

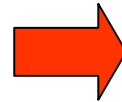
# RELATIVIDAD RESTRINGIDA

(A. Einstein en 1905)

## Situación general fines del siglo XIX?

Existían un conjunto de teorías físicas y químicas exitosas

- Mecánica clásica
- Electromagnetismo
- Termodinámica
- Óptica
- Hidráulica
- Mecánica estadística
- Química inorgánica
- etc



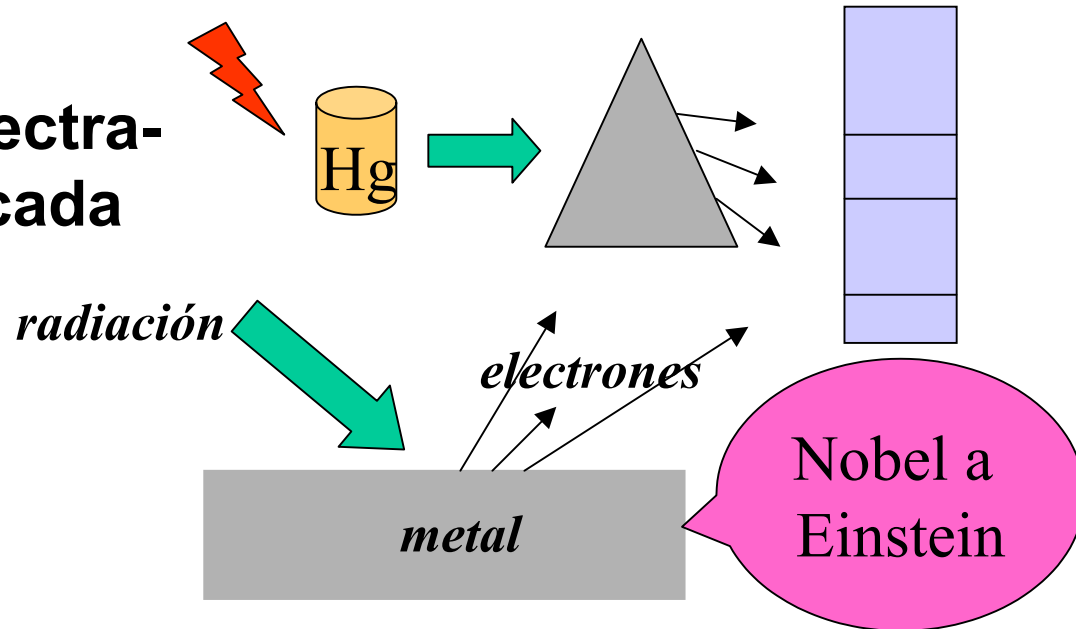
Quedará algo por descubrir?

Lord Kelvin (?) “ya está todo descubierto”

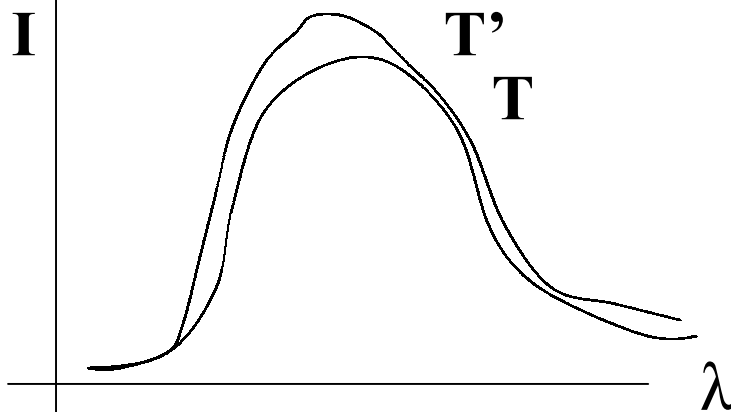
# Sin embargo, conjunto de hechos observables que no podían ser explicados con las teorías existentes

Familias de líneas espectrales características de cada elemento.

Efecto fotoeléctrico



Espectro de emisión térmica



La búsqueda de explicaciones a éstos hechos determinó el nacimiento de la Mecánica Cuántica (completada entre 1900 y 1925) (teoría adecuada para explicar lo que ocurre a escala atómica)

## Otro hecho quedaba pendiente:

Se pensaba que las ondas electromagnéticas (explicadas a partir de ecuaciones de Maxwell), se transmitían en un medio material a semejanza de ondas materiales conocidas (ondas en cuerdas y líquidos, acústicas, etc)



éter

Por analogía ese éter debería

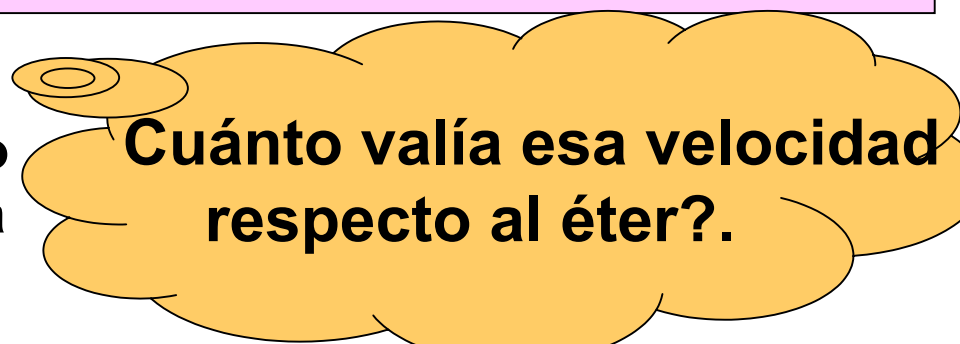
llenar todo el espacio (pues las ondas electromagnéticas llegaban de las estrellas),

no tener masa (pues los cuerpos celestes no parecían frenarse) pero si tener propiedades elásticas adecuadas para la transmisión de las ondas,

ser isotrópico pues no se observaban direcciones preferenciales en el espacio

**El éter parecía ser un sistema de referencia absoluto!!**

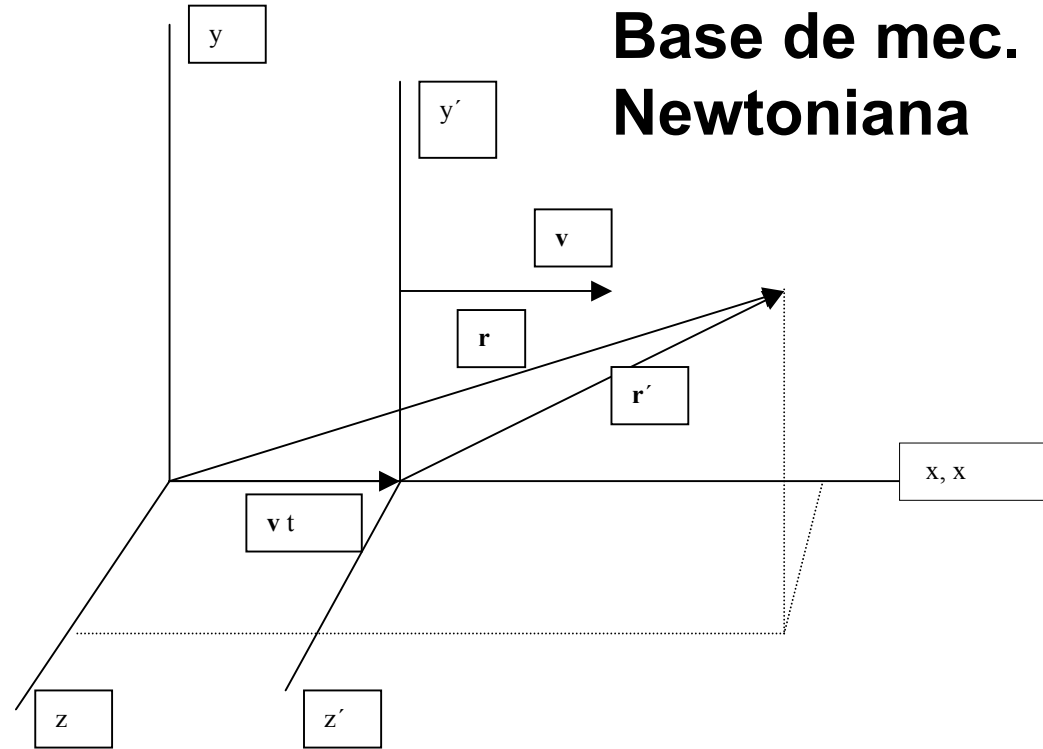
La velocidad de luz en la Tierra (supuestamente en movimiento respecto al éter) estaba medida ( $2,988 \cdot 10^8$  m/s)



**¿Cuánto valía esa velocidad respecto al éter?.**

# TRANSFORMACION DE GALILEO

Base de mec.  
Newtoniana



- Sist. fijo x,y,z; éter; donde la veloc. luz es c
- Sist. móvil (Tierra) x',y',z' donde veloc de la luz es c'
- La Tierra se mueve respecto al éter según el eje x a velocidad constante v

Leyes de la mecánica son las mismas en O y O' (se conservan o son invariantes)

$$(xyz): F_i = m \frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

$$(x'y'z'): F'_i = m \frac{d^2 x'_i}{dt^2} \Rightarrow F_i = F'_i$$

p ( $\neq$  en ambos sistemas) se conserva en los choques; la energía cinética ( $\neq$  en ambos sistemas) se conserva si no hay fuerzas disipativas, etc.

## Transformación de Galileo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v} \cdot t \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V}' + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v} \cdot t$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \quad \mathbf{z}' = \mathbf{z} \quad t' = t$$

# EXPERIENCIA DE MICHELSON-MORLEY

Long. espejo-A = Long. espejo-B = L  
 $c$  (éter) =  $c'$  (tierra) +  $v$  (velocidad de arrastre)

$$t_x (\text{espejo-A-espejo}) = L/c' + L/c''$$
$$[L / (c - v)] + [L / (c + v)]$$

$$t_x = 2 L c / (c^2 - v^2)$$

$$\underline{t_x = (2 L / c) / (1 - v^2/c^2)}$$

$$t_y (\text{espejo-B-espejo}) = 2 L / c'$$

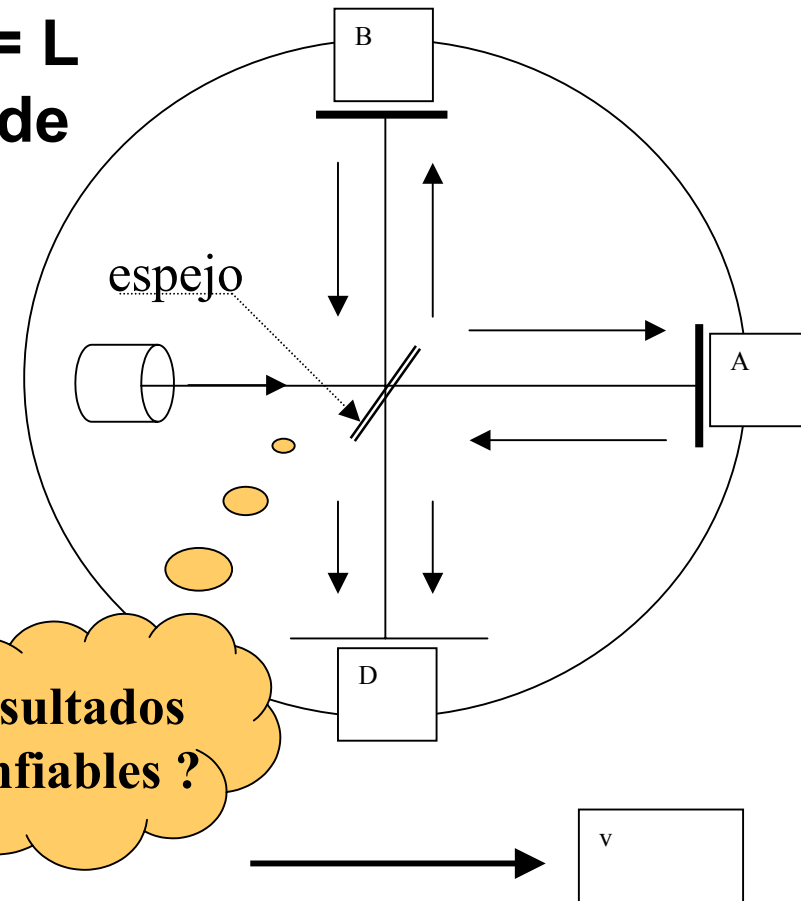
pero

$$c^2 = c'^2 + v^2$$

$$c' = (c^2 - v^2)^{1/2}$$

$$t_y = 2 L / (c^2 - v^2)^{1/2}$$

$$\underline{t_y = (2 L / c) / (1 - v^2 / c^2)^{1/2}}$$



$t_x \neq t_y \Rightarrow$  figuras de interferencia en D observables

**No se observan**

**A. Einstein** (en junio 1905, con 26 años, empleado de la oficina postal de Berna) envía un artículo al **Annals of Physics** (editado por Max Planck) **que modifica toda nuestra concepción del espacio y el tiempo**

Se basaba en una idea que lo venía preocupando desde 10 años antes (cuando tenía 16!!)

Maxwell, que había tenido éxito uniendo la electricidad y el magnetismo en una sola teoría, el electromagnetismo, había mostrado también que la luz era una onda electromagnética; como tal con una particularidad: **en vacío siempre se desplazaba a  $c$**

**Que pasa si alcanzo un haz de luz?**

Aparentemente debería estar en reposo respecto a mi pero eso contradecía la experinecia de M-M y todas las observaciones sobre la luz conocidas

# POSTULADOS DE EINSTEIN

Desde Galileo se sabía que las leyes de la Mecánica eran las mismas en todos los sistemas inerciales

- se podía tener distintos valores de energía cinética pero la energía se conservaba,
- se podía tener distintos valores de impulso pero el impulso se conservaba, etc

Einstein generalizó esto a toda la física

1) Las leyes de la física son iguales en todos los referenciales inerciales

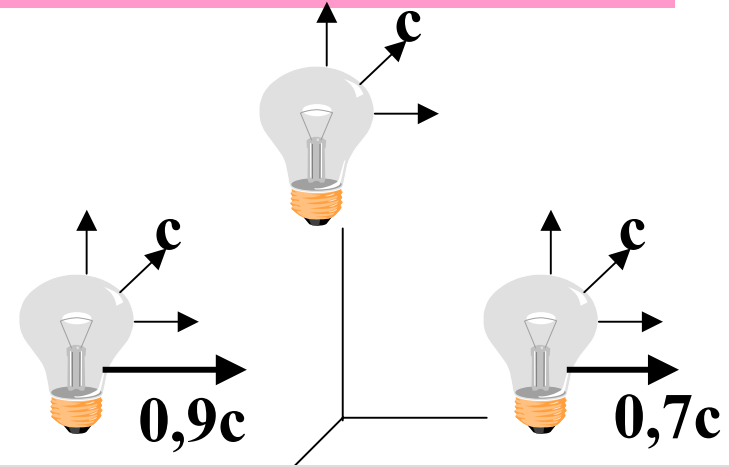
No existe un referencial absoluto

2º) La velocidad de la luz en todos los referen-  
ciales inerciales es la misma  $\Rightarrow c = c'$

**Consecuencias?**

3 fuentes, una en reposo respecto  
al observador, otra que se acerca  
a  $0,9c$  y otra que se aleja a  $0,7c$

Para el observador la  
velocidad de la luz  
emitida por las tres  
fuentes es la misma!



Y si en lugar de lámparas  
“disparando” luz fueran aviones  
disparando balas?

Contradicción? Puede que no: que a bajas velocidades  
funcione la mecánica Newtoniana y a altas velocidades  
no. Velocidades máximas alcanzadas: satélite:  $8000 \text{ m/s}$  o  
 $28.800 \text{ Km/h}$ , o sea  $0,000027 c$

**$\Rightarrow$  la Mecánica Newtoniana debe ser parte de una Mecánica  
más general.**



**Leyes del electromagnetismo cambian de forma al pasar de un sistema a otro usando las transformaciones de Galileo**

**Necesario transformación más general que resuelva esto, pero confluya hacia Transformación de Galileo en el límite de las bajas velocidades**

## TRANSFORMACIONES DE LORENTZ (coordenadas)

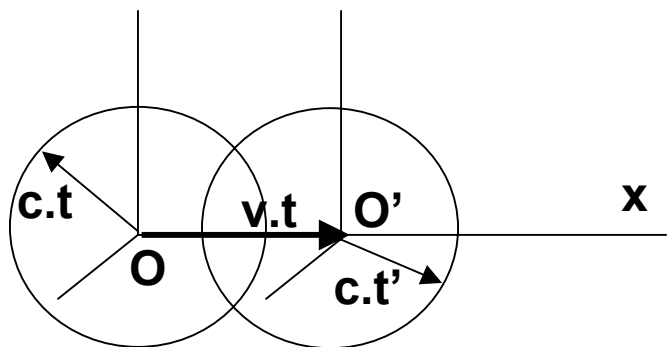
Dos sistemas en movimiento relativo  $v$  según  $x$  tienen sus orígenes coincidentes en  $t = t' = 0$ . Y en ese momento se enciende una lámpara situada en ambos orígenes.

En el sistema  $O'$  a un tiempo  $t'$ , el frente de onda esférico tiene coordenadas para cualquiera de sus puntos dado por

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 \cdot t'^2 \quad [1]$$

pero igual argumento vale para el sistema  $O$  ya que  $c = c'$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \cdot t^2 \quad [2]$$



Por razones de simetría

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$OO' = v \cdot t$  para el observador  $O$ ,  
o sea  $x = v \cdot t$  para  $x' = 0$

**Esto sugiere**             $x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$  ( $\gamma$  cte. a determinar)  
                                  $t' = a \cdot (t - b \cdot x)$  ( $a$  y  $b$  ctes. a determinar)

**(en la transformación de Galileo  $\gamma = a = 1, b = 0$ )**

**reemplazando en [1]**

$$\gamma^2(x^2 - 2 \cdot v \cdot t \cdot x + v^2 \cdot t^2) + y^2 + z^2 = c^2 a^2 \cdot (t^2 - 2 \cdot b \cdot x \cdot t + b^2 \cdot x^2)$$

**y agrupando**

$$x^2 \cdot (\gamma^2 - c^2 \cdot a^2 \cdot b^2) + y^2 + z^2 - 2 \cdot x \cdot t \cdot (\gamma^2 v - b \cdot c^2 \cdot a^2) = c^2 \cdot t^2 \cdot (a^2 - \gamma^2 \cdot v^2 / c^2)$$

**que deberá ser igual a [1], por lo que**

$$(\gamma^2 - c^2 \cdot a^2 \cdot b^2) = 1, \quad (\gamma^2 v - b \cdot c^2 \cdot a^2) = 0, \quad (a^2 - \gamma^2 \cdot v^2 / c^2) = 1$$

**Resolviendo este conjunto de tres ecuaciones con tres incógnitas se tiene**

$$\gamma = a = 1 / (1 - v^2 / c^2)^{1/2}, \quad b = v / c^2$$

**Las transformaciones de Lorentz quedan**

$$x' = (x - v.t) / (1 - v^2 / c^2)^{1/2}$$

$$y' = y \quad z' = z$$

$$t' = (t - v.x / c^2) / (1 - v^2 / c^2)^{1/2}$$

**Ecuaciones de transformación de Lorentz tienden a las de Galileo cuando  $v \rightarrow 0$**

$$x' = x - v.t$$

$$y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

# TRANSFORMACIONES DE LORENTZ (v y a)

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad V_y = \frac{dy}{dt} \quad V_z = \frac{dz}{dt} \quad V'_x = \frac{dx'}{dt} \quad V'_y = \frac{dy'}{dt} \quad V'_z = \frac{dz'}{dt}$$

## Diferenciando transformación de Lorentz

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{V_x - v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} dt \quad (dx = V_x dt) \quad dy' = dy \quad dz' = dz$$

$$dt' = \frac{dt - v dx / c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{1 - v V_x / c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} dt$$

$$\begin{aligned} x' &= (x - v.t) / (1 - v^2 / c^2)^{1/2} \\ y' &= y \quad z' = z \\ t' &= (t - v.x / c^2) / (1 - v^2 / c^2)^{1/2} \end{aligned}$$

dividiendo las tres primeras ecuaciones por la cuarta

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - v V_x / c^2} \quad V'_y = \frac{V_y \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1 - v V_x / c^2} \quad V'_z = \frac{V_z \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1 - v V_x / c^2}$$

Cuando el movimiento es a lo largo del eje x se tiene

$$V_x = V, \quad V_y = V_z = 0, \quad V'_x = V', \quad V'_y = V'_z = 0$$

$$V' = \frac{V - v}{1 - v V / c^2}$$

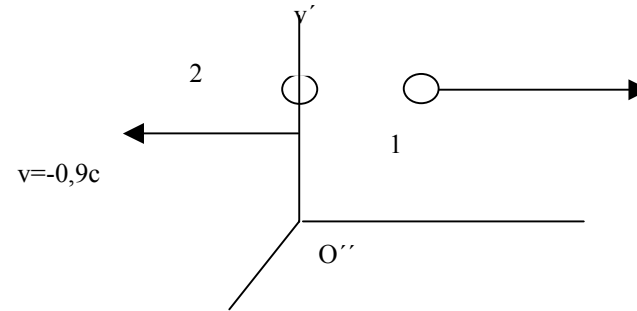
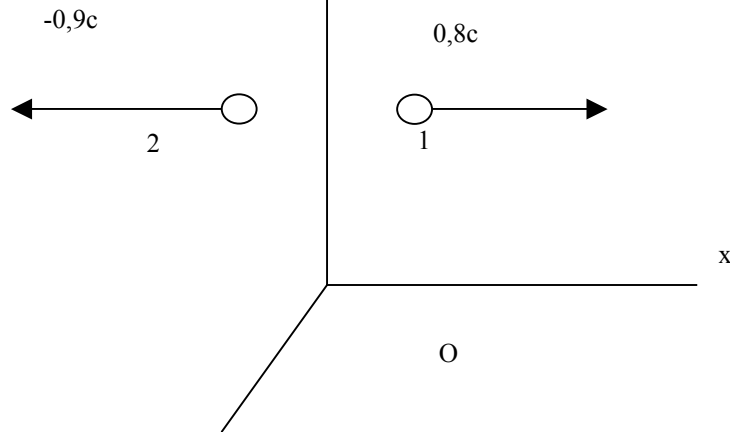
**Para obtener la expresión de la aceleración se diferencia primero la expresión anterior**

$$V' = \frac{V - v}{1 - vV/c^2}$$

$$dV' = \frac{dV[(1 - vV/c^2) - (V - v)(-v/c^2)]}{(1 - vV/c^2)^2} = \frac{(1 - v^2/c^2)}{(1 - vV/c^2)^2} dV$$

$$a' = \frac{dV'}{dt'} = \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - vV/c^2)^3} \frac{dV}{dt}$$

# Aplicación: es imposible elegir V y v tal que v' sea mayor que c.



$$V'_{1x} = \frac{V_{1x} - v}{1 - \frac{vV_{1x}}{c^2}}$$

Sea sistema  $O$  donde la partícula 1 se mueve en dirección  $x$  positiva con  $0,8c$  y la partícula 2 en dirección  $x$  negativa con  $-0,9c$ . Vamos a evaluar la velocidad de la partícula 1 medida desde un sistema  $O'$  que se mueve con la partícula 2

[clásicamente  $V' = V - v = 0,9c - (-0,8c) = 1,7c$ ]

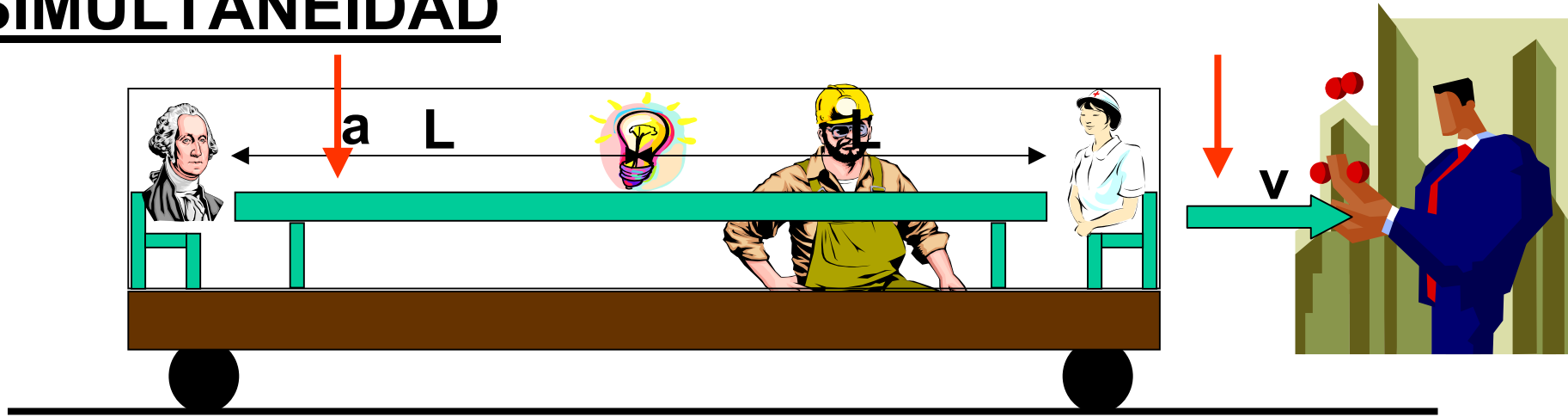
siendo  $v$  la velocidad del sistema móvil ( $O'$ ) respecto al fijo ( $O$ ), o sea  $-0,9c$  y  $V_{1x}$  la velocidad del cuerpo respecto al sistema  $O$ , o sea  $0,8c$

$$V'_{1x} = \frac{0,8c - (-0,9c)}{\left(1 - \frac{(-0,9c)0,8c}{c^2}\right)} = \frac{1,7c}{1,72} = 0,99c$$

Si  $0,99$  ambas,  $V' = 0,99995c$

**$c$  es un límite superior de velocidad para cualquier situación de movimiento relativo**

# SIMULTANEIDAD



## Desde arriba del vagón

**C es unica, L es la misma  
=>Ambas personas en los  
extremos de la mesa ven  
simultaneamente que se  
enciende la lámpara**

## Desde la estación

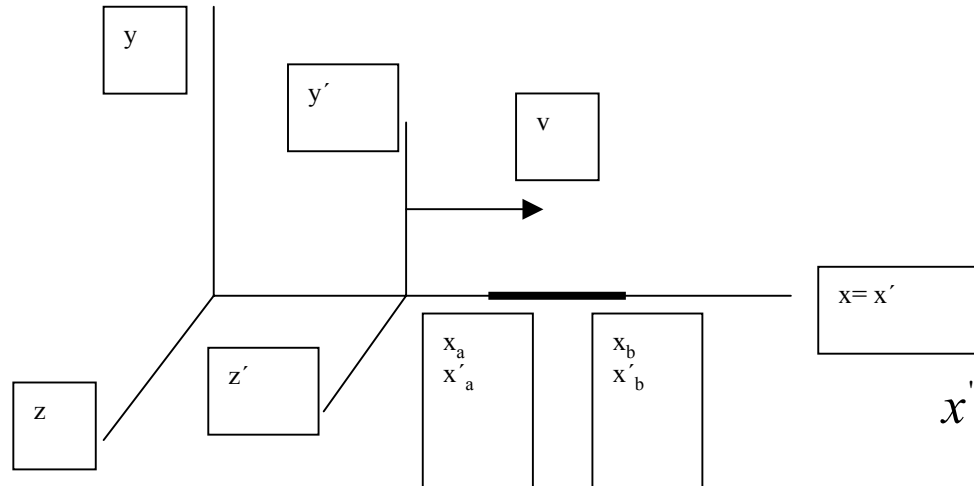
**C es unica pero finita, L  
es la misma =>cuando luz  
alcanza al hombre éste  
está corrido (en a; la luz  
recorre menor distancia) y  
con la mujer a la inversa**

**Acontecimientos simultáneos para un observador no lo son para el otro; depende del estado de movimiento del observador.**



# CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD

**Longitud: distancia entre dos puntos. Si objeto está en reposo la posición de cada punto puede medirse en cualquier momento, pero si está en movimiento deben medirse simultáneamente**



**barra en reposo en O'; observador en O debe medir  $x_a$  y  $x_b$  en el mismo tiempo  $t$**

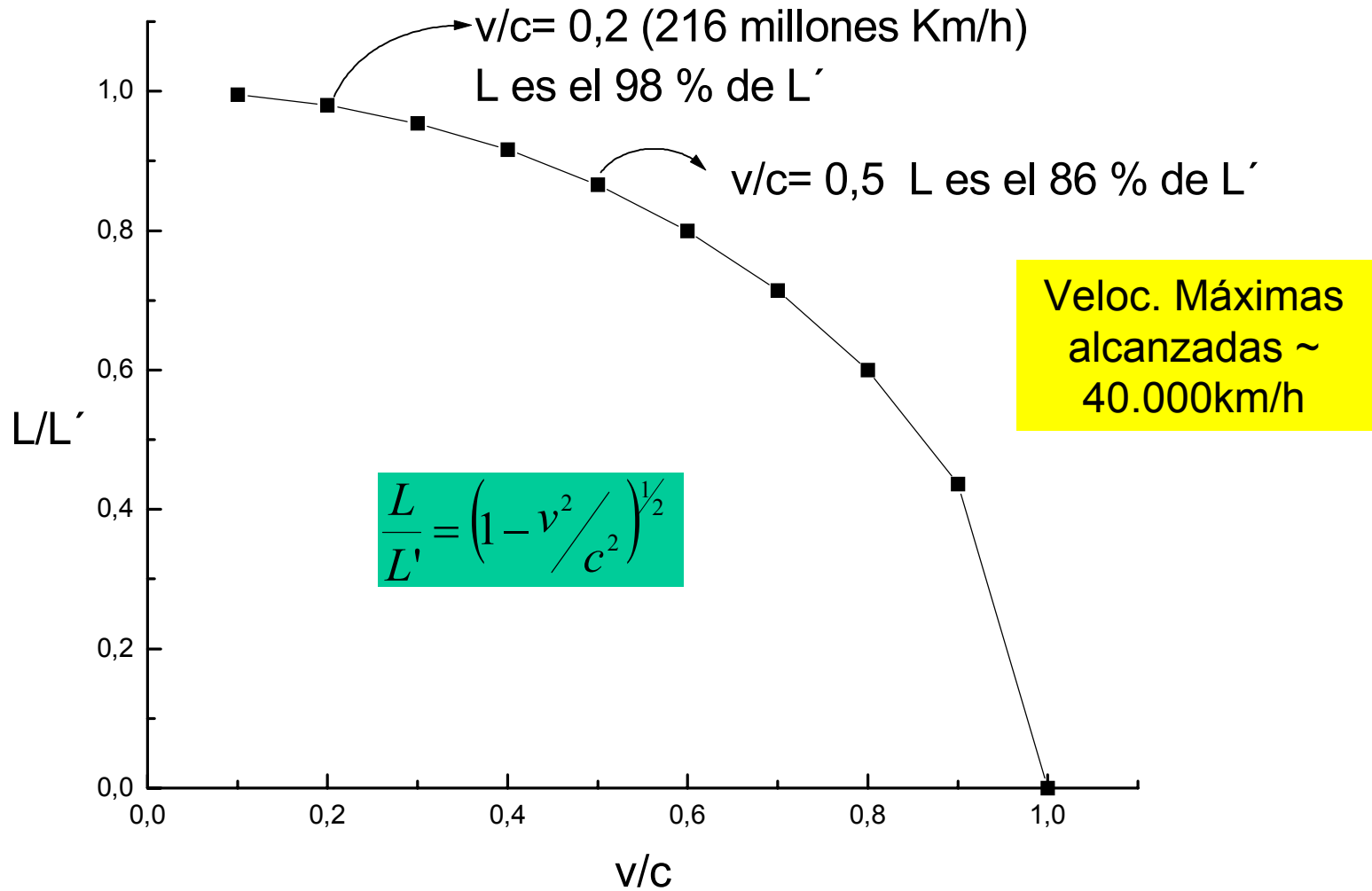
$$x'_a = \frac{x_a - vt}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}$$

$$x'_b = \frac{x_b - vt}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}$$

**$L < L'$  la longitud de un cuerpo parece más corta cuando el cuerpo está en movimiento relativo con respecto al observador que cuando está en reposo. En el límite de  $v \rightarrow c$ , la longitud que mide el observador en O  $\rightarrow 0$ .  $L'$  se conoce como "longitud propia"**

$$x'_b - x'_a = \frac{x_b - x_a}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}$$

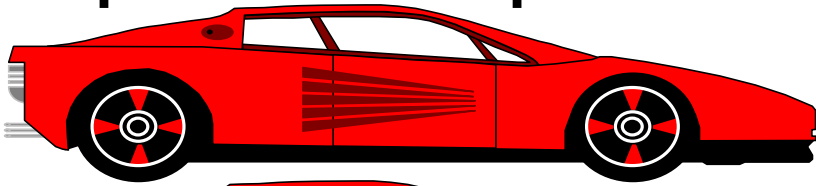
$$L = \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} L'$$



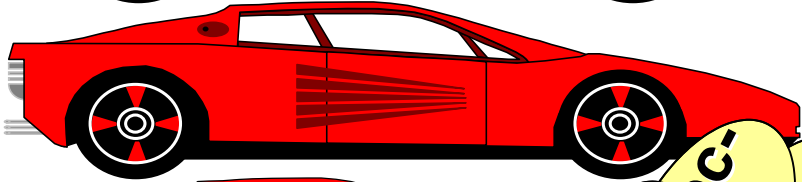
**L': "Longitud propia"**

# Ejemplo: caso en que $c = 100$ Km/h

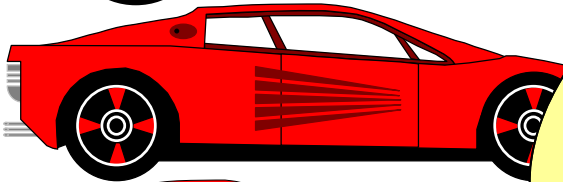
$$\frac{L}{L'} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$



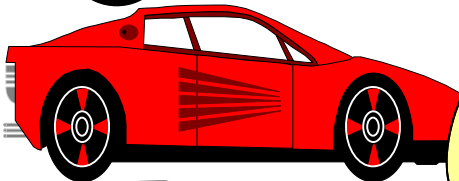
$V=0$  Km/h,  $L / L'. 100 = 100$  %



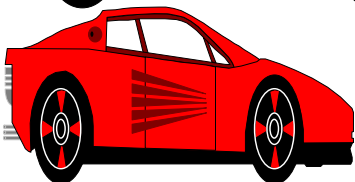
$V=20$  Km/h,  $L / L'. 100 = 98$  %



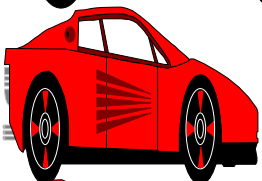
$V= 50$  Km/h,  $L / L'. 100 = 86$  %



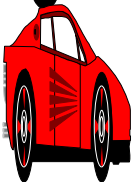
$V= 80$  Km/h,  $L / L'. 100 = 60$  %



$V= 90$  Km/h,  $L / L'. 100 = 43$  %



$V= 95$  Km/h,  $L / L'. 100 = 31$  %



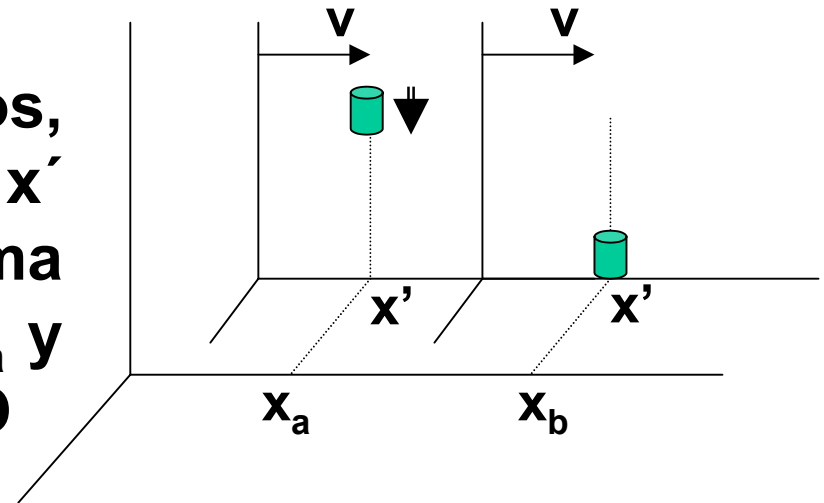
$V= 99$  Km/h,  $L / L'. 100 = 14$  %

$V= 100$  Km/h,  $L / L'. 100 = 0$  %

No es una cuestión de perspectiva ni nada parecido!!  
Es una contracción real de longitud!!

# DILATACIÓN DEL TIEMPO

**Intervalo:  $\Delta t$  entre dos eventos, que ocurren en un mismo punto  $x'$  en tiempos  $t'_a$  y  $t'_b$  en el sistema  $O'$  y en dos puntos diferentes  $x_a$  y  $x_b$  en tiempos  $t_a$  y  $t_b$  en sistema  $O$**



**La transformación de Lorentz inversa se obtiene tomando la 1a y 4a de las ecuaciones de dicha transformación y resolviendo algebraicamente. Más intuitivamente, para el observador en  $O'$  es como si el sistema  $O$  se estuviera moviendo con  $-v$ , por lo que solo hay que cambiar  $-v$  por  $v$  y  $(x,t)$  por  $(x',t')$**

$$x = \frac{x' + vt'}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}$$

$$t_a = \frac{t'_a + vx'_a/c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} \quad t_b = \frac{t'_b + vx'_b/c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} \quad t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}$$

$$T \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} = T'$$

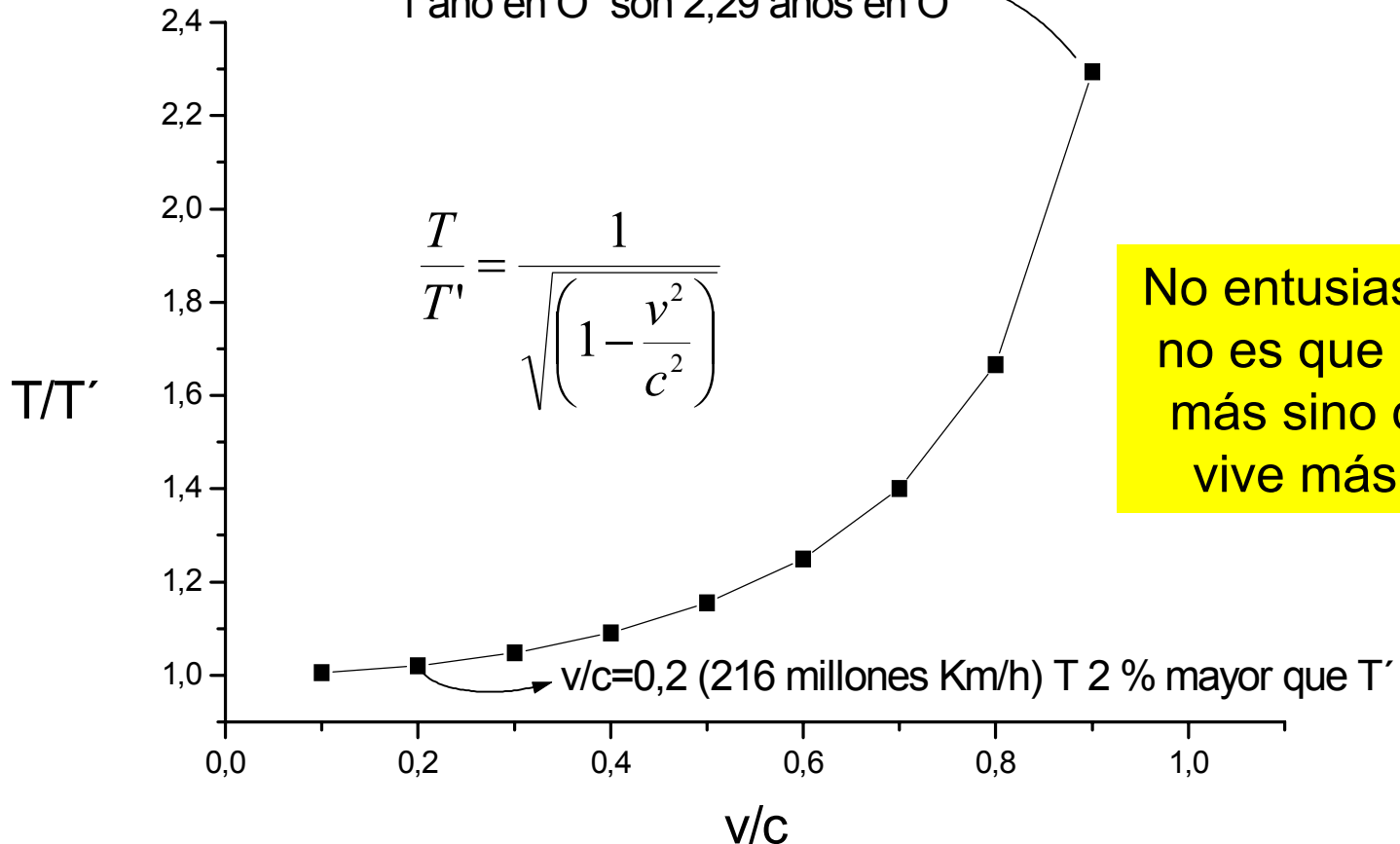
dos sucesos parecen tardar más (el intervalo de tiempo entre ellos es más largo) cuando ocurren en un sistema que está en movimiento respecto al observador que cuando ocurren en un sistema que está en reposos respecto al observador

$$T \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = T'$$

$$T > T',$$

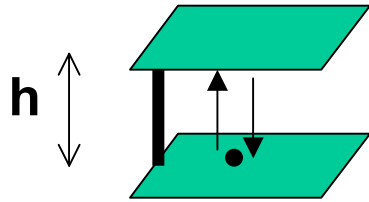
T': "tiempo propio"

$v/c = 0,9$  T es 2,29 mayor que T'  
1 año en O' son 2,29 años en O



No entusiasmarse, no es que se vive más sino que se vive más lento

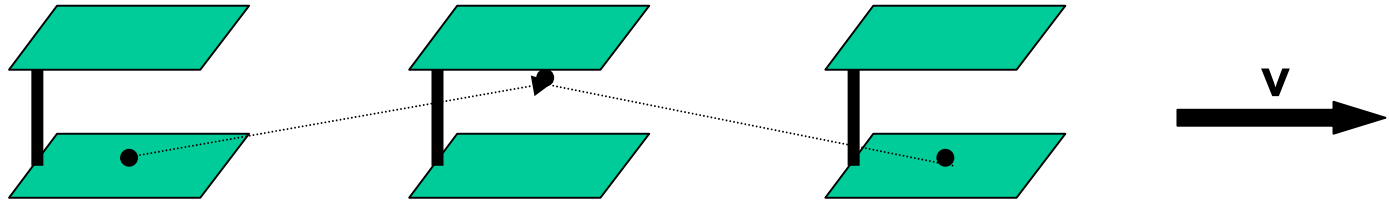
# Otra forma de verlos, con un Reloj de Luz



Reloj en reposo, cada click es subir, reflejarse y volver

$$t_{est} = \frac{2h}{c}$$

Reloj en movimiento



$$2\sqrt{(v t_{mov} / 2)^2 + h^2} / c = t_{mov} \Rightarrow 4 \left( \frac{v^2 t_{mov}^2}{4} \right) + 4 h^2 = c^2 t_{mov}^2$$

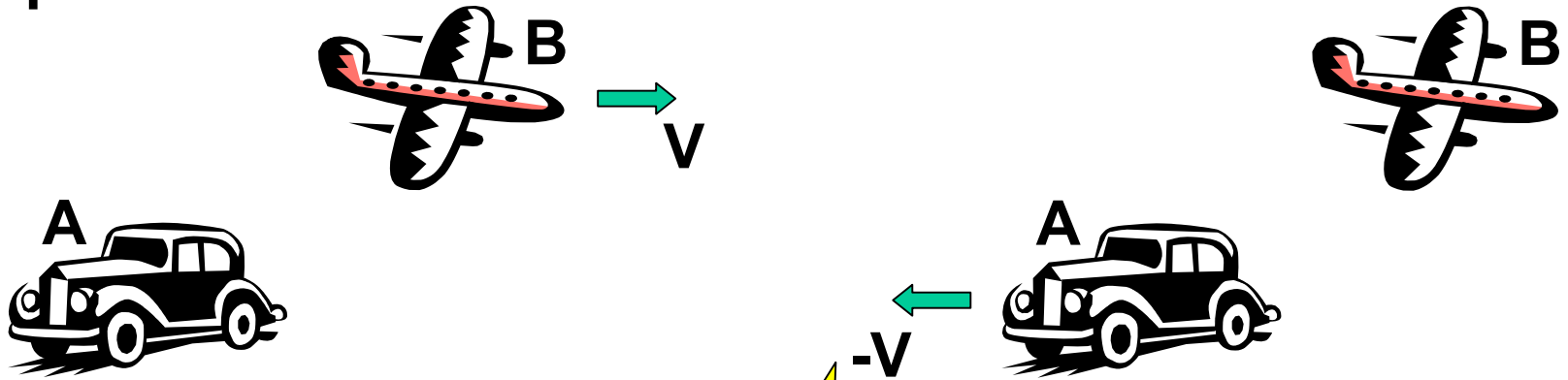
$$t_{mov}^2 (c^2 - v^2) = 4 h^2 \Rightarrow t_{mov} = 2 h / (c^2 - v^2)^{1/2}$$

$$t_{mov} (c^2 - v^2)^{1/2} = t_{est} c \Rightarrow t_{mov} = t_{est} / \sqrt{1 - (v^2 / c^2)}$$

Ojo al comparar:  $t_{est}$  es el T' de antes (el t en el sistema que se mueve)

**Observador en reposo ve reloj que se mueve más lento**

# Complicaciones



A ve que B se mueve y => que el reloj de B anda más lento

B ve que A se mueve y => que el reloj de A anda más lento

Para definirlo uno tiene que alcanzar al otro a fin de cotejar relojes => a y cambia todo (el que acelera no puede decir que está en reposo)

Otra forma: por alguna señal: cuando se cruzan sincronizan relojes y a la hora mandan señal (que viaja a c). Cuando se calcula, el que recibe la señal ve que el reloj del otro atrasa

**Ambos tienen razón**

## Ejemplo de la vida real

Avión moderno viajando entre dos ciudades a 4800 Km (SF-NY, M-M)

$$v = 1080 \text{ Km/h} = 300 \text{ m/s}$$

Desde Tierra: intervalo entre salida de un punto y llegada a otro en dos tiempos distintos, o sea  $T$  de

$$T \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = T'$$
$$T = \frac{4,8 \cdot 10^6 \text{ m}}{300 \text{ m/s}} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ seg} \quad (\text{aprox. } 4,5 \text{ hs})$$

Desde el avión: las dos ciudades “pasan” debajo en el mismo punto del sistema de referencia (avión), y el intervalo de tiempo es un tiempo propio dado por

$$T' = T \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = 1,6 \cdot 10^4 \sqrt{\left(1 - \frac{300^2}{(3 \cdot 10^8)^2}\right)} = 1,6 \cdot 10^4 (1 - 0,5 \cdot 10^{-12}) \text{ seg}$$

Tiempo propio es menor que el medido en tierra en menos de una parte en  $10^{12}$ !!

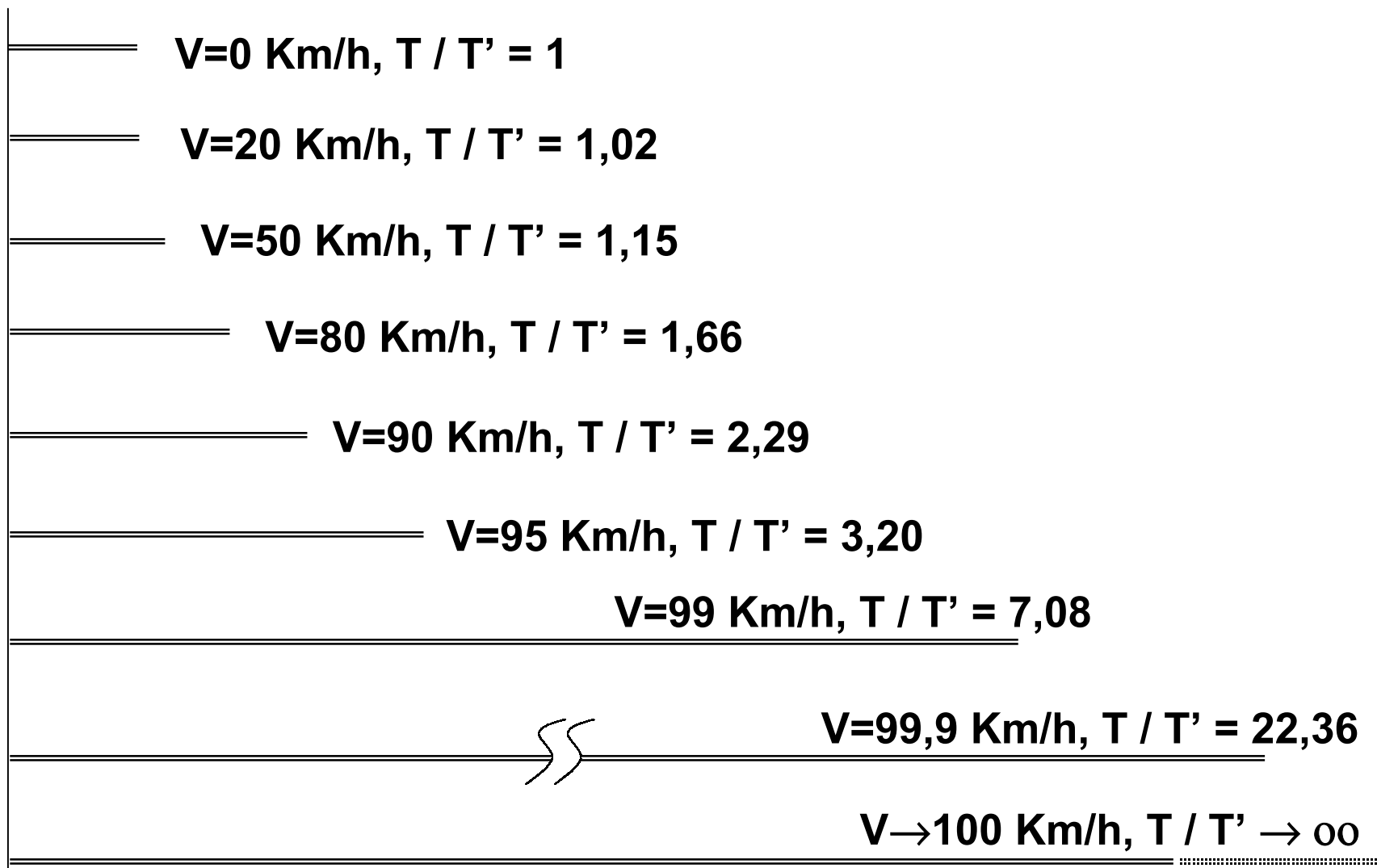
**Efectos relativistas son indetectables en la vida diaria**

Relojes atómicos (Cs) tienen precisión de  $10^{13}$ . Usados para medir efectos relativistas en aviones comunes



# Ejemplo: caso en que $c = 100 \text{ Km/h}$

Evento: caída de un objeto



# Verificación experimental de la contracción de longitud y dilatación del tiempo (una de tantas)

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Muón:  $m = 207m_e$ ,  $\tau = 1,5 \cdot 10^{-6}$  s [Si  $N$  muones, en  $\tau$  quedan  $N/2$  y en  $n\tau$   $N(1/2)^n$ ]. Colisiones de rayos cósmicos en la atmósfera, a  $h = 60$  Km, producen muones, que inciden sobre la Tierra con  $v = 0,999c = 2,9949 \cdot 10^8$  m/s. Para un observador terrestre el tiempo que tardan en llegar a la superficie es de

$$t = \frac{6 \cdot 10^4 \text{ m}}{2,9949 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \cong 2 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 133 \tau \Rightarrow N(1/2)^{133} \text{ muones a N.M. } \mathbf{FALSO}$$

Explicación relativista. El tiempo propio, o sea el tiempo que tardan los muones en cruzar la atmósfera medido en un sistema que viaja con ellos es

$$t' = t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s} (1 - 0,999^2)^{1/2} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 6 \tau \Rightarrow N(1/2)^6 = N / 64 \text{ muones a N.M. } \mathbf{CIERTO}$$

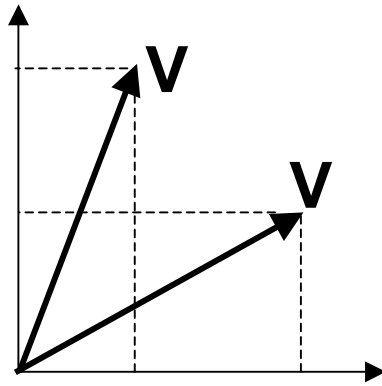
Otra forma de verlo: respecto al sistema de referencia de los muones, la Tierra se mueve hacia ellos a  $v = 0,999c$ , por lo que la distancia entre la parte superior de la atmósfera y la Tierra sufre una contracción de longitud dado por

$$L_{\text{muon}} = L \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = 6 \cdot 10^4 (1 - 0,999^2)^{1/2} = 2682 \text{ m} \quad t' = \frac{2682 \text{ m}}{2,9949 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 6 \tau$$

# ESPACIO-TIEMPO

**Einstein: nos movemos en un mundo de 4 dimensiones, 3 espaciales y 1 temporal (necesitamos 4 datos para una ubicación completa: 3 coordenadas espaciales y el tiempo)**

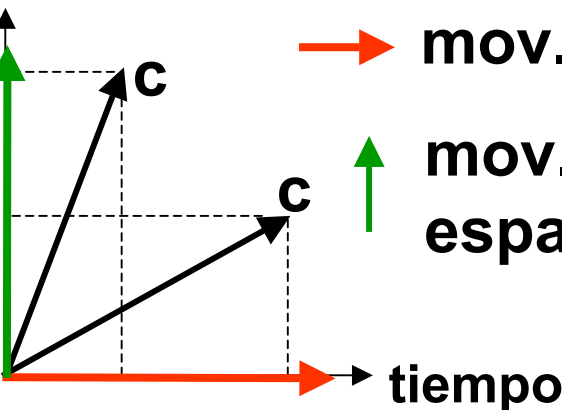
En  $E^3$



**En 2 (ó 3) dimensiones espaciales, una velocidad fija  $V$  se “reparte” en las 2 dimensiones según la dirección que tenga**

**Einstein: En el espacio-tiempo todos los objetos se mueven a la misma velocidad, la velocidad de la luz**

espacio

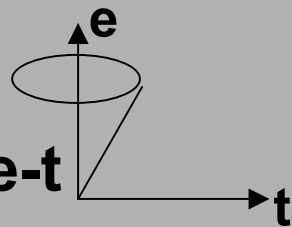


En  $E^4$   
idem

→ mov. en dimensión  $t$ , pero quieto en  $e$

↑ mov. en espacio a  $c$  (máxima velocidad espacial), **el  $t$  no transcurre**

Zona prohibida en e-t



# MOMENTO RELATIVISTA

Clásicamente  $\Delta p = m \cdot \Delta v = 0$  en las colisiones. Idem desde  $O'$  usando TG.

Pero con TL esto no ocurre  $\Rightarrow$  no se conserva el impulso o no vale la expresión anterior de impulso ( $p = m \cdot v$ )

PR: todas las leyes de la naturaleza deben ser las mismas para todos los observadores inerciales (sistemas equivalentes ya que no existe un referencial absoluto).

**O sea el impulso debe conservarse en todos los sistemas inerciales**

**Pero  $c$  es cte para todos los observadores en movimiento relativo constante => estos deben correlacionar sus observaciones mediante las TL. Así, todas las magnitudes físicas deben transformarse de un sistema a otro mediante las TL de forma tal que la expresión de las leyes de la física sea la misma para todos los observadores inerciales.**

**O sea, el impulso debe conservarse en todos los sistemas en movimiento relativo constante, para lo cual hay que modificar su expresión para que ello ocurra**

**experimentalmente**

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \Delta p = \int F dt$$

**Se pueden ejercer fuerzas sobre partículas en movimiento rápido (para partículas lentas, resultados clásicos) mediante campos eléctricos y magnéticos e integrarlas en intervalos de tiempo obteniendo valores del impulso.**

**Tales medidas indican que**

**Se puede pensar entonces que en el sistema O, respecto al cual la partícula se está moviendo con velocidad v (el sistema O' estaría montado sobre la partícula) la masa de la partícula ya no es  $m_0$  sino**

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

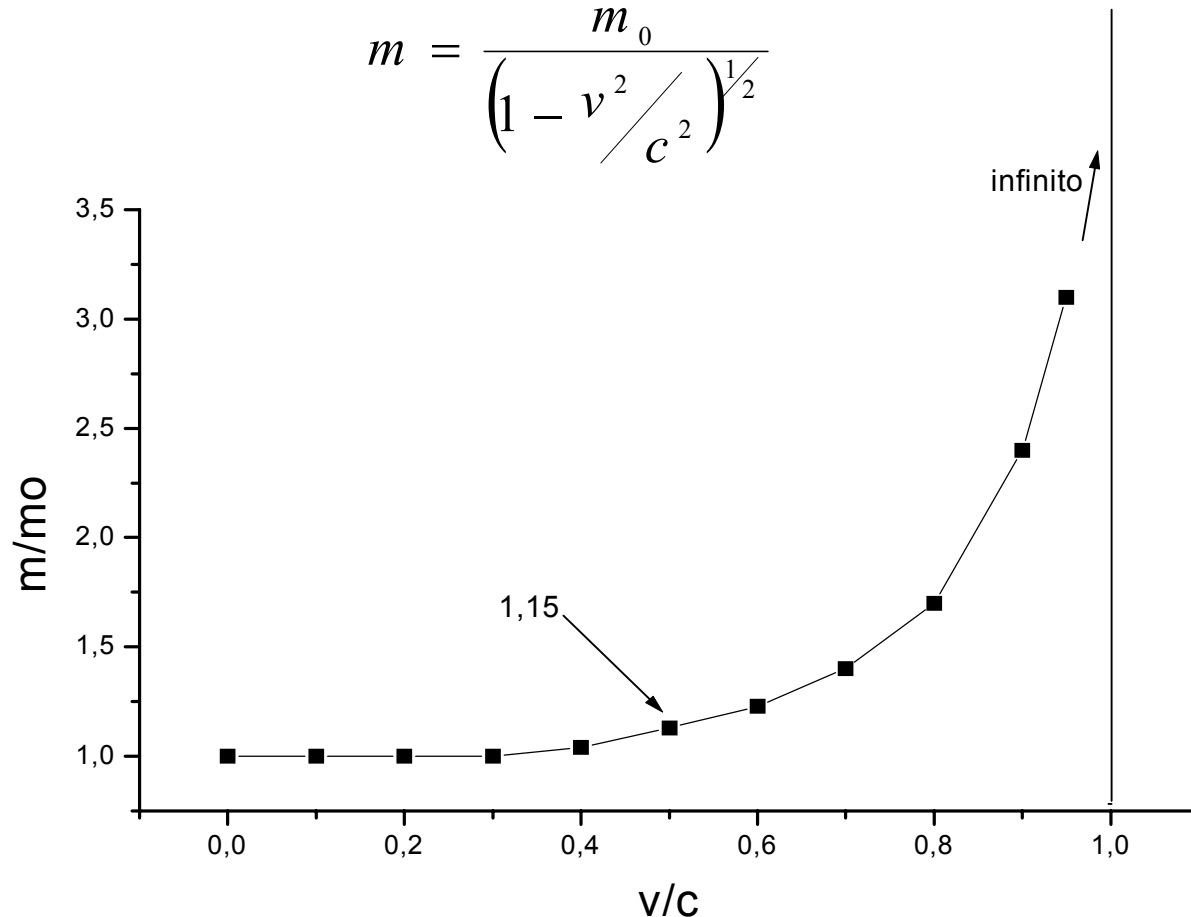
$m_0$ : masa medida en sistema en que esta se encuentra en reposo

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad F = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \sum_i \vec{p}_{inicial} = \sum_i \vec{p}_{final}$$

En resumen, la masa de los cuerpos medidas por un observador respecto al cual estos están en movimiento depende de la velocidad de esos cuerpos!.

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

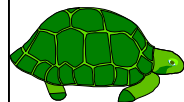


# Ejemplo: caso en que $c = 100 \text{ Km/h}$

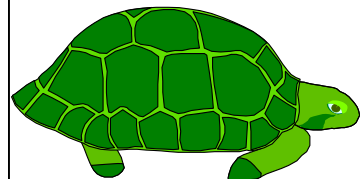
Evento: un objeto a  $\neq$  velocidades



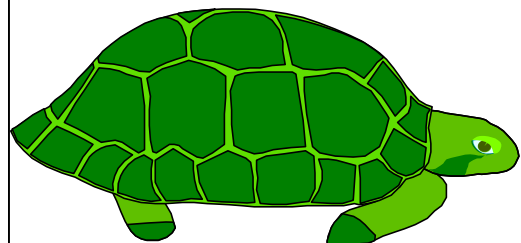
$V=0, m/m'=1$



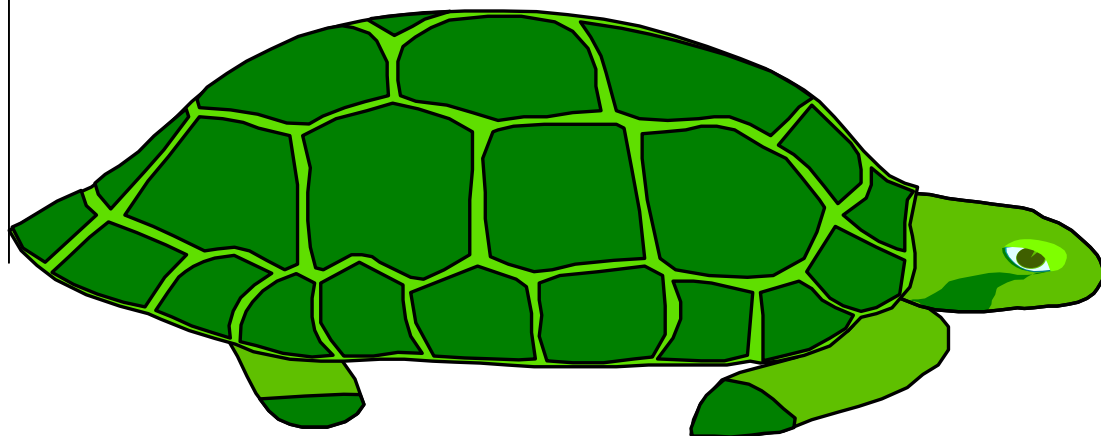
$V=50 \text{ Km/h}, m/m'=1,15$



$V=90 \text{ Km/h}, m/m'=2,29$



$V=95 \text{ Km/h}, m/m'=3,20$

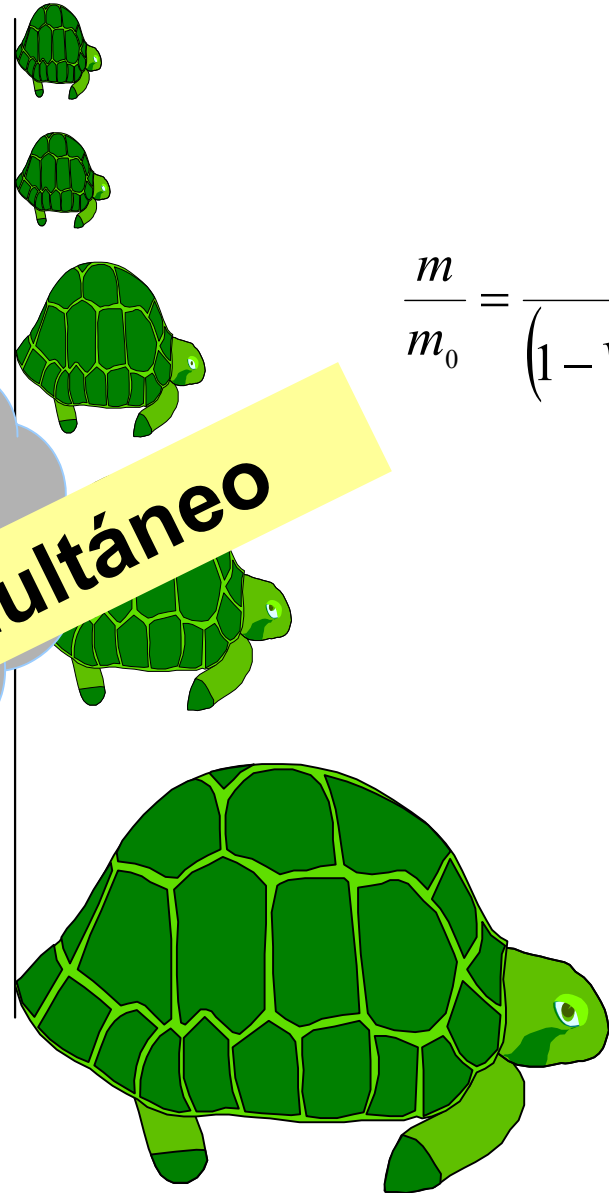


$V=99 \text{ Km/h}, m/m'=7,09$

Ojo: en estos dibujos el aumento de tamaño indica aumento de masa



# Ejemplo: caso en que $c = 100 \text{ Km/h}$



?

**Efecto simultáneo**

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$\frac{L}{L'} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

# FUERZA

En la mecánica clásica  $F = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

La primera parte sigue valiendo en la mecánica relativista pero no así la segunda

Si el movimiento es rectilíneo

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right) = m_0 \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2} - v \frac{1}{2} (1 - v^2/c^2)^{-1/2} (-2v/c^2)}{(1 - v^2/c^2)} \frac{dv}{dt}$$
$$= \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \quad \frac{dv}{dt} = a_T$$

$$F_T = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} a_T$$

**Pero si el movimiento es circular uniforme, la velocidad permanece constante en magnitud pero no en dirección, y ahora**

$$\vec{F} = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \frac{v^2}{R} \quad \frac{dv}{dt} = a_T = \frac{v^2}{R}$$

**En resumen**

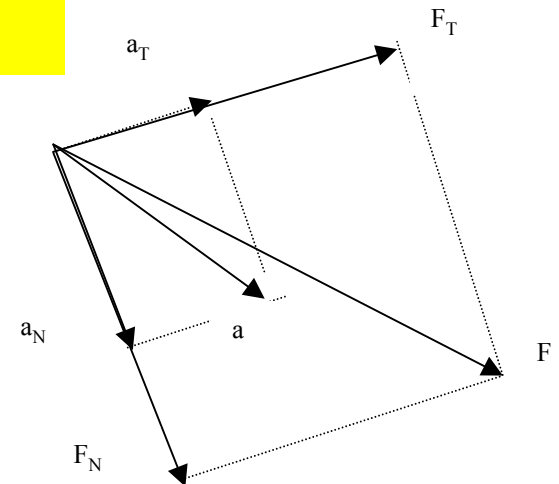
$$F_N = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} a_N$$

$$F_T = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} a_T$$

$$\vec{F} \neq m \vec{a}$$

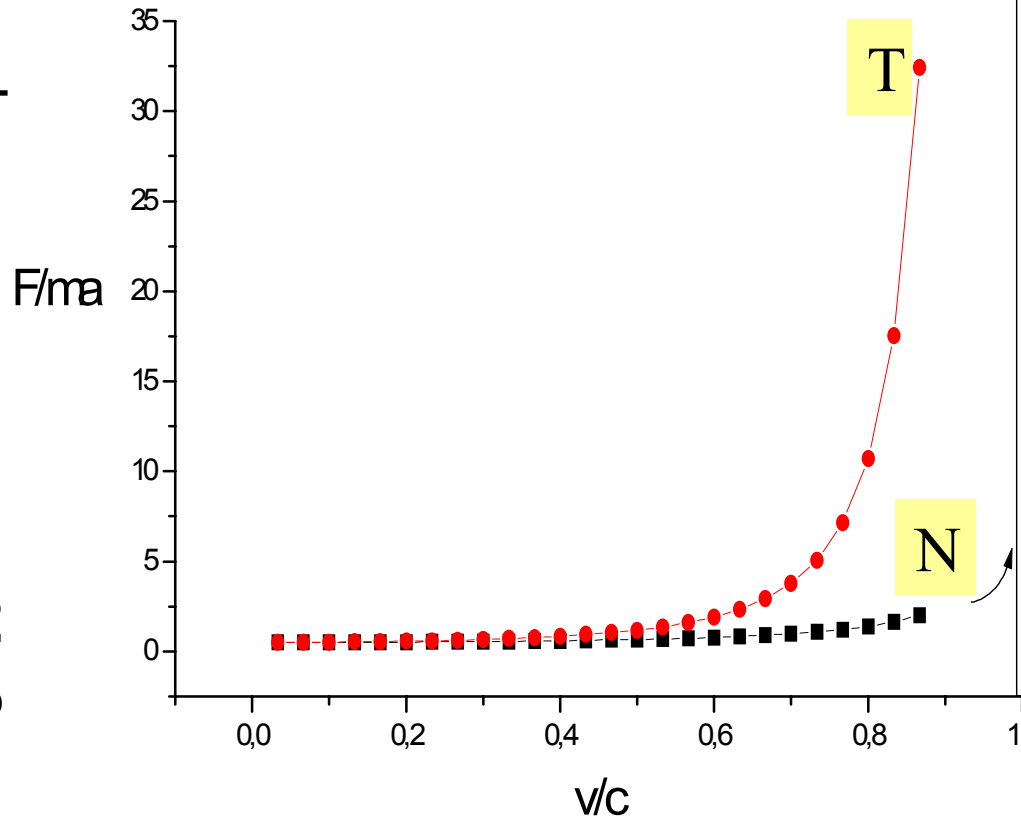
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

**F ya no es paralela a la aceleración porque los coeficientes que multiplican  $a_T$  y  $a_N$  son distintos**



# Relación entre fuerza y aceleración normal y tangencial para diferentes velocidades de la partícula

$v/c$	$F_N/m_0 \cdot a_N$	$F_T/m_0 \cdot a_T$
0,1	1,00504	1,01519
0,2	1,02062	1,06315
0,3	1,04828	1,15196
0,4	1,09109	1,29892
0,5	1,15470	1,53960
0,6	1,25000	1,95312
0,7	1,40028	2,74565
0,8	1,66667	4,62963
0,9	2,29416	12,07451
0,95	3,20256	32,84680
0,99	7,08881	356,22171



**A medida que aumenta la velocidad respecto al observador se hace mucho más difícil aumentar su módulo que cambiar la dirección**

# ENERGÍA

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$Ec = \int F_T ds = \int \frac{dp}{dt} ds = \int v dp \quad Ec = v p - \int p dv$$

usando la expresión relativista del impulso y resolviendo la integral con la sustitución  $x=v^2/c^2$

$$Ec = \frac{m_0 v^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} - \int_0^v \frac{m_0 v}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} dv = \frac{m_0 v^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} + m_0 c^2 \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} - m_0 c^2$$

$$Ec = \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 \left(1 - v^2/c^2\right)}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} - m_0 c^2 = m c^2 - m_0 c^2$$

$$E_T = m c^2 = Ec + m_0 c^2$$

$E_T$ : energía total (máximo que se puede extraer)  $m_0 c^2$  energía en reposo.  $E_T$  incluye la energía en reposo y la energía cinética, pero no algún tipo de energía potencial.

Esto sugiere que podemos asociar a cualquier cambio de masa  $\Delta m$  un cambio de energía  $\Delta E = \Delta m c^2$

**Cuando Einstein llegó a esta conclusión se mostró muy cauteloso y sugirió diversos experimentos para corroborarla. Hoy en día está totalmente verificada (energía nuclear)**

**Clásicamente**

$$Ec = \frac{1}{2} m v^2$$

**Contradicción?**

**Ahora**

$$Ec = \frac{m_0 c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} - m_0 c^2$$

**No, pues para pequeños valores de  $v/c$  esta última expresión se puede desarrollar en serie de potencias de  $x=v/c$**

$$f(x) = f(0) + f'(0) x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

$$Ec = m_0 c^2 \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \text{términos de alto orden en } v/c, \text{ despreciables para bajas } v$$

