Trabajo Práctico de Laboratorio N° 2

Líneas de campo eléctrico

En este trabajo práctico se quiere determinar el vector campo eléctrico debido a la aplicación de una diferencia de potencial entre dos zonas del espacio (electrodos). Para ello se determinarán experimentalmente valores de diferencia de potencial en una grilla de puntos y luego se calculará el campo eléctrico (módulo y dirección). También se tomarán líneas equipotenciales con las que se podrá inferir la dirección del campo. Se compararán los resultados experimentales con los obtenidos a partir de la resolución analítica de un "dipolo" formado por dos cargas puntuales y otro formado por dos distribuciones lineales y uniformes de carga. En la segunda parte, se utilizará un método numérico para comparar los resultados teóricos con los experimentales.

Cada grupo debe traer calculadora, por lo menos dos hojas milimetradas tamaño oficio, regla y lápices de colores.

Introducción: Campo eléctrico, diferencia de potencial y ecuación de Laplace y de Poisson

Como se ha visto en Análisis II, cuando un campo vectorial $\vec{E}$ es conservativo existe una función escalar V llamada función potencial tal que

$$\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 -dV = V_1 - V_2 \qquad (1)$$

y cuyo valor es independiente del camino que se haya elegido para ir desde el punto 1 al punto 2, siempre que 1 y 2 y el camino que los une (cualquiera) pertenezcan al dominio en el cual el campo $\vec{E}$ es conservativo. Si expresamos la ec.(1) en coordenadas cartesianas tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x\,\hat{i} + E_y\,\hat{j} + E_z\,\hat{k} \\ d\vec{l} &= dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \\ dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \end{aligned} \qquad (2)$$

Por lo que resulta:

$$\int_1^2 E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \quad (3)$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\vec{\nabla}V\cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (4)$$

La expresión (4) determina la relación entre el campo y el potencial eléctricos. Pero no resuelve directamente las situaciones donde se conoce la distribución de cargas. Para ello debemos llegar a una expresión que vincule el potencial con la configuración de cargas. Es decir, se trata de vincular el potencial y no el campo eléctrico con la distribución de cargas

debido a la simplicidad que presenta el potencial por su naturaleza escalar. Además, una vez obtenido el potencial, puede hallarse el campo por simple derivación.
Considerando la ley de Gauss

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{Vol}\rho\, dVol = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad (6)$$

y aplicando el teorema de Stokes a la integral del primer miembro de la ec.(6) se llega a

$$\iiint_{Vol}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dVol = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{Vol}\rho\, dVol \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7)$$

Entonces si se reemplaza la expresión (4) en (7) se obtiene

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}V\right) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (8)$$

donde ρ es la densidad volumétrica de carga. La ecuación escalar (8), que es una función de punto, se denomina ecuación de Poisson y cuando está igualada a cero (en ausencia de cargas), se la llama ecuación de Laplace. Estas son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que, con las condiciones de contorno correspondientes, resuelven el problema electrostático. Es decir, conociendo la distribución espacial de carga y resolviendo (8) se llega a una expresión de la función potencial. A partir de la misma y aplicando (4) se obtiene la expresión del campo eléctrico en todo el espacio.

La resolución de un problema electrostático (determinar el campo eléctrico dada una distribución de cargas o la diferencia de potencial entre los puntos del espacio, o la distribución de cargas dado el campo eléctrico) se puede hacer (dependiendo de cuáles son los “datos”) a partir de la Ley de Coulomb o a partir de la resolución de la ecuación de Poisson (y la relación entre el potencial y el campo eléctrico). Para ello es necesario conocer la distribución de cargas en todo el espacio. Además, una resolución analítica del problema puede obtenerse en pocos casos ideales: en la mayoría de los casos (aunque sean ideales) las ecuaciones diferenciales o integrales sólo admiten solución numérica.

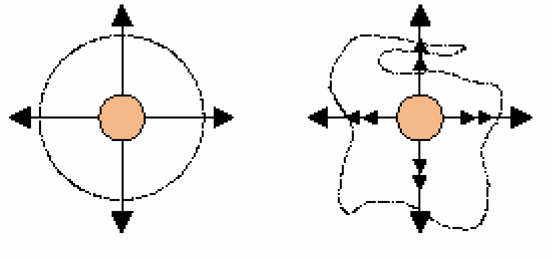
Por otra parte, la distribución de cargas en un problema real no es fácil de determinar. Lo que se puede medir no son cargas sino sus efectos, como por ejemplo, la diferencia de potencial que se genera entre dos puntos del espacio debido a su presencia. En esta experiencia se determinan diferencias de potencial experimentalmente y a partir de los datos obtenidos, se puede inferir la forma del campo eléctrico y la distribución de cargas que lo produjo. Para determinar el campo eléctrico se usará el método de diferencias finitas, que no es más que una resolución numérica de la ec.(4).

Análisis gráfico

Las líneas equipotenciales y las líneas de campo son un modelo de representación gráfico del problema electrostático. Este modelo gráfico dará una idea de cómo son el potencial y el campo en una región del espacio.

Línea de campo: Es una línea imaginaria dibujada de modo tal que su dirección en cada punto (es decir, la dirección de su tangente) sea la misma que la dirección del campo en ese punto. Ahora bien, supongamos que tenemos una carga puntual de valor +Q que, como se sabe, es fuente de campo eléctrico. Por lo tanto, ¿cuántas líneas de campo sería correcto asignarle? ¿Conviene elegir la representación tridimensional A o la B?

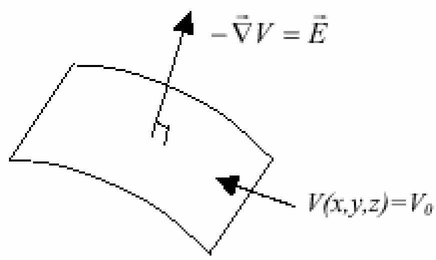
La respuesta es que se puede elegir cualquiera de las dos. Pero, limitando adecuadamente el número de líneas dibujadas, éstas pueden utilizarse no sólo para indicar la dirección del campo sino también la magnitud del mismo. ¿Cómo? Espaciando las líneas de forma tal que **el número de las que atraviesen la unidad de superficie perpendicular a la dirección del campo, sea igual, en cada punto, al producto de ε_0 por la intensidad del campo eléctrico en dicho punto.**
Depende este número de la superficie cerrada elegida? Veámoslo en un dibujo en el plano tomando dos "superficies" distintas (corte de las superficies cerradas en el espacio)



En la primera salen 4 líneas, y en la segunda salen 5 y 1 entra, es decir, son 4 las que salen de la "superficie". Es decir, no depende de la superficie elegida. Así, en un área A, perpendicular a las líneas de campo, el número de líneas será $N=\varepsilon_0\ E\ A$. Considerando una superficie esférica de radio r que rodee a una carga puntual Q y considerando que el campo eléctrico que genera está dado por la Ley de Coulomb, resulta $N=Q$ .Es decir, el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie es igual a la carga situada en su interior. Y este número es independiente del radio de la esfera. También se deduce de esto que ninguna línea comienza o termina sobre la superficie esférica.
Entonces se llega a que la intensidad del campo eléctrico se materializa en nuestra representación gráfica según la densidad de líneas de campo que visualicemos en la zona.

Pregunta 1: *¿Las líneas de campo se pueden cortar entre sí? ¿Por qué*?

Superficies equipotenciales: La función potencial se define respecto de la variables espaciales, por lo tanto una superficie equipotencial responde a $V(x,y,z)=cte$. El gradiente del potencial será ortogonal a la superficie equipotencial e igual,según la relación hallada (4), pero en sentido contrario al campo eléctrico.



Por lo tanto las líneas de campo eléctrico son ortogonales a las superficies equipotenciales.
Además, como el gradiente cambiado de signo indica (como se vio en Análisis II) la dirección de mayor decrecimiento de la función V, entonces sabemos que si nos movemos en la dirección del campo eléctrico nos dirigimos a zonas de menor potencial.

Esto es coherente a la definición de energía potencial que se venía manejando de Física I. Al depositar una carga en una zona del espacio afectado por un determinado campo eléctrico (con determinada energía potencial) esta se desplazará de manera tal que disminuya su energía potencial.
Aclaración: si cortamos las superficies equipotenciales con un plano, sobre el mismo tendremos líneas equipotenciales.

Primera Parte: Experiencia

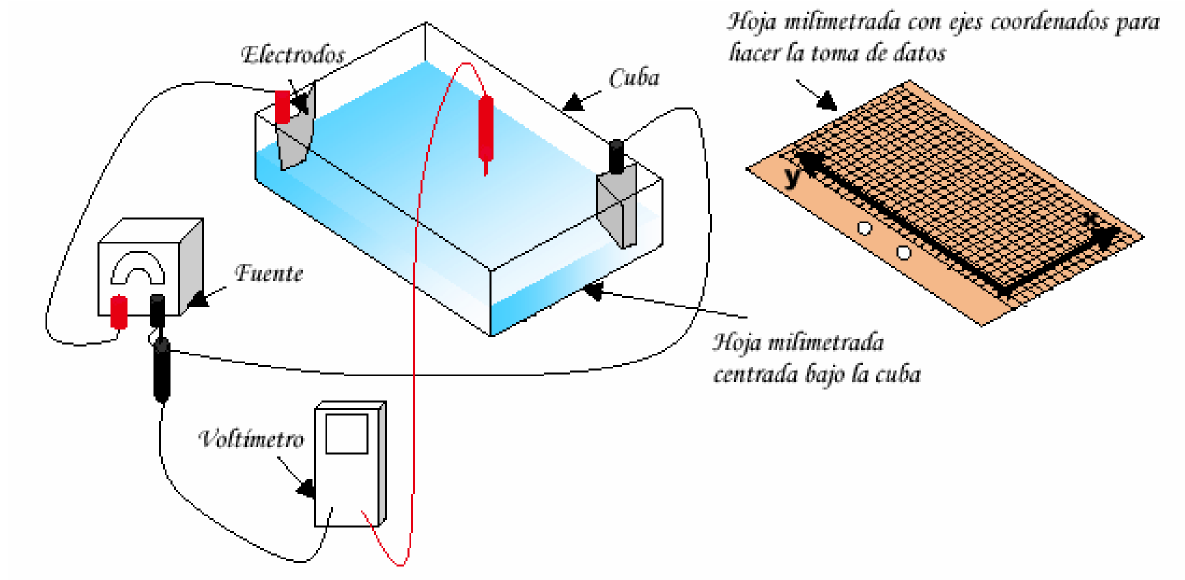
En un recipiente plástico (que llamaremos “cuba”) con dos electrodos (dos chapas metálicas de forma no regular) colocados en dos esquinas en diagonal, se introduce agua de red hasta una altura de unos dos centímetros. Los electrodos son conectados al borne negativo (negro) y positivo (rojo) de una fuente de alimentación ajustada para que la diferencia de potencial entre sus bornes sea de unos 12 V. A continuación se conecta el voltímetro con el que se miden las diferencias de potencial. Este es un aparato complejo a pesar de su apariencia simple y puede realizar varias medidas distintas. En el presente caso, dado que interesan las diferencias de potencial, se ubica la perilla selectora sobre la letra V. La misma también aparecerá en el display. Ahora se conecta el cable negro del voltímetro al terminal negro de la fuente y el cable rojo se usa para medir en distintos puntos dentro de la cuba. Conectado de esta manera, las lecturas del voltímetro serán siempre positivas.

ANTES DE PRENDER LA FUENTE, O ANTE CUALQUIER DUDA, CONSULTAR AL DOCENTE PARA QUE VERIFIQUE LAS CONEXIONES.

Se medirá la diferencia de potencial entre el electrodo conectado al cable negro y un punto de la cuba introduciendo el cable rojo del voltímetro en el agua de la cuba (verticalmente, cuidando el paralaje) apoyándolo sobre la base de la misma. Es decir, se medirá sobre una zona cuasi-plana (bidimensional en primera aproximación). Se determinará el campo eléctrico en distintos puntos de la base de la cuba procesando los datos obtenidos (diferencias de potencial). Para esto se determinará la diferencia de potencial sobre toda la superficie de la cuba a través del primer método. Con el segundo método se buscarán puntos dentro de la cuba donde la diferencia de potencial tome ciertos valores constantes, lo que dará una idea de la orientación de las líneas de campo.

MÉTODO 1: Se medirá la diferencia de potencial a intervalos regulares. Como estos intervalos no pueden ser determinados a priori (sin haber medido por lo menos algunas veces), se tomarán lecturas de la diferencia de potencial cada 1 cm. Se obtendrá así una matriz de datos.

MÉTODO 2: Se determinarán los lugares geométricos donde la diferencia de potencial con el electrodo conectado al borne negro del voltímetro sea de 4 V y de 8V.



Pregunta 2: En el segundo método, ¿cuántos puntos son necesarios y/o adecuados para determinarlos?

Los datos obtenidos por ambos métodos se dibujan en el mismo papel milimetrado.

Pregunta 3:¿Por qué no se puede establecer a priori el número de puntos que se deben medir?

Nota: Es conveniente sistematizar la toma de datos. Para ello tomar dos hojas milimetradas oficio y marcar los ejes coordenados *x,y* en dos de sus márgenes (en las dos hojas). Colocar una de ellas centrada bajo la cuba (ver esquema) marcando los electrodos. En la otra hoja milimetrada anotar los datos que vayan obteniendo de las mediciones. Se obtendrá una matriz de datos de aproximadamente 30x20, Se recomienda sacar una fotocopia de la hoja de datos, o, en su defecto escribir los datos con birome o tinta, ya que luego se dibujará sobre la hoja.

Pregunta 4: ¿Por qué se usa agua en esta experiencia? ¿Se podría medir la diferencia de potencial en el aire? ¿Sería mejor o peor usar agua destilada?

Procesamiento de datos

En primer lugar se estudiará la distribución de potencial. Para ello, y sobre la hoja milimetrada con los datos medidos, pintar franjas de potencial. El grupo debe discutir con argumentos, que se deben incluir en las conclusiones de este trabajo, el intervalo de estas franjas (por ejemplo: ancho de franja de xVolt, entonces la primera franja será de 0V-xV, la 2º de xV-2xV, la 3º de 2xV-3xV y así la última será de nxV-12V).

Como es sabido, el campo eléctrico cumple la relación

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

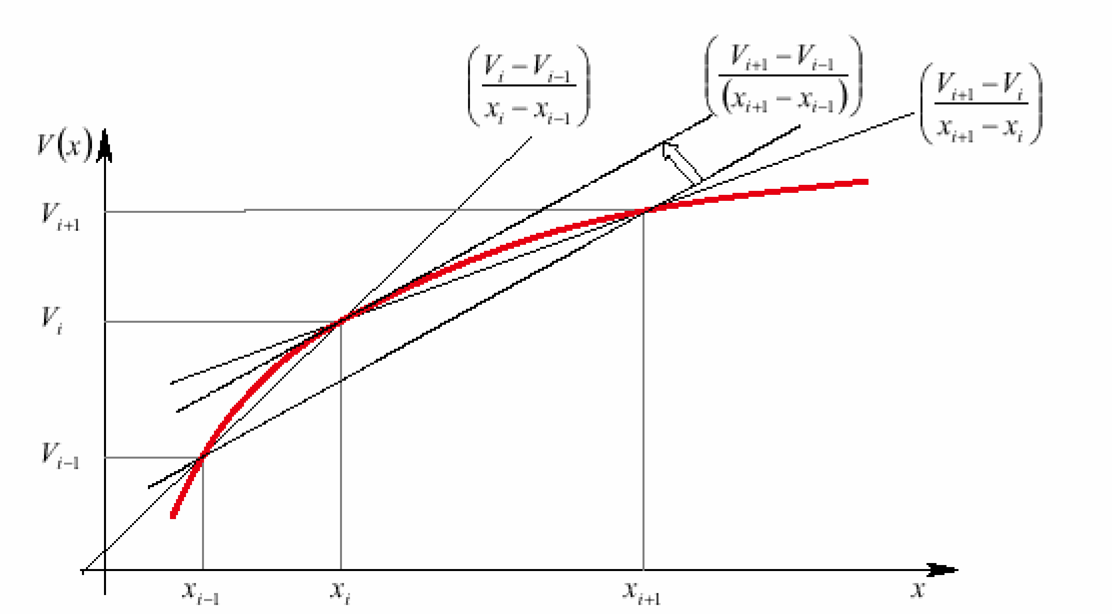
que en forma cartesiana, y para el plano, equivale a

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} \right) .$$

Sin embargo, no se dispone de la función potencial en forma analítica sino de puntos de ella en una grilla discreta (la hoja milimetrada). Se necesita entonces recurrir a una aproximación discreta de las derivadas. Es decir, a partir de datos experimentales de diferencia de potencial y mediante una resolución numérica de una ecuación diferencial, se obtendrá el campo eléctrico en distintos puntos del espacio.

Pregunta 5: Vieron que las distribuciones de carga crean campos eléctricos. ¿Qué es lo que produce el campo eléctrico que se quiere determinar en este caso?

Si se tiene una función $V = f(x, y)$ y se corta con un plano a *y*=cte (como muestra la figura), el valor de su derivada en el punto x_i puede calcularse numéricamente de diversas formas



Se puede tomar la pendiente de la recta entre las abscisas x_{i+1} y x_i, con lo que se obtiene la que se denomina aproximación en avance:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_i} \approx \frac{V_{i+1} - V_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Es posible también calcular la pendiente de la recta entre las abscisas x_i y $x_{i-1,}$ lo que da la llamada aproximación en retroceso:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_i} \approx \frac{V_i - V_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Pero tomando el promedio de ambas, se obtiene una aproximación de mejor calidad llamada aproximación centrada. En el caso en que los puntos x_i sean equidistantes (distancia *d*), se obtiene:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_i} \approx \frac{V_{i+1} - V_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{V_i - V_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \approx \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2\,d}$$

o sea que cuando los puntos son equidistantes el promedio de las pendientes en avance y retroceso no es más que la pendiente de la secante que pasa por los puntos (x_{i-1} , V_{i-1})

(x_{i+1} , V_{i+1}). En consecuencia, la componente x del campo eléctrico estará dada por

$$E_x\Big|_{x_i} \approx -\left(\frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2\,d}\right)$$

En los bordes de la grilla, donde no se dispone de alguno de los datos de avance o de retroceso, las expresiones aproximadas son (esto no se demostrará):

Aproximación borde izquierdo:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x_i} \approx \frac{-V_{i+2} + 4\,V_{i+1} - 3\,V_i}{2\,d}$$

Aproximación borde derecho:

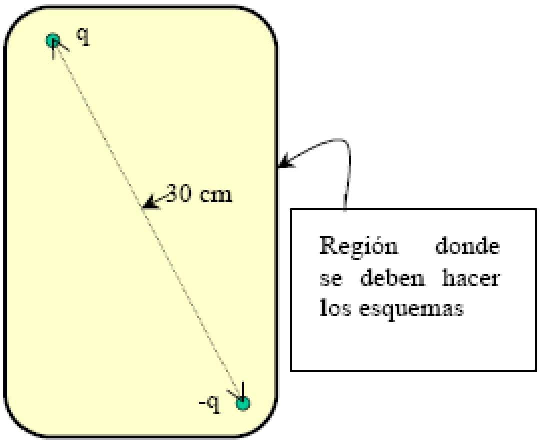
$$\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x_i} \approx \frac{3\,V_i - 4\,V_{i-1} + V_{i-2}}{2\,d}$$

Nota: Para obtener la componente E_y es el mismo tratamiento y expresiones, tan sólo reemplazando x por y. Luego resta tan sólo componer la suma vectorial

$$\vec{E} = E_x\,\hat{\imath} + E_y\,\hat{\jmath}$$

Pregunta 6: El modelo más simple y útil para describir una corriente es que son cargas en movimiento. En la experiencia, el voltímetro mide una corriente. ¿Se puede hablar, entonces, de campo electrostático?.

Calcular y graficar a escala el vector campo eléctrico (ambas componentes) sobre la hoja de los datos (donde ya estarán marcadas las franjas de potencial) en 10 puntos, de los cuales uno, por lo menos, deberá ser del borde.



Problema 1: *Se tiene un dipolo formado por dos cargas puntuales con |q| =0,1 nC y separados 30cm. Hacer un esquema de las líneas equipotenciales en la región comprendida entre las cargas (se recomienda hacer 5), indicando los valores de potencial en cada una de ellas. También dibujar líneas de campo eléctrico indicando el criterio usado para dibujarlas. Indicar orden de magnitud del campo eléctrico. ¡Cuidado con las unidades!*

Problema 2: *En la cuba, ¿cómo debe ser el vector campo eléctrico respecto de las líneas equipotenciales?¿Cuánto vale el trabajo necesario para llevar un ión (cuasi estáticamente y debido sólo a fenómenos eléctricos) de Cl- o de Na+ de un electrodo a otro? (carga de un electrón=1,6.10^{-19}C, separación entre los electrodos=30cm). Considerar que la diferencia de potencial entre los electrodos es de 12V.*

Comparar cualitativamente los resultados obtenidos en esta práctica con los obtenidos en una de las configuraciones del Trabajo Práctico No 1. Discutir los resultados obtenidos.

Segunda parte: Comparación de resultados (método experimental y método numérico)

Se simulará la distribución de campo dentro de la cuba con el programa *Qfield* para comparar luego los resultados obtenidos por ambos métodos:

Luego de iniciar el programa, se debe definir un nuevo problema de tipo electrostático con simetría *x-y* y un recinto de las dimensiones de la cuba. Luego se dibujan los electrodos utilizados aproximándolos como una sucesión de segmentos rectos. A los electrodos se les asignan potenciales de 0 y 12V, y al contorno una densidad de carga superficial de carga nula. Al resolver el problema, se dibujarán las líneas de campo y un mapa de colores de la distribución de potencial.
Se compararán los resultados experimentales con los devueltos por el programa *Qfield* cualitativa y cuantitativamente (el campo tan solo en los 5 puntos marcados anteriormente).

Para una explicación más detallada se puede consultar, por ejemplo “Electricidad y Magnetismo” de Sears.