dentro del capacitor. En ambos casos habrá líneas de campo disperso en los bordes. Este campo tiene energía que no se considera en los cálculos precedentes. El error cometido depende fundamentalmente de la separación entre electrodos.

**Energía y coeficientes de potencial**

Cuando existen diversos conductores en el sistema (no necesariamente capacitores), la energía puede asociarse a los coeficientes de potencial o los coeficientes de capacidad/inducción del sistema que fueron definidos previamente.

Como: 
$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i \text{ y } \Phi_i = \sum_{j=1}^N P_{ji} q_j \text{ tenemos: } U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N P_{ij} q_i q_j$$

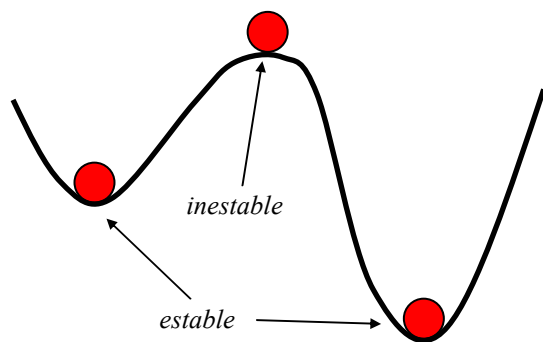
en términos de los **coeficientes de potencial** del conjunto de conductores (nótese que  $P_{ij} = P_{ji}$ ).

Como también: 
$$q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j \text{ tenemos: } U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N C_{ij} \Phi_i \Phi_j$$

a partir de los **coeficientes de inducción/capacidad**.

**Energía y fuerzas**

Un sistema físico lineal, librado a sí mismo, evoluciona hacia un estado de equilibrio. Este estado puede ser estable o inestable, según que el sistema vuelva o no a la posición estacionaria si sufre pequeñas desviaciones desde el extremo. Un móvil sobre la trayectoria de la izquierda, sometido únicamente a la gravedad, presenta tres puntos de equilibrio. Dos son mínimos (estables) y el tercero es un máximo (inestable).



Cuando el sistema evoluciona de un estado a otro, varía su energía, de manera que, por el principio de conservación, es necesario que se ejerza un trabajo sobre él.

Consideremos un desplazamiento elemental  $d\mathbf{r}$  en un sistema físico conservativo. Habrá en general un cambio de energía  $dU$ , asociado al trabajo de una fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada al sistema:  $dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

El signo menos indica que, si el trabajo de la fuerza es positivo, la energía del sistema disminuye, como se observa en la trayectoria de la figura con el trabajo de la fuerza peso, por ejemplo, al apartar al móvil desde su posición inestable. Supongamos que el desplazamiento está definido por la dirección del espacio  $\hat{\zeta}$ :  $d\mathbf{r} = d\zeta \hat{\zeta}$

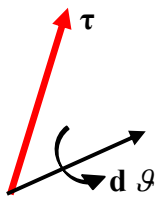
Entonces:  $dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F_{\zeta} d\zeta$  donde  $F_{\zeta}$  es la proyección de la fuerza  $\mathbf{F}$  sobre la dirección

$\zeta$ , y podemos escribir: 
$$F_{\zeta} = -\frac{dU}{d\zeta}$$

Esta es la expresión de proyección de la fuerza que actúa sobre un sistema a lo largo de una di-

rección dada, en función de su variación de energía. Podemos ver que esta es una expresión general, siempre que el sistema sea conservativo (de otra manera, la expresión debería depender del camino).

Existen situaciones donde condiciones de vínculo sólo permiten giros alrededor de ejes. En tales casos existe una cupla de movimiento de modo que:



$$dU = -\boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\vartheta}$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector cupla y  $d\boldsymbol{\vartheta}$  el vector de rotación, como se indica en la figura. Si se expresa a estos vectores en términos de sus componentes, tenemos:

$$\tau_i = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}$$

En el caso de un sistema de cuerpos conductores cargados, su energía depende de la distribución de carga y los potenciales de los cuerpos y además se trata de un sistema conservativo. Un desplazamiento (o desplazamientos) en las posiciones de los cuerpos modificará la energía, pero se dan dos situaciones diferentes:

- Se mantiene la carga total del sistema (sistema aislado)
- Se mantienen los potenciales de los cuerpos (en este caso los cuerpos deben estar conectados a baterías externas, que proveen los cambios de energía).

En el primer caso las ecuaciones halladas son aplicables directamente:

$$F_\zeta = -\left(\frac{dU}{d\zeta}\right)_Q \quad \tau_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}\right)_Q$$

donde el subíndice  $Q$  indica un sistema aislado (que evoluciona a carga constante).

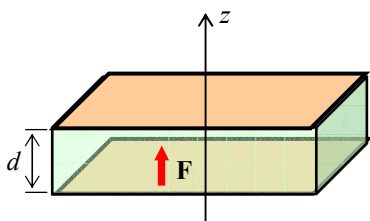
En el segundo caso hay un intercambio de energía con las baterías que mantienen constantes los potenciales. El trabajo realizado por las fuerzas debe ser igual a la variación de energía electrostática menos la energía cedida por las baterías. Un cálculo sencillo<sup>4</sup> lleva a:

$$F_\zeta = \left(\frac{dU}{d\zeta}\right)_\Phi \quad \tau_i = \left(\frac{dU}{d\vartheta_i}\right)_\Phi$$

Veamos unos ejemplos de aplicación de estos resultados.

**Ejemplo 2-29:** Calcular la fuerza entre las placas de un capacitor plano, de área  $A$ , separadas en una distancia  $d$  y a una ddp  $V$ , cuando el dieléctrico es un material de permitividad  $\epsilon$ . Realizar el cálculo: a) a  $Q$  constante, y b) a  $V$  constante.

a) La energía almacenada en el capacitor es:  $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon A}$



La fuerza entre las placas tiene solamente componente  $z$ , y vale:

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{Q^2}{2\epsilon A} \quad \text{a } Q \text{ constante. El signo negativo indica que las}$$

placas tienden a juntarse (la energía disminuye al acercar las placas a  $Q$  constante). Desde otro punto de vista, esta fuerza surge debido a la atracción coulombiana entre las cargas de las placas y se podría calcular en forma directa. El método de cálculo a partir de la energía permite obviar el conocimiento de la distribución detallada de carga en los electrodos.

b) A  $V$  constante:  $U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\epsilon AV^2}{2d}$  y entonces tenemos:  $F_z = \frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{\epsilon AV^2}{2d^2}$

<sup>4</sup> La demostración de estas expresiones puede verse en "Fundamentos de la teoría electromagnética", 4ta. Ed., J.R.Reitz, F.J.Milford, R.W.Christy. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1996, pág.135 y siguientes.

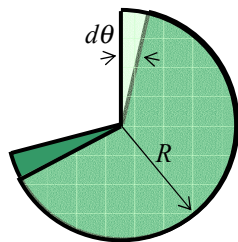
a  $V$  constante. Como  $V = Q/C$ , tenemos:  $F_z = -\frac{\epsilon A Q^2}{2 d^2 C^2} = -\frac{\epsilon A Q^2}{2 d^2} \frac{d^2}{\epsilon^2 A^2} = -\frac{Q^2}{2 \epsilon A}$

que es el mismo resultado que en el caso anterior. Podemos entender este comportamiento considerando que, desde el punto de vista coulombiano la fuerza entre las cargas acumuladas en las placas es independiente de que el capacitor esté o no conectado a una fuente externa, sino solamente de la distribución de carga y de la separación entre placas. En el esquema de cálculo a través de la energía el cambio de energía en el campo debido al movimiento infinitesimal (movimiento virtual) de las placas del capacitor no depende de las condiciones externas.

**Ejemplo 2-30:** Calcular la cupla entre las placas de un capacitor cuyas placas son sectores circulares de radio  $R$  y ángulo  $\theta_0$  separadas en una distancia  $d$  y que pueden girar alrededor de su centro. El capacitor está conectado a una ddp  $V$ , y el dieléctrico es un material de permitividad  $\epsilon$ . Realizar el cálculo: a) a  $Q$  constante, y b) a  $V$  constante.

Despreciando los efectos de borde, podemos considerar a este capacitor como un capacitor plano, de donde la capacidad es:

$$C = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{\epsilon}{d} \pi R^2 \frac{\theta}{\theta_0} \quad \text{con } \theta \leq \theta_0 .$$



Frente a un giro virtual  $d\theta$  el ángulo en que se enfrentan las placas es  $\theta - 2 d\theta$ , como se ve en la figura, y entonces:

$$dC = -2 \frac{\epsilon}{d} \pi R^2 \frac{d\theta}{\theta_0} = -2 \left( \frac{\epsilon}{d} \pi R^2 \frac{\theta}{\theta_0} \right) \frac{d\theta}{\theta} = -2C \frac{d\theta}{\theta}$$

a) A  $Q$  constante tenemos:  $\tau = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C^2} dC = -\frac{Q^2}{2C^2} 2C \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{Q^2}{C\theta} d\theta$

b) A  $V$  constante:  $\tau = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{CV^2}{2} = \frac{V^2}{2} dC = -\frac{V^2}{2} 2C \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{CV^2}{\theta} d\theta = -\frac{Q^2}{C\theta} d\theta$

y nuevamente ambos resultados coinciden como en el ejemplo previo.

En general, las fuerzas que se desarrollan en un sistema electrostático deben derivarse de consideraciones termodinámicas generales que son bastante complejas en casos más complicados que sistemas formados únicamente por conductores.

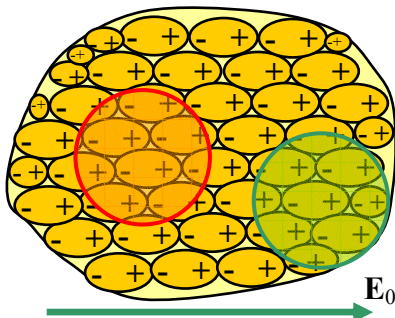


## RESUMEN

- Se presentó el **modelo de dipolo** de cuerpos extensos **dieléctricos** y una breve introducción al fenómeno de ruptura dieléctrica en materiales gaseosos, líquidos y sólidos de interés tecnológico. El modelo de dipolo lleva a expresiones para el potencial y el campo **inducidos**:

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' \quad \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_i(\mathbf{r})$$

- En un punto cualquiera del espacio el potencial (o el campo) será la superposición del potencial original (el campo original) y el potencial inducido (el campo inducido).



- El modelo introduce las **cargas equivalentes de polarización**, que refleja la redistribución de carga ligada que se produce dentro del dieléctrico por el proceso de polarización:

$$\sigma_P(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \rho_P(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')$$

- Los distintos tipos de fuentes (cargas reales o libres y cargas de polarización o ligadas) aportan al campo eléctrico. Sin embargo, es posible definir un nuevo

campo vectorial, llamado **campo de desplazamiento** siguiendo a Maxwell, que sólo está ligado a las cargas reales o cargas libres:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_l(\mathbf{r}) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_l \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

- En **dieléctricos lineales** el campo de polarización es proporcional al campo eléctrico punto a punto. Esta relación define la **permitividad** del dieléctrico:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

- Se presentaron las **condiciones de frontera** que cumple el campo electrostático sobre la interfase entre dos medios de propiedades diferentes:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = Q_l \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_l \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0$$

- La noción de **capacidad** cuantifica la posibilidad de acumular carga eléctrica de un conductor:

$$C = \frac{Q}{\Phi} = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

- Cuando hay más de dos cuerpos es conveniente introducir los **coeficientes de potencial** o **de capacidad**, que ligan en forma de un sistema lineal cargas y potenciales en los diferentes cuerpos del sistema:

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^N P_{ij} Q_i \quad Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j$$

- La noción de trabajo sobre una carga en movimiento lleva a la noción de **energía de un conjunto de cuerpos cargados**, y por extensión, al concepto clave de la **energía del campo electrostático**.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dv$$

- La energía electrostática se puede asociar a la capacidad o a los coeficientes de po-

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_{ij} q_i q_j \qquad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N C_{ij} \Phi_i \Phi_j$$

tencial/capacidad en el caso de un conjunto de conductores:

### APENDICE 3 - Propiedades de los coeficientes de potencial

Para demostrar las propiedades de los coeficientes de potencial partimos de la expresión de la energía de un sistema de conductores:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_{ij} q_i q_j$$

#### 1) Simetría de la matriz

Si producimos un cambio en las cargas de los conductores habrá una variación de la energía del sistema:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_N) \Rightarrow dU = \sum_{k=1}^N \frac{\partial U}{\partial q_k} dq_k$$

Pero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_k} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_{ij} q_i q_j \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \left[ \sum_{i=1}^N q_i \left( \sum_{j=1}^N P_{ij} q_j \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^N q_i \left( \sum_{j=1}^N P_{ij} q_j \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left( \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{j=1}^N P_{ij} q_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N P_{kj} q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N P_{ik} q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (P_{ik} + P_{ki}) q_i \end{aligned}$$

y entonces:

$$dU = \sum_{k=1}^N \frac{\partial U}{\partial q_k} dq_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (P_{ik} + P_{ki}) q_i dq_k$$

Supongamos ahora que todos los conductores, salvo uno (digamos, el  $n$ -ésimo) estaban descargados y mantienen esta condición:

$$dq_n \neq 0 \qquad \text{y} \qquad dq_i = 0 \quad \forall i \neq n$$

Entonces, de la expresión hallada:

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (P_{in} + P_{ni}) q_i dq_n$$

Desde otro punto de vista, la energía cuando **sólo** el conductor  $n$ -ésimo está cargado es:

$$U = \Phi_n q_n \Rightarrow dU = \Phi_n dq_n = \sum_{i=1}^N p_{ni} q_i dq_n$$

e igualando ambas expresiones de  $dU$  se tiene:

$$\sum_{i=1}^N P_{ni} q_i dq_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (P_{in} + P_{ni}) q_i dq_n \Rightarrow P_{ni} = \frac{1}{2} (P_{in} + P_{ni}) \Rightarrow \boxed{P_{ni} = P_{in}}$$

## 2) Elementos diagonales positivos

La expresión de la energía:  $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_{ij} q_i q_j$  es una forma definida positiva. La energía

debe ser una cantidad positiva. Supongamos que sólo dejamos un conductor, digamos, el  $n$ -

ésimo del conjunto:  $U = \frac{1}{2} p_{nn} q_n^2 \Rightarrow p_{nn} > 0$

Como esta conclusión no depende del valor de  $n$ , se deduce que todos los elementos diagonales son positivos:  $\boxed{p_{nn} > 0 \quad \forall n}$

## 3) Diagonal principal dominante

Consideremos ahora que tenemos sólo dos conductores, el  $n$ -ésimo y el  $m$ -ésimo del conjunto:

$$U = \frac{1}{2} [p_{nn} q_n^2 + p_{mm} q_m^2 + 2p_{nm} q_n q_m]$$

Supongamos que las cargas de los conductores son iguales y de signo opuesto:

$$q_n = -q_m = Q \Rightarrow U = \frac{1}{2} [2p_{nn} Q^2 - 2p_{nm} Q^2] = [p_{nn} - p_{nm}] Q^2 > 0 \Rightarrow \boxed{p_{nn} > p_{nm}}$$

de donde se ve que la matriz de coeficientes de potencial es diagonal dominante.

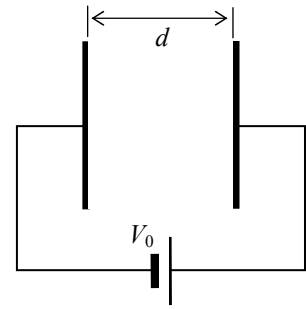
De las propiedades de los coeficientes de potencial se deducen las propiedades de los coeficientes de capacidad/inducción, que constituyen la matriz inversa.

## PROBLEMAS

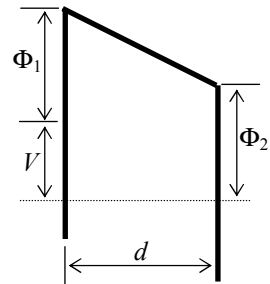
- 2.8) Para un capacitor de placas paralelas de área  $A$  y separadas por una distancia  $d$ , hallar  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en las siguientes situaciones: a) voltaje constante  $V$  con y sin dieléctrico, y b) carga constante  $Q$  con y sin dieléctrico.
- 2.9) Calcule la capacidad de:
- Dos esferas conductoras concéntricas de radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ )
  - Dos láminas planas conductoras de área  $A$  separadas por una distancia  $d$
  - Dos conductores cilindros concéntricos de radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ )
  - Dos conductores cilíndricos paralelos de radio  $R$  y con sus ejes separados por una distancia  $D$ .
- 2.10) Cuando se usa un cable coaxial para transmitir energía eléctrica, el radio del conductor interior está determinado por la corriente de carga, y el tamaño total por el voltaje y el tipo de material aislante que se utilice. Suponga que el radio del conductor interno es  $r_i = 2 \text{ mm}$  y que el material aislante es poliestireno. a) Determine el radio interior  $r_0$  del conductor externo para que el cable funcione con especificación de voltaje máximo de  $10 \text{ KV}$ . Para evitar la ruptura debido a los picos de voltaje ocasionados por relámpagos y otras condiciones anómalas externas, la intensidad máxima de campo eléctrico en el material aislante no debe exceder el 25% de su rigidez dieléctrica. b) ¿Qué sucede si, bajo idénticas condiciones de operación, se reemplaza el poliestireno por aire? ¿Qué conclusión se puede extraer? Nota: para el poliestireno la constante dieléctrica relativa es de 2.6 y la rigidez dieléctrica es de  $20 \times 10^6 \text{ V/m}$ , y para el aire valen respectivamente  $1$  y  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ .

[Respuesta: a)  $5.4 \text{ mm}$ , b)  $1.5 \text{ kV}$ ]

- 2.11) Un tubo diodo se puede aproximar por un par de electrodos metálicos planos y paralelos separados por una distancia  $d$ . Los electrones son emitidos por un cátodo caliente, originándose una distribución de carga espacial entre las placas. Se puede demostrar que el potencial en esa región está dado por:  $V(x) = V_0(x/d)^{4/3}$ . Calcular el campo eléctrico, la distribución de carga espacial, la carga total entre los electrodos y la energía almacenada por unidad de área. ¿Cuál es la fuerza entre placas?



- 2.12) El óxido de puerta en una estructura MOS (Metal-Oxido-Semiconductor) puede, bajo ciertas condiciones de inyección, atrapar carga eléctrica. Un modelo sencillo del diagrama energético de una estructura MOS polarizada se muestra en la figura, donde  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  y  $V$  son la altura de la barrera catódica, la altura de la barrera anódica y la tensión aplicada entre los electrodos, respectivamente. Considere una distribución de carga atrapada constante  $\rho$  dentro del aislante de espesor  $d$ . Halle, a partir de la ecuación de Poisson, el potencial eléctrico dentro del aislante y el campo eléctrico catódico.



- 2.13) La densidad de carga en la zona desierta de una juntura pn en la que las impurezas donantes y aceptoras han sido difundidas térmicamente, se puede representar matemáticamente según:

$$\rho = \begin{cases} eax & -\frac{W}{2} \leq x \leq \frac{W}{2} \\ 0 & \text{afuera} \end{cases}$$

donde  $e$  es la carga del electrón,  $a$  es un parámetro de la distribución,  $W$  el ancho de la zona desierta (que es una función del voltaje aplicado a la estructura) y  $x$  la posición. Determine el campo eléctrico y el potencial en la zona desierta de la estructura.

- 2.14) Determinar los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{P}$  que produce una carga puntual  $q$  centrada en una esfera dieléctrica de radio  $R$  y permitividad  $\epsilon$ . La esfera está rodeada por el espacio libre. Calcule las cargas equivalentes de polarización.
- 2.15) Un condensador cilíndrico con radios  $r_1 < r_2$  se sumerge perpendicularmente en un líquido dieléctrico de densidad  $\delta$  y permitividad  $\epsilon$ . El extremo inferior está sumergido y el superior emerge en el aire. Verifique que la altura  $h$  a la que se eleva el líquido cuando se aplica un voltaje  $V$  entre las placas es:

$$h = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)V^2}{g\delta(r_2^2 - r_1^2)\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

- 2.16) Hallar las cargas de polarización, el campo eléctrico y el desplazamiento en el eje de un cilindro dieléctrico de radio  $a$  y altura  $2L$  orientado según el eje  $z$  con una polarización  $\mathbf{P} = (P_0 z / L)\hat{z}$ .
- 2.17) Hallar el campo eléctrico en todo punto del espacio creado por una esfera dieléctrica de radio  $R$  con una polarización  $\mathbf{P} = (P_0 r / R)\hat{r}$ .
- 2.18) Hallar el campo de una línea bifilar cuando el sistema se coloca a una altura  $H$  de tierra, considerada plana y perfectamente conductora.