Vector de POYNTING
y Densidad de Energía del
CAMPO ELECTROMAGNETICO

Dr. Andrés Ozols

FIUBA

2005

ENERGIA del CAMPO ELECTROMAGNETICO

Si *u(r,t) = densidad de energía*

Si *S(r,t) = densidad de flujo de potencia*

La variación de energía total dentro de un volumen V limitado por la superficie A:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V u\,dV = \int_A \vec{S}.d\vec{A}$$

Aplicando el teorema de Gauss a V fijo:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t}dV = -\int_V \vec{\nabla}.\vec{S}dV$$

Para un volumen arbitrario

Teorema de continuidad de la ENERGIA

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{S} = 0$$

Si existe densidades de corriente *J* $\Rightarrow$ *potencia disipada J.E*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{S} + \vec{J}.\vec{E} = 0$$

La 2 ec. De Maxwell con fuentes de campo:

$$\vec{J}.\vec{E} = [\vec{\nabla} x \vec{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}].\vec{E}$$

Entonces el Término de disipación de energía

$$\vec{J}.\vec{E} = \vec{\nabla} x \vec{H}.\vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\vec{E} = (\vec{\nabla} x \vec{H}).\vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}$$

pero

$$\vec{\nabla}.(\vec{E} x \vec{H}) = \vec{H}.(\vec{\nabla} x \vec{E}) - \vec{E}.(\vec{\nabla} x \vec{H})$$

entonces

$$\vec{J}.\vec{E} = -\vec{\nabla}.(\vec{E} x \vec{H}) + \vec{H}.(\vec{\nabla} x \vec{E}) - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}$$

O bien

$$\vec{J}.\vec{E} = -\vec{\nabla}.(\vec{E} x \vec{H}) - \vec{H}.(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Como $B = \mu_0 H$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DE LA ENERGÍA

$$-\nabla.(\vec{E}x\vec{H}) + \vec{J}.\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu_0}{2}H^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right] = 0$$

Donde $\vec{S} = (\vec{E}x\vec{H})$ **Vector de Poynting**

$$u = \left[\frac{\mu_0}{2}H^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right]$$

Densidad de Energía

APLICACIÓN A UNA ONDA PLANA PROGRESIVA

Si el campo eléctrico sigue en la dirección x:

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{i}$$

Si el campo eléctrico sigue en la dirección y:

$$\vec{H} = H_0 \cos(kz - \omega t)\hat{j}$$

El vector de Poynting queda en la dirección perpendicular al plano x,y:

$$\vec{S} = \vec{E}x\vec{H} = E_0 H_0 \cos^2(kz - \omega t)\hat{k}$$

Además para la onda plana:

$$\vec{E} = c\vec{B} = c\mu_0\vec{H} = c^2\frac{\mu_0}{c}\vec{H} = \frac{\mu_0}{\mu_0\varepsilon_0 c}\vec{H} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}\vec{H}$$

Resulta

$$\vec{S} == c\varepsilon_0 E_0^{\,2}\cos^2(kz - \omega t)\hat{k}$$

Como

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

El vector de Poynting queda como

$$\vec{S} == \frac{c\varepsilon_0 E_0{}^2}{2}\hat{k} + \frac{c\varepsilon_0 E_0{}^2}{2}\cos 2(kz - \omega t)\hat{k}$$

$$\vec{S} == \frac{c\varepsilon_0 E_0{}^2}{2}\hat{k} + \frac{c\varepsilon_0 E_0{}^2}{2}\cos 2(kz - \omega t)\hat{k}$$

Término cte en tiempo **Término variable en tiempo**

El promedio temporal del vector de Ponyting

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle == \frac{c\varepsilon_0 E_0{}^2}{2}\hat{k} \qquad \textbf{pues} \qquad \left\langle \cos 2(kz-\omega t) \right\rangle = 0$$

La densidad de energía

$$u = \left[\frac{\mu_0}{2} H^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \right] = \frac{\mu_0 \varepsilon_0{}^2 c^2 E_0{}^2}{2} \cos^2(kz-\omega t) + \frac{\varepsilon_0 E_0{}^2}{2} \cos^2(kz-\omega t)$$

$$u = \varepsilon_0 E_0{}^2 \cos^2(kz-\omega t) = \frac{\varepsilon_0 E_0{}^2}{2}\left[1+\cos 2(kz-\omega t)\right]$$

El promedio temporal de la densidad de energía

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^{\,2}}{2}$$

La comparación

$$\frac{\langle \vec{S} \rangle}{\langle u \rangle} = \frac{\dfrac{c\varepsilon_0 E_0^{\,2}}{2}\hat{k}}{\dfrac{\varepsilon_0 E_0^{\,2}}{2}} = c\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \langle S \rangle = c\langle u \rangle$$

Es decir que el flujo de la densidad de energía ocurre a una velocidad c