

**Vector de POYNTING
y Densidad de Energía del
CAMPO ELECTROMAGNETICO**

Dr. Andrés Ozols

FIUBA

2005

ENERGIA del CAMPO ELECTROMAGNETICO

Si $u(r,t)$ = densidad de energía

Si $S(r,t)$ = densidad de flujo de potencia

La variación de energía total dentro de un volumen V limitado por la superficie A :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

Aplicando el teorema de Gauss a V fijo:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dV$$

Para un volumen arbitrario

Teorema de continuidad de la ENERGIA

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

Si existe densidades de corriente $J \Rightarrow$ potencia disipada $J \cdot E$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{J} \cdot \vec{E} = 0$$

La 2 ec. De Maxwell con fuentes de campo:

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = [\vec{\nabla} \times \vec{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}] \cdot \vec{E}$$

Entonces el Término de disipación de energía

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}_x \vec{H} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = (\vec{\nabla}_x \vec{H}) \cdot \vec{E} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

pero

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla}_x \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla}_x \vec{H})$$

entonces

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla}_x \vec{E}) - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

O bien

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Como

$$B = \mu_0 H$$

Ozols

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DE LA ENERGÍA

$$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mu_0}{2} H^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right] = 0$$

Donde $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H})$ **Vector de Poynting**

$u = \left[\frac{\mu_0}{2} H^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right]$ **Densidad de Energía**

APLICACIÓN A UNA ONDA PLANA PROGRESIVA

Si el campo eléctrico sigue en la dirección x:

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{i}$$

Si el campo eléctrico sigue en la dirección y:

$$\vec{H} = H_0 \cos(kz - \omega t) \hat{j}$$

El vector de Poynting queda en la dirección perpendicular al plano x,y:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0 H_0 \cos^2(kz - \omega t) \hat{k}$$

Además para la onda plana:

$$\vec{E} = c\vec{B} = c\mu_0\vec{H} = c^2 \frac{\mu_0}{c} \vec{H} = \frac{\mu_0}{\mu_0\epsilon_0 c} \vec{H} = \frac{1}{\epsilon_0 c} \vec{H}$$

Resulta

$$\vec{S} = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \hat{k}$$

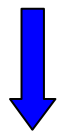
Como

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

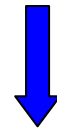
El vector de Poynting queda como

$$\vec{S} = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} \hat{k} + \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} \cos 2(kz - \omega t) \hat{k}$$

$$\vec{S} = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} \hat{k} + \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} \cos 2(kz - \omega t) \hat{k}$$



Término cte en tiempo



Término variable en tiempo

El promedio temporal del vector de Poynting

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} \hat{k} \quad \text{pues} \quad \langle \cos 2(kz - \omega t) \rangle = 0$$

La densidad de energía

$$u = \left[\frac{\mu_0}{2} H^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right] = \frac{\mu_0 \epsilon_0^2 c^2 E_0^2}{2} \cos^2(kz - \omega t) + \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2(kz - \omega t)$$

$$u = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} [1 + \cos 2(kz - \omega t)]$$

El promedio temporal de la densidad de energía

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

La comparación

$$\frac{\langle \vec{S} \rangle}{\langle u \rangle} = \frac{\frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} \hat{k}}{\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}} = c\hat{k} \quad \longrightarrow \quad \langle S \rangle = c\langle u \rangle$$

Es decir que el flujo de la densidad de energía ocurre a una velocidad c