Trabajo Práctico de Laboratorio N° 6
Circuitos excitados con corrientes dependientes del tiempo

Introducción teórica

En el cuadro de la última página resumimos las caídas de tensión, potencia instantánea y diferencial de trabajo para elementos pasivos comunes. Las **resistencias** son elementos que absorben energía y la transforman en forma irreversible). Los **capacitores** e **inductores** son elementos que tienen capacidad de acumular energía en forma de campos eléctricos y magnéticos. Así absorben o entregan energía a lo largo del tiempo.

La aplicación de la segunda ley de Kirchhoff a un circuito formado por resistencias, capacitores e inductores cuando la tensión aplicada varía en forma armónica (senoidal o cosenoidal) lleva a una (o varias) ecuaciones de segundo grado en las corriente que circulan. Para evitar la resolución de dichas ecuaciones diferenciales no homogéneas se recurre a una transformación matemática al campo complejo que conduce al concepto de **impedancia** (número complejo), la que depende del tipo de elemento en el circuito. A una resistencia R se le asocia su propio valor, a un capacitor se le asigna la reactancia capacitiva $X_C=-j/\omega C$ y a una inductancia la reactancia inductiva $X_L=j\omega L$ (j es la unidad imaginaria). En estos casos las impedancias correspondientes a un capacitor o a un inductor resultan imaginarias puras. Cuando se tiene más de una inductancia en un circuito, se deberá tener en cuenta no sólo las autoinductancias (L) sino también las inductancias mutuas (M).

Con estas transformaciones se obtiene un método de resolución de un circuito de corriente alterna que utiliza las mismas herramientas utilizadas para el caso de circuitos de corriente continua, es decir la primera ley de Kirchhoff en los nodos y la segunda en las mallas, sólo que ahora las magnitudes (tensiones, corrientes) son complejas. Una vez resuelto el circuito, e invirtiendo la mencionada transformación, es posible retornar al conjunto de variables reales.

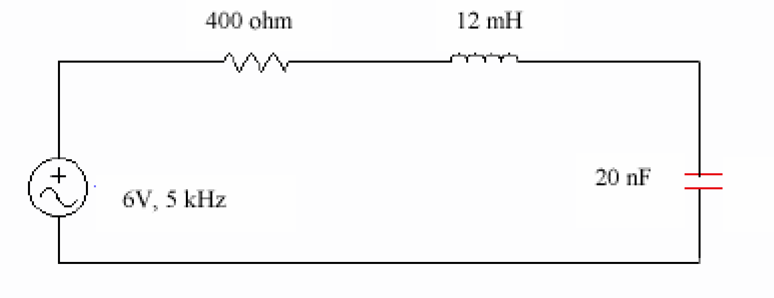
La impedancia de un circuito que contenga elementos activos depende de la frecuencia, ya que las reactancias inductiva y capacitiva son directa e inversamente proporcionales, respectivamente, a la frecuencia. Así, un circuito que para una dada frecuencia es, por ejemplo, inductivo, para otra puede pasar a ser capacitivo. Un circuito entrará en resonancia a aquellas frecuencias para las cuales la impedancia sea un número real; es decir, cuando se anule su parte imaginaria.

Como ejemplo, en un circuito RLC serie conectado a un generador sinusoidal y de frecuencia variable, la intensidad de corriente variará con la frecuencia. A la frecuencia en que la impedancia Z es mínima, la corriente resulta máxima. En este caso, esta condición corresponde a $X_L=X_C$, que corresponde a una frecuencia

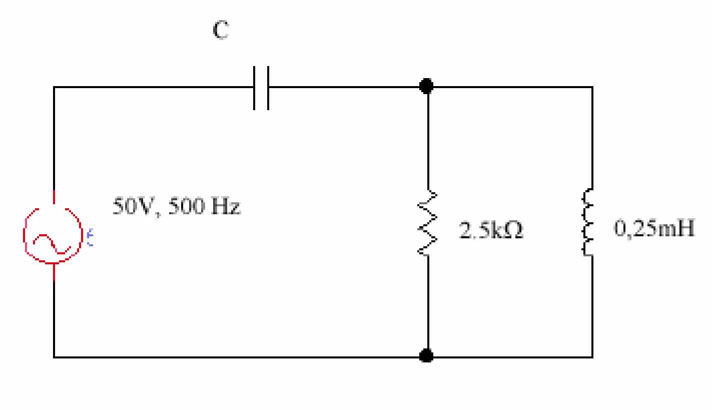
$$f_0 = \frac{1}{2\,\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Las tensiones instantáneas entre los bornes del inductor y del capacitor están desfasadas 180^o, y, aunque los valores eficaces de cada una pueden ser muy elevados (incluso mucho más grandes que la tensión entregada por el generador) la resultante de la suma algebraica de tensiones sobre el capacitor y la inductancia cuando se produce resonancia es nula en todo instante.

Problema 1: *En el circuito de la figura, calcular a) la caída de tensión producida por cada elemento; ¿se cumple la segunda Ley de Kirchoff? b) La corriente que circula por cada rama; c) Realizar el diagrama fasorial correspondiente; d) ¿Es el circuito capacitivo o inductivo?*
Deducir la condición de resonancia y determinar, en condiciones de resonancia, los valores de tensión eficaz sobre la resistencia, el capacitor y el inductor.
Graficar la corriente eficaz que circula por la resistencia en función de la frecuencia, para valores de la frecuencia en el intervalo [f_0 – 0.9 f_0 , f_0 + 0.9f_0] (Siendo f_0 la frecuencia de resonancia). ¿Cómo cambiaría esta función si la resistencia fuera de 3000 Ω



Problema 2: *Teniendo en cuenta el siguiente circuito, hallar el valor de la capacidad para que el circuito esté en resonancia. Compare los valores de reactancia capacitiva e inductiva. ¿Cuál diría usted que es la condición de resonancia de este circuito? ¿Coincide con la definición de resonancia para el circuito RLC serie?*

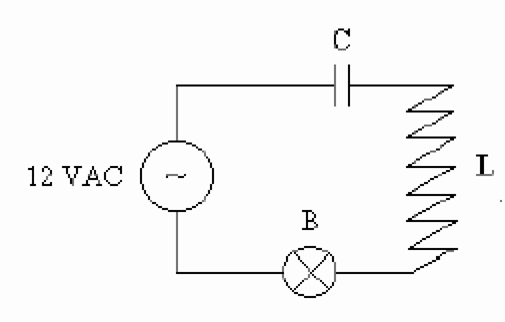


Primera parte: Medidas con voltímetro en un circuito RLC serie

Experiencia: Armamos el siguiente circuito con una inductancia variable *L* (por cambios en la posición de un núcleo ferromagnético, usamos la que dice 400 vueltas y el núcleo de forma rectangular con un tornillo de fijación), una bombita *B* y un capacitor *C*. Por motivos de seguridad alimentamos el circuito con 12 VAC provistos por un transformador como los utilizados para alimentar lámparas dicroicas.

Nota importante: Ninguna de estas prácticas debe ser realizada con 220 VAC de la línea. Existe un grave riesgo para el operador y los instrumentos.

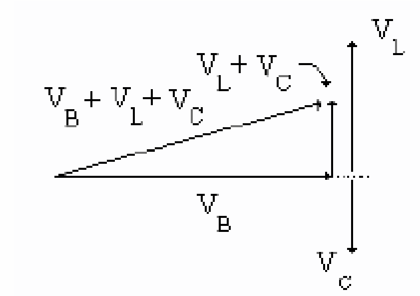
Con un voltímetro medimos las caídas de tensión sobre cada elemento (V_C,V_L,V_B) con el fin de verificar la segunda ley de Kirchhoff. Rápidamente notamos que si sumamos las lecturas no obtenemos 12 V, es decir $V_C+V_L+V_B \neq V_G$.



¿Puede no cumplirse la Ley de Kirchhoff? Recordar que corresponde a una ley de conservación. ¿A cuál ley de conservación?

Esto se debe a que los voltímetros registran los valores eficaces de las caídas de tensión pero no las respectivas relaciones de fase (sabemos que en un circuito con resistencias, capacitores e inductancias las caídas de tensión varían armónicamente en el tiempo pero con diferentes fases iniciales).

La solución a nuestro problema está en construir un diagrama vectorial donde los módulos de los vectores están dados por las lecturas obtenidas y los ángulos que forman entre ellos respetan los atrasos o adelantos de fase.



Comenzamos el trazado dibujando un vector que represente V_B. Este vector lo dibujamos horizontalmente. Esta es una elección arbitraria y nos dice que tomamos como referencia del diagrama la caída de tensión en la bombita (y por lo tanto la corriente que circula). A partir del extremo de V_B trazamos los vectores correspondientes a V_L y V_C. El primero debe ser dibujado a + 90° de V_B puesto que en una inductancia la tensión adelanta dicho valor respecto a la corriente. El segundo (V_C) lo dibujamos a - 90° respecto de V_B puesto que la caída de tensión sobre un capacitor atrasa respecto de la corriente. Es importante puntualizar que, al fijar estos ángulos, estamos suponiendo que tanto la inductancia como el capacitor se comportan idealmente, es decir que carecen de resistencias internas (que existen en la realidad) y que hacen que los ángulos, si bien próximos a 90°, no lo sean con exactitud. En nuestra figura representamos el caso en que $V_L > V_C$ pero en nuestras medidas puede ocurrir el caso contrario.

Con el trazado terminado, deberíamos obtener una resultante próxima a la tensión del generador. Ahora aflojamos el tornillo que mantiene unidas las partes del núcleo sobre el que se encuentra la bobina y desplazamos un poco la parte móvil (variamos L). Notamos que el brillo de la bombita varía, pasando por un máximo. Dicho máximo corresponde a la condición de resonancia. Es difícil juzgar dicho máximo por el brillo ya que es una apreciación muy subjetiva.

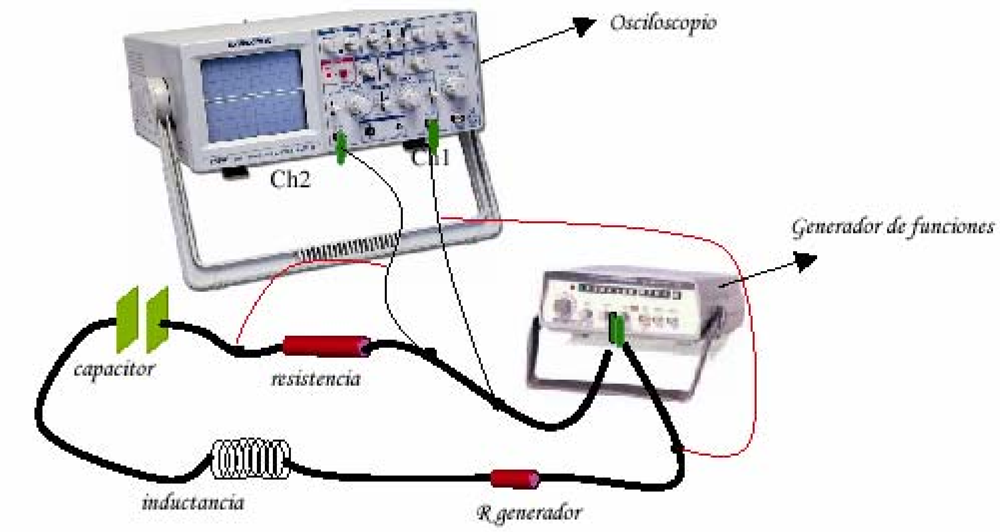
Con el fin de determinar más precisamente el punto de resonancia del circuito desplazamos el núcleo mientras medimos la caída de tensión sobre la bombita. Al alcanzar la resonancia dicha caída es máxima. En teoría, con inductancias y capacitores ideales, dicha caída de tensión debería ser igual a la del generador puesto que tendríamos $|V_L|=|V_C|$ o bien que la caída de tensión total sobre la inductancia y el capacitor (los dos en conjunto) sería mínima (en teoría nula).

Sin tocar el núcleo desconectamos todo el circuito, medimos el valor de la inductancia y el capacitor para así calcular la frecuencia de resonancia, la que debería ser próxima a 50 Hz. De no ser así, hay mucha diferencia en los valores? Si la hubiera, a qué podría deberse?

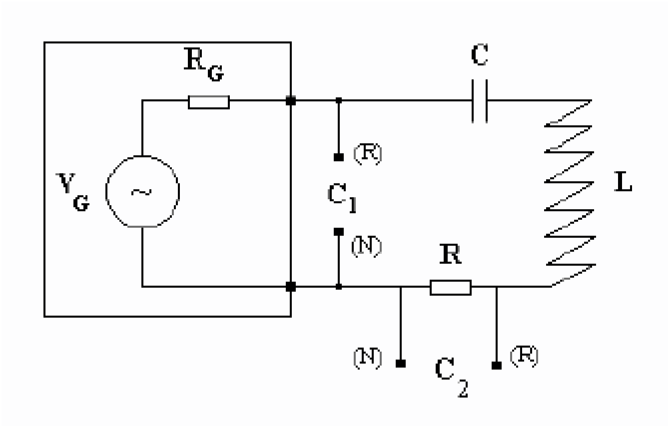
Segunda parte: respuesta en frecuencia de un circuito RLC serie

En esta práctica relevaremos la respuesta en frecuencia de un circuito *RLC* serie.
Experiencia: Como primer paso medimos la resistencia *R*, luego la inductancia *L* (usar

la que dice 400 vueltas) con y sin núcleo, la resistencia R_L de la inductancia y finalmente la capacitancia C a la que consideramos sin pérdidas. Luego montamos el circuito de la figura. C1 y C2 son los canales del osciloscopio y las leyendas (R) y (N) refieren a los colores (rojo y negro) de las pinzas cocodrilo de cada canal del osciloscopio. Es importante respetar el código de colores para obtener la medida correcta.



Hemos dibujado al generador como un generador ideal (V_G) seguido de una resistencia interna R_G= 50 Ω encerrados en una caja (el rectángulo que los encierra)



Primero usamos la inductancia L sin núcleo. Con los valores medidos podemos calcular los valores teóricos de la frecuencia de resonancia $f_0 = \frac{1}{2\,\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$, el módulo de la corriente

$$|I| = \frac{V_G}{\sqrt{(R+R_G+R_L)^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$ y del factor de mérito $Q = \frac{2\pi\ f_0 L}{R+R_G+R_L}$

Con el canal 1 del osciloscopio medimos que a la salida del generador aparezca una señal sinusoidal de aproximadamente 1 V pico a pico (el valor no es crítico) y frecuencia próxima a la de resonancia calculada anteriormente.

Medimos ahora en el canal 2 la caída de tensión en bornes de R, la cual es proporcional a la corriente y variamos la frecuencia de salida del generador hasta encontrar la resonancia. Ésta puede ser determinada o bien buscando la condición de máxima corriente o por la condición de ángulo de fase nulo entre tensión y corriente. Ambos métodos brindan resultados muy parecidos pero no idénticos. Esto se debe a que es difícil apreciar con exactitud la condición para la cual la corriente es máxima. Es más simple (y concuerda con la definición estándar de resonancia en circuitos eléctricos) medir la diferencia de fase entre tensión y corriente y llevarla a cero ajustando la frecuencia. Una vez obtenida la resonancia, con el osciloscopio medimos el período de la señal (recordemos que la inversa del período es la frecuencia).

Luego variamos la frecuencia de la señal de salida del generador por arriba y por debajo de la frecuencia de resonancia y registramos el valor de la caída de tensión sobre *R*. Nos alejamos de la frecuencia de resonancia y anotamos las frecuencias a las que la corriente es 90%, 80%,… de la máxima hasta que la señal medida se reduzca al 20% de la máxima. En particular ponemos cuidado en buscar las frecuencias f_1 (por debajo de f_0) y f_2 (por encima de f_0) para las cuales la señal es el 70% de la máxima.

Estas son las frecuencias de media potencia (¿Cuál es el motivo?), a partir de las cuales podemos determinar el factor de mérito como (verificar que esta expresión es equivalente a la anterior):

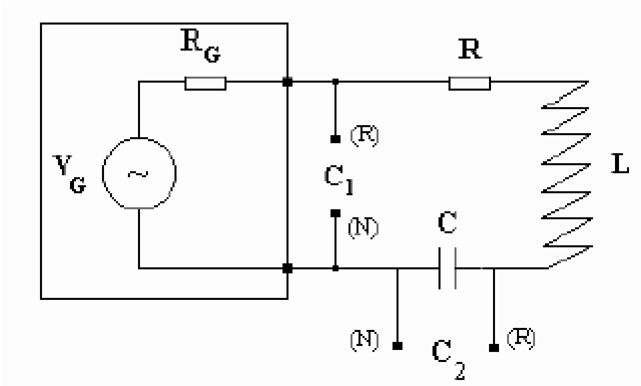
$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

Graficamos ahora la curva de respuesta en frecuencia teórica y la experimental. Normalizamos dichas lecturas de tal manera que el valor máximo de cada una de ellas sea uno. ¿Cuáles son las diferencias observadas? ¿Qué diferencia porcentual hay entre los valores de f_0 y Q calculados en base a *R*, *L* y *C* y los medidos en esta última parte?

Repetimos la medida de la frecuencia de resonancia colocando la bobina en el núcleo de forma rectangular. ¿Cuál parece ser la permeabilidad magnética de dicho material? Si nos encontramos en resonancia y medimos la caída de tensión en bornes de *L* y de *C*, ¿cómo deben ser los valores? ¿Se cumple en este circuito?

Nota importante:

El circuito que hemos armado permite observar en el canal 1 del osciloscopio la excitación y en el canal 2 la caída de tensión sobre la resistencia la cual es proporcional a la corriente. Podemos también observar las caída de tensión en la inductancia o en el capacitor, pero para hacerlo debemos reubicar los componentes *R*, *L* y *C* dentro del circuito para hacer que los bornes denominados “negros” de cada canal se encuentren conectados al mismo punto del circuito. Esto debe ser así puesto que dichos conectores “negros” se encuentran unidos dentro del osciloscopio. Si “mezclamos” las conexiones estamos “destruyendo” la medida. No vamos a dañar nada puesto que hemos tomado las precauciones para que nada malo suceda, pero las medidas son nulas (así como el TP). Por ejemplo, si deseamos medir la caída de tensión sobre el capacitor el circuito a armar debe ser:



Problema 3: *La condición de resonancia corresponde a ángulo de fase nulo entre tensión y corriente. Esto es equivalente a que la caída de tensión sobre la resistencia sea igual a la tensión entregada por la fuente (con diferencia de fase cero). También es equivalente a que la frecuencia sea tal que la corriente es máxima. ¿Son siempre equivalentes estas tres condiciones?*

Problema 4: *¿Qué relación existe entre los gráficos de corriente vs. frecuencia y el de módulo de impedancia vs. frecuencia en un circuito RLC serie?*

Tercera parte: Transformador

Por razones de rendimiento es conveniente transportar la energía eléctrica a diferencias de potencial elevadas e intensidades pequeñas, con la reducción consiguiente de la cantidad de calor I^2R perdida por segundo en la línea de transporte debida al efecto Joule. Por otra parte, las condiciones de seguridad y de aislamiento de las partes móviles requieren voltajes relativamente bajos en los equipos generadores, en los motores y en las instalaciones domésticas. Una de las propiedades más útiles de los circuitos de corriente alterna es la facilidad y el rendimiento elevado con que pueden, por medio de transformadores, variarse los valores de los voltajes (e intensidades de las corrientes). De hecho el transformador es una “máquina” eléctrica de gran rendimiento: muy difícilmente cae por debajo del 94% pudiendo llegar hasta el 99% en grandes instalaciones. La potencia obtenida de un transformador es necesariamente inferior a la potencia suministrada al mismo, a causa de las inevitables pérdidas caloríficas. Estas pérdidas consisten en el calentamiento de los devanados primario y secundario, y la histéresis y corrientes de Foucault en el núcleo de hierro. La histéresis se reduce utilizando hierro que tenga un ciclo de histéresis estrecho, y las corrientes de Foucault se aminoran con un núcleo formado por láminas.

Problema 6: *¿Por qué se usa hierro laminado en los núcleos de los transformadores?*

Para simplificar, consideremos un transformador ideal en el cual no haya pérdidas ni fugas de flujo. Supongamos que el circuito secundario está abierto. El arrollamiento primario funciona entonces simplemente como un inductor. Puesto que el mismo flujo atraviesa tanto el primario como el secundario, la fem inducida por vuelta es idéntica en ambos, es decir

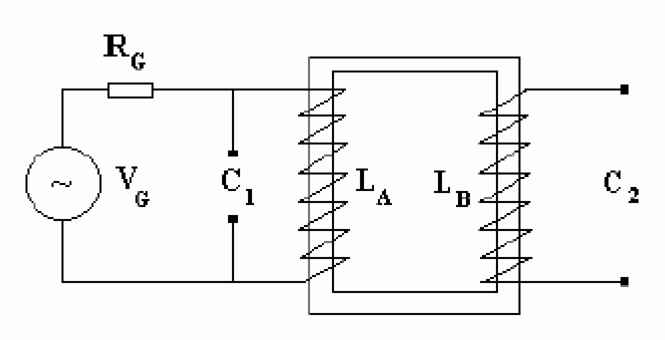
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

En el caso ideal supuesto, las fuerzas electromotrices inducidas V_1 y V_2 son iguales a las tensiones correspondientes en los bornes. Por consiguiente, eligiendo adecuadamente la razón N_2/N_1 es posible obtener en el secundario cualquier tensión que se desee.

Aclaración importante: En el caso real, hay pérdidas y fugas. Consecuentemente, la relación anterior no se cumple, sino que se tiene $\frac{V_2}{V_1} = k\frac{N_2}{N_1} \qquad k < 1$.

Consideremos el efecto resultante de cerrar el circuito del secundario. La intensidad secundaria i_2 y su fase dependerán de la naturaleza del circuito secundario. Tan pronto como se cierre este último, absorberá alguna energía y, en virtud de consideraciones energéticas, ha de suministrarse una energía igual (en realidad mayor) al primario. El proceso por el cual el transformador es capaz de absorber la energía necesaria es el siguiente: cuando el circuito secundario está abierto, el flujo del núcleo es producido únicamente por la corriente primaria; pero cuando el circuito secundario está cerrado, tanto la corriente primaria como la secundaria crean flujo en el núcleo. Según la ley de Lenz, la corriente secundaria tiende a debilitar el flujo del núcleo primario y, por consiguiente, a disminuir la fuerza electromotriz en el mismo. Pero (en ausencia de pérdidas), la fuerza electromotriz en el primario ha de ser constante pues la tensión aplicado en los bornes del mismo lo consideramos fijo. Por consiguiente, la intensidad en el primario tendrá que aumentar para conseguir que el flujo en el núcleo recupere su valor inicial (con el circuito secundario abierto).

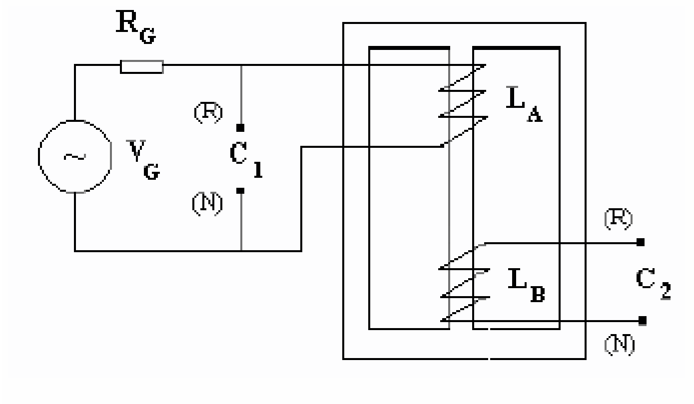
Experiencia: Montamos el siguiente circuito usando el núcleo en forma de C, el cual es sólo un transformador (seguimos utilizando los arrollamientos de 400 espiras). La frecuencia la fijamos en 1kHz.



Medimos la tensión de entrada (canal 1) y la de salida (canal 2) al mismo tiempo para registrar la tensión en bornes del primario y del secundario.

Si ambos arrollamientos tienen la misma cantidad de vueltas, cuál es la relación de transformación esperada? Cómo se la compara con la medida? ¿Cuál es el factor de acoplamiento entre arrollamientos?

Repetimos colocando ambos arrollamientos en la rama central del núcleo E como muestra la siguiente figura. ¿Cómo se comparan estos resultados con los anteriores?



Cuarta parte: asociaciones de inductancias, acoplamiento

Cuando una bobina A concatena parte del flujo magnético generado por una bobina B estamos en presencia del fenómeno de inducción mutua, por el cual variaciones en la corriente en una de las bobinas (I_A ó I_B)se refleja en una fem inducida en la otra computable a través de las relaciones:

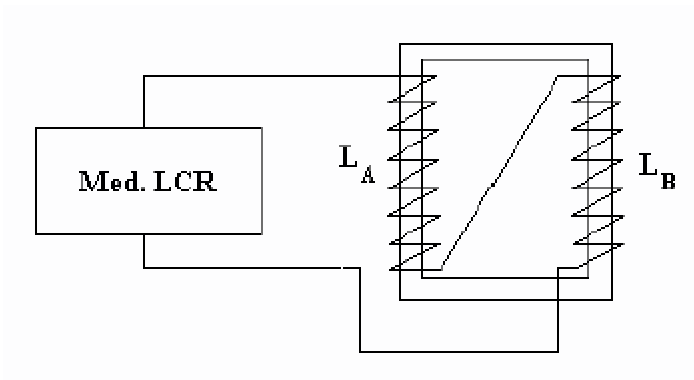
$$V_A = M\frac{dI_B}{dt} \qquad V_B = M\frac{dI_A}{dt}$$

Definimos el factor de acoplamiento *k* como la fracción del flujo generado por A que es concatenada por B (la definición inversa brinda el mismo resultado), por lo que el coeficiente de inducción mutua se puede calcular como:

$$M = k\sqrt{L_A L_B}$$

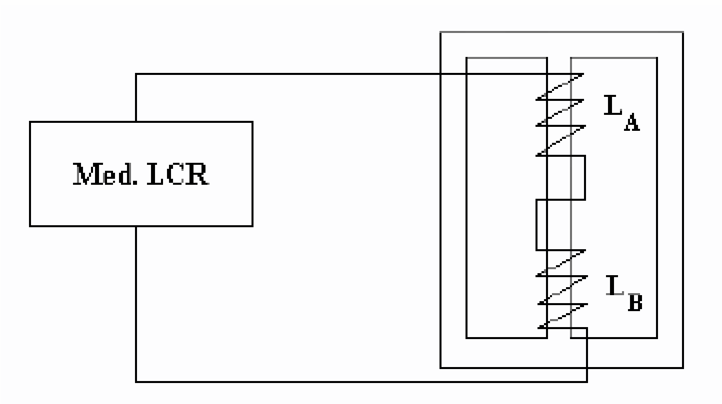
En esta práctica determinaremos el factor de acoplamiento midiendo la inductancia total de dos arrollamientos conectados en serie con y sin núcleo

Comenzamos registrando con el medidor LCR los valores de L_A y L_B separadas (sin núcleo) y luego la inductancia total estando conectadas (registrar en ambos sentidos, es decir permutando los bornes de L_B usados como entrada y salida), con lo cual calculamos *M* (¿cómo lo hacemos?) y a partir de éste calculamos *k*. Debido a que no hemos utilizado un núcleo, el factor de acoplamiento obtenido es muy pequeño. A fin de aumentarlo usamos el núcleo con forma rectangular y repetimos las medidas. Para ello montamos el siguiente circuito:



Nuevamente medimos con el medidor LCR los valores de L_A y L_B separadas y luego la inductancia total estando conectadas (registrar en ambos sentidos). ¿Cuál es el nuevo valor de *M* y *k*?

Si bien hemos progresado mucho, podemos mejorar aún más si utilizamos un núcleo con forma de E y repetimos las medidas. Disponemos las bobinas así:



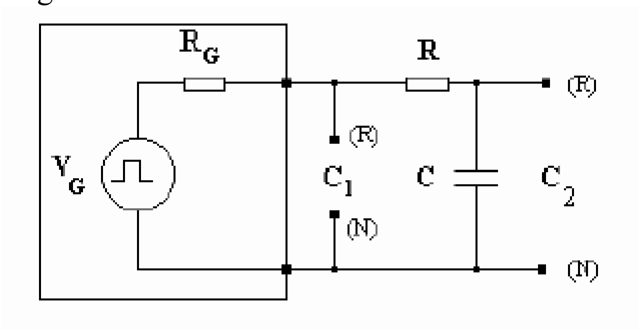
¿Se obtiene el mismo valor de *M* y *k*?. Si no es así, qué cambió si el material del núcleo es el mismo?

Quinta parte: transitorios, carga y descarga de un capacitor

Si un circuito RC serie en el que el capacitor está inicialmente descargado es excitado por medio de una tensión continua V_G, la tensión sobre el capacitor varía a lo largo del tiempo como $V_C=V_G\ (1-e^{-t/RC})$. Similarmente, si el capacitor está inicialmente cargado a una tensión inicial V_G y lo descargamos sobre la misma resistencia, la tensión sobre el mismo vale: $V_C=V_G\ e^{-t/RC}$.

Cuando la constante de tiempo RC es del orden de varios segundos es posible seguir el proceso de carga o descarga leyendo un voltímetro conectado a través de los bornes del capacitor. Sin embargo, cuando la constante de tiempo es corta es imposible seguir con la vista variaciones rápidas y por ello recurrimos a observarlas en el osciloscopio.

Armamos el siguiente circuito:

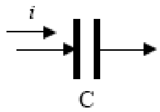
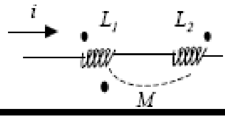
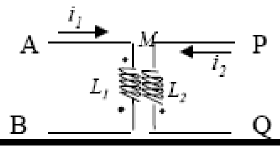


Ahora seleccionamos la salida de onda cuadrada del generador, esta señal toma valores positivos o nulos, permitiendo así cargar y descargar cíclicamente el capacitor para observar en la pantalla del osciloscopio el proceso. Fijamos la salida nuevamente en 1 V (el valor no es crítico).

Primero elegimos una frecuencia f de excitación tal que $f< 1/(RC)$. ¿Qué relación debe haber entre f y RC para que la tensión máxima sobre el capacitor sea superior al 90% de la entregada por el generador?

Ajustamos la base de tiempo del osciloscopio para observar bien en detalle la carga o la descarga (no importa cuál). A partir del tiempo de carga o descarga calculamos la constante de tiempo del circuito. ¿Cómo se compara con el valor RC?

Ahora probamos con $f >> 1/(RC)$. ¿Qué forma toma la salida? ¿Qué relación matemática aproximada guarda con la entrada? ¿Cómo se denomina este circuito? ¿Por qué?

					
Caída de tensión	$v_R = i\,R$	$v_C = \frac{q(t)}{C} = q(0) + \int_0^t i\,dt$	$v_A - v_B = \frac{di}{dt}(L_1 + L_2 \pm 2M) =$ $= L_{eq}\frac{di}{dt}$		$v_A - v_B = L_1\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt}$ $v_P - v_Q = L_2\frac{di_2}{dt} \pm M\frac{di_1}{dt}$
Potencia instantánea	$p_R = i\,v_R = i^2 R$ $p_R \geq 0$	$p_C = i\,v_C = \frac{q(t)}{C} i =$ $= \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = Cv_C\frac{dv_C}{dt}$	$p_{L_{eq}} = L_{eq}\,i\frac{di}{dt}$		$p_{AB} = (v_A - v_B)i_1 = L_1 i_1\frac{di_1}{dt} \pm Mi_1\frac{di_2}{dt}$ $p_{PQ} = (v_P - v_Q)i_2 = L_2 i_2\frac{di_2}{dt} \pm Mi_2\frac{di_1}{dt}$
	$dW_R = i\,v_R dt = i^2\,v_R\,dt$	$dW_C = \frac{q(t)}{C}dq$	$dW_{L_{eq}} = L_{eq}\,i\,di$		$dW_{AB} = L_1 i_1 di_1 \pm Mi_1 di_2$ $dW_{PQ} = L_2 i_2 di_2 \pm Mi_2 di_1$
Impedancia , Admitancia y Reactancia (corriente senoidal)	$Z_R = R$ $Y_R = \frac{1}{R}$ $X_R = R$	$Z_C = -\frac{j}{\omega C}$ $Y_C = j\omega C$ $X_C = \frac{1}{\omega C}$	$Z_{L_1} = j\omega L_1$ $Y_{L_1} = -\frac{j}{\omega L_1}$ $X_{L_1} = \omega L_1$	$Z_{L_{eq}} = j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M)$ $Y_{L_{eq}} = -\frac{j}{\omega(L_1 + L_2 \pm 2M)}$ $X_{L_{eq}} = \omega(L_1 + L_2 \pm 2M)$	

$i = i(t)$=corriente instantánea $v = v(t)$=tensión instantánea
p= potencia instantánea entregada por la fuente a un elemento del circuito

El signo en M depende de cuáles son bornes homólogos