Julia Garibaldi

Análisis y resolución del régimen transitorio de circuitos de corriente continua

1) Resolución de ecuaciones diferenciales

1.1) Definición

Una ecuación diferencial lineal, ordinaria, de orden *n* y a coeficientes constantes relaciona las enésimas derivadas de una función *x(t)*, que es la incógnita. Tiene la forma:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t) \qquad (1.1)$$

con $a_0;\ldots;a_n \in \Re$ y $a_n \neq 0$

En el caso particular en que *f(t) = 0*, la ecuación se llama *homogénea*. Si $f(t) \neq 0$, la ecuación es *no homogénea*.

La solución general *x(t)* de una ecuación de orden *n* puede escribirse como la suma de la solución de la ecuación homogénea asociada $x_H(t)$ y de una solución particular $x_P(t)$.

La ecuación homogénea asociada a (1.1) tiene la forma:

$$a_n \frac{d^n x_H(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_H(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx_H(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0 \qquad (1.2)$$

Entonces

$$\boxed{x(t) = x_H(t) + x_P(t)}$$

siendo: *x(t)*: solución general
$x_H(t)$: solución de (1.2)
$x_P(t)$: solución de (1.1)

1.2) Solución de la ecuación homogénea asociada

El primer paso para hallar la solución general *x(t)* es encontrar la solución de la ecuación homogénea asociada $x_H(t)$. Para esto se propone lo siguiente:

$$x_H(t) = e^{st} \qquad (1.3)$$

Reemplazando (1.3) en la ecuación (1.2) se obtiene

$$a_n \frac{d^n(e^{st})}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}(e^{st})}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{d(e^{st})}{dt} + a_0 e^{st} = 0$$

$$a_n s^n e^{st} + a_{n-1} s^{n-1} e^{st} + \ldots + a_1 s e^{st} + a_0 e^{st} = 0$$

Tomando e^{st} como factor común y sabiendo que dicha función no puede ser cero:

$$e^{st}\left[a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right] = 0$$

Así se obtiene que, para que se cumpla la igualdad anterior, debe darse:

$$\boxed{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0}$$

que se conoce como *ecuación característica*.

Hallando las *n* raíces de la ecuación característica, si todas son distintas, la solución de la ecuación (1.2) se puede escribir como:

$$x_H(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{s_k t}$$

siendo las C_k constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales del problema.

Si hubiese una raíz que se repite *n-m* veces

$$x_H(t) = \sum_{k=1}^{m} C_k e^{s_k t} + \sum_{j=0}^{n-m-1} D_j t^j e^{s_j t} \qquad m < n$$

En el caso de hallarse más de una raíz repetida se agregan las sumatorias necesarias a $x_H(t)$ para cada una de ellas.

1.3) Ejemplos

A continuación se realizan algunos ejemplos de resolución de ecuaciones diferenciales homogéneas. Notar que en este caso $x(t) = x_H(t)$, así que se usará la notación $x(t)$ para referirse a la solución.

Ejemplo 1.3.1

Hallar x(t)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) = 0$$

la ecuación característica se obtiene directamente por inspección: $s^2 - s - 2 = 0$

y las raíces son: $s_1 = -1$
$s_2 = 2$

por lo tanto, la solución es

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

siendo C_1 y C_2 constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales del problema.

Ejemplo 1.3.2

Resolver

$$\frac{d^4x(t)}{dt^4} - 4\frac{d^3x(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} - 4 = 0$$

la ecuación característica es: $s^4 - 4s^3 + 3s^2 + 4s - 4 = 0$

raíces: $s_1 = 1$; $s_2 = -1$; $s_3 = 2$; $s_4 = 2$

En este caso, la raíz $s = 2$ se repite, por lo tanto la solución es

$$x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + D_0 e^{2t} + D_1 t e^{2t}$$

Ejemplo 1.3.3

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^4x(t)}{dt^4}+2\frac{d^3x(t)}{dt^3}-3\frac{d^2x(t)}{dt^2}-4\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)=0$$

planteando la ecuación característica: $s^4+2s^3-3s^2-4s+4=0$

se obtienen las raíces: $s_1 = s_2 = 1$
$s_3 = s_4 = -2$

con lo cual se observa que hay dos raíces repetidas. Por lo tanto, la solución es:

$$x(t)=C_0e^{t}+C_1te^{t}+D_0e^{-2t}+D_1te^{-2t}$$

Ejemplo 1.3.4

Hallar x(t)

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}+9\frac{d^2x(t)}{dt^2}+27\frac{dx(t)}{dt}+27=0$$

la ecuación característica es: $s^3+9s^2+27s+27=0$

y tiene como raíces: $s_1 = s_2 = s_3 = -3$

La solución es:

$$x(t)=C_0e^{-3t}+C_1te^{-3t}+C_2t^2e^{-3t}$$

1.4) Solución particular

La solución particular de (1.1) se obtiene de la siguiente manera:

1) proponiendo una solución $x_P(t)$ de la misma forma que *f(t)*
2) reemplazando la solución propuesta en (1.1) y despejando las constantes

La siguiente tabla ilustra las distintas soluciones a proponer dependiendo de la forma de *f(t)*:

f(t)	***$x_P(t)$***
K (constante)	K' (otra constante)
polinomio de grado *n* $\sum_{i=0}^{n} C_i t^i$	otro polinomio de grado n, con $K_i \neq 0, \forall i$ $\sum_{i=0}^{n} K_i t^i$
$Csen(\omega \cdot t)$	$A\cos(\omega \cdot t) + Bsen(\omega \cdot t)$
$D\cos(\omega \cdot t)$	

siendo *K'*, K_i, *A* y *B* constantes a determinar en el paso 2) y son *distintas* de las constantes a determinar a través de las condiciones iniciales del problema (ver secciones 1.2 y 1.3).

Para despejar las constantes que quedaron en la solución propuesta *$x_P(t)$,* se debe reemplazar dicha función en (1.1) y obtener las condiciones de igualdad:

$$a_n \frac{d^n x_P(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_P(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dx_P(t)}{dt} + a_0 x_P(t) = f(t)$$

Este método resultará más claro en los siguientes ejemplos.

1.5) Ejemplos

A continuación se realiza una serie de ejemplos para ilustrar el método de obtención de la solución particular explicado en la sección anterior.

Ejemplo 1.5.1

Hallar una solución particular de:

$$2\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = 5$$

Como f(t) = 5 (constante), la solución propuesta será: $x_P(t)$ = K (otra constante)

Reemplazando $x_P(t)$ en la ecuación dada:

$$2\frac{dx_P(t)}{dt} - x_P(t) = 5 \Rightarrow 2\frac{d(K)}{dt} - K = 5 \Rightarrow -K = 5 \Rightarrow \boxed{K = -5}$$

Por lo tanto: $\boxed{x_P(t) = -5}$

Ejemplo 1.5.2

Hallar una solución particular de:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = t^2 + 1$$

En este caso, f(t) es un polinomio de grado 2, por lo tanto la solución propuesta es:

$$x_P(t) = C_2t^2 + C_1t + C_0$$

que contiene <u>todos</u> los términos de un polinomio del mismo grado que f(t).

Reemplazando la solución propuesta en la ecuación dada:

$$\frac{d^2(C_2t^2 + C_1t + C_0)}{dt^2} - 3\frac{d(C_2t^2 + C_1t + C_0)}{dt} + 2\left(C_2t^2 + C_1t + C_0\right) = t^2 + 1$$

$$2C_2 - 3\left(2C_2t + C_1\right) + 2\left(C_2t^2 + C_1t + C_0\right) = t^2 + 1$$

$$2C_2 - 6C_2t - 3C_1 + 2C_2t^2 + 2C_1t + 2C_0 = t^2 + 1$$

$$2C_2t^2 + \left(2C_1 - 6C_2\right)t + \left(2C_2 - 3C_1 + 2C_0\right) = t^2 + 1$$

Teniendo en cuenta que para que dos polinomios sean iguales deben ser iguales sus coeficientes, se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2C_2 = 1 \\ 2C_1 - 6C_2 = 0 \\ 2C_2 - 3C_1 + 2C_0 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior se obtienen las constantes: $C_0 = \frac{9}{4}$*;* $C_1 = \frac{3}{2}$*;* $C_2 = \frac{1}{2}$

Por lo tanto:

$$\boxed{x_P(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}}$$

1.6) Solución general

Una vez halladas $x_H(t)$ y $x_P(t)$, todo lo que resta es escribir la solución general de la ecuación (1.1) como:

$$\boxed{x(t) = x_H(t) + x_P(t)}$$

y despejar las constantes que quedaron de las condiciones iniciales del problema (esto se verá más adelante en la resolución de circuitos).

2) Consideraciones generales

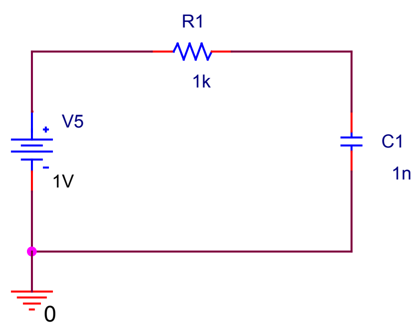
Antes de empezar a resolver el régimen transitorio de los circuitos de corriente continua, o sea, determinar la corriente que circula por el mismo como función del tiempo, es conveniente realizar algunas consideraciones generales para todos los problemas de este tipo.

2.1) Determinación del orden de la ecuación diferencial a partir de la inspección del circuito

En todos los problemas de régimen transitorio, el orden de la ecuación diferencial que modela dicho transitorio es igual al número de elementos almacenadores de energía que tiene el circuito.

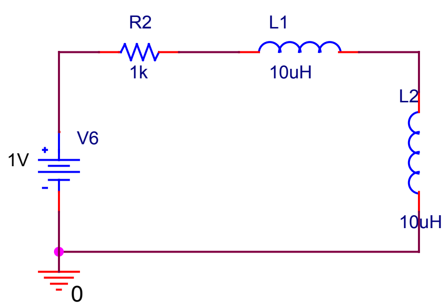
Los elementos almacenadores de energía son los capacitores, que la almacenan en forma de un campo eléctrico, y los inductores, que lo hacen mediante un campo magnético. Las resistencias sólo pueden disipar la energía en forma de calor.

Ejemplo 2.1.1



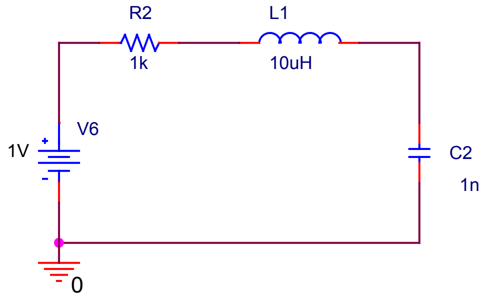
El régimen transitorio de la corriente de este circuito se describirá con una ecuación diferencial de orden 1, ya que contiene un único elemento almacenador.

Ejemplo 2.1.2



La ecuación diferencial para este circuito también será de orden 1, ya que, aunque el circuito tiene dos inductores, como estos están en serie puede obtenerse un inductor equivalente.

Ejemplo 2.1.3



Cuando se plantea el régimen transitorio de este circuito se obtiene una ecuación diferencial de orden 2, porque claramente el circuito tiene dos elementos almacenadores de energía.

2.2) Determinación de las condiciones iniciales del problema

Las condiciones iniciales del problema (recordemos que son necesarias para despejar las constantes de la solución de la ecuación diferencial) se determinan de la siguiente manera:

1) en los capacitores: se da la tensión sobre el capacitor en el instante inicial, por ejemplo: $V_c(t=0)=0$
2) en los inductores: en este caso se establece la corriente que pasa por el inductor en el instante inicial, por ejemplo: $i_L(t=0)=0$

Aclaración: en el caso de los capacitores, resulta equivalente conocer la tensión inicial o la carga inicial, dado que $C = Q/V$.
Notar que la cantidad de condiciones iniciales que debe darse debe ser igual al número de constantes que tenga la ecuación diferencial, y ese número es igual al orden de dicha ecuación.

2.3) Forma de las exponenciales de las soluciones

Las soluciones que se obtienen en estos problemas siempre son exponenciales, que pueden ser reales o complejas. En el caso de las exponenciales reales (y de la parte real de las exponenciales complejas) *siempre* son decrecientes, o sea, los exponentes son siempre menores que cero. Esto es así porque una exponencial positiva implicaría, por ejemplo, que un capacitor se carga hasta el infinito, y esto no es físicamente posible.

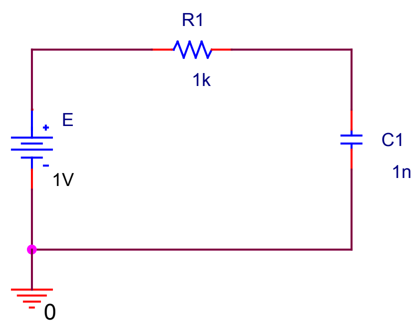
3) Circuitos de primer orden

Los circuitos de primer orden reciben ese nombre porque la ecuación diferencial que caracteriza la variación de la corriente con el tiempo es de primer orden. En este caso particular, la resolución de la ecuación diferencial se simplifica debido a que puede aplicarse separación de variables en las ecuaciones homogéneas.

3.1) Ejemplos

Ejemplo 3.1.1: circuito RC serie excitado por fuente

Dado el siguiente circuito, encontrar la variación de la corriente que circula en función del tiempo.



condiciones iniciales:

$V_C(t=0)=0$

Como en todo circuito serie, se plantea en primer lugar la ecuación de la malla:

$$E - V_R - V_C = 0$$

Reemplazando las tensiones sobre la resistencia y sobre el capacitor:

$$E = i(t).R + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

La ecuación obtenida es una ecuación integral. Para transformarla en diferencial, se derivan ambos miembros:

$$0 = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t)$$

Resolviendo por separación de variables:

$$0 = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) \Rightarrow -\frac{1}{C}i(t) = R\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow -\frac{1}{RC}dt = \frac{di(t)}{i(t)} \Rightarrow -\frac{1}{RC}t + K = \ln[i(t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{RC}t+K} = i(t) \Rightarrow K'e^{-\frac{1}{RC}t} = i(t)$$

donde K' es la constante a determinar a partir de la condición inicial dada.

El término RC que está en el exponente se denomina "constante de tiempo" del circuito y se lo denota con la letra τ (tau).

$$\boxed{\tau = RC} \qquad \text{en el circuito RC serie}$$

La constante de tiempo depende del circuito, y da una idea de cuánto dura el régimen transitorio, ya que luego de transcurridas cinco constantes de tiempo se puede considerar que el circuito alcanzó el régimen permanente.

La condición inicial se da en la tensión del capacitor, pero se necesita una condición inicial sobre la corriente del circuito. Para obtenerla se plantea la ecuación de malla en el instante t = 0:

$$E(0) = V_R(0) + V_C(0) \Rightarrow E(0) = i(0)R + V_C(0)$$

Como $V_C(0) = 0$ *y* $E(0) = E \Rightarrow i(0) = \frac{E}{R}$

Para despejar la constante K', se evalúa i(t) en el instante t = 0:

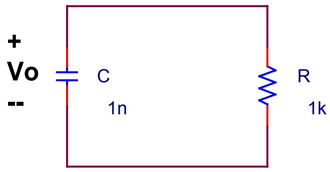
$$i(0) = K'e^{-\frac{1}{RC}0} = \frac{E}{R} \Rightarrow K' = \frac{E}{R}$$

Por lo tanto, la solución del problema es:

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

Ejemplo 3.1.2: circuito RC serie excitado por condiciones iniciales

En este caso, se tiene un capacitor que tiene una tensión inicial <u>distinta de cero</u> para poder hacer funcionar el circuito, y no hay fuentes.



condición inicial: $V_C(0) = V_0$
en el sentido en que se indica

El procedimiento de resolución es idéntico al ejemplo 3.1.1, con la salvedad de que la ecuación de malla está igualada a cero porque no hay fuentes.

La solución tiene la forma: $i(t) = K' e^{-\frac{1}{RC}t}$

Planteando la malla en el instante t = 0 para obtener la condición inicial:

$$0 = V_R(0) + V_C(0) \Rightarrow 0 = i(0)R + V_C(0) \Rightarrow 0 = i(0)R + V_0 \Rightarrow i(0) = -\frac{V_0}{R}$$

Evaluando i(t) en t = 0:

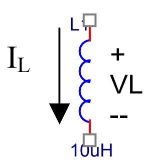
$$i(0) = K' e^{-\frac{1}{RC}0} = -\frac{V_0}{R} \Rightarrow K' = -\frac{V_0}{R}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{i(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

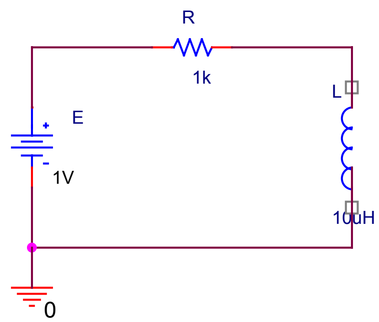
Ejemplo 3.1.3: circuito RL excitado por fuente

Antes de resolver el circuito se establecerá una convención para la polaridad de la caída de tensión en el inductor y para el sentido de circulación de corriente por el mismo.



Dados estos sentidos, la caída de tensión en el inductor L se define como:

$$V_L = L\frac{di(t)}{dt}$$ *sin el "signo menos" de la ley de Lenz*



condiciones iniciales: $i_L(0) = 0$

Se plantea la ecuación de la malla:

$$E = V_R + V_L$$

Reemplazando por las expresiones correspondientes:

$$E = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt}$$

En primer lugar se obtiene una solución de la ecuación homogénea asociada aplicando separación de variables:

$$0 = i_H(t)R + L\frac{di_H(t)}{dt} \Rightarrow -i_H(t)R = L\frac{di_H(t)}{dt} \Rightarrow -\frac{R}{L}dt = \frac{di_H(t)}{i_H(t)} \Rightarrow -\frac{R}{L}t + K = \ln[i_H(t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{R}{L}t+K} = i_H(t) \Rightarrow i_H(t) = K'e^{-\frac{R}{L}t}$$

siendo K' la constante a determinar a partir de la condición inicial, y la constante de tiempo:

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \qquad \textit{en el circuito RL serie}$$

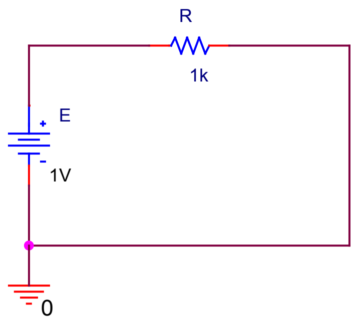
Finalmente se debe encontrar una solución particular. Como la ecuación diferencial está igualada a una constante (tensión de la fuente E), se propone otra constante como solución particular:

$$i_P(t) = K$$

Reemplazando en la ecuación diferencial y despejando:

$$E = KR + L\frac{d}{dt}(K) \Rightarrow E = KR \Rightarrow K = \frac{E}{R} \Rightarrow \boxed{i_P(t) = \frac{E}{R}}$$

Existe otra forma de obtener la solución particular que consiste en estudiar el comportamiento del circuito en régimen permanente, es decir, cuando $t \to \infty$. En este caso, el inductor se comporta como un cortocircuito ya que la caída de tensión en el mismo es cero.



La solución particular se obtiene calculado la corriente en el régimen permanente reemplazando el inductor por un cortocircuito:

$$i = \frac{E}{R} \Rightarrow i_P(t) = \frac{E}{R}$$

En cualquier análisis del régimen transitorio de un circuito, se puede obtener la solución particular de la ecuación diferencial estudiando el comportamiento de dicho circuito cuando $t \to \infty$

La solución general es entonces la suma de $i_H(t)$ e $i_P(t)$:

$$i(t) = K' e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

Para despejar la constante K' se evalúa la condición inicial:

$$i(0) = K' + \frac{E}{R} = 0 \Rightarrow K' = -\frac{E}{R}$$

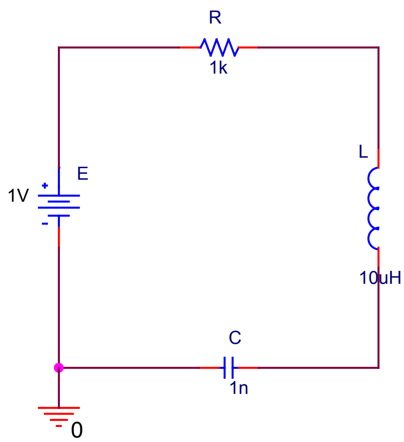
Finalmente, la solución es:

$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]}$$

Se deja como ejercicio para el lector la resolución del circuito RL serie excitado por condiciones iniciales (sin fuentes).

4) Circuitos de segundo orden

En esta sección se resolverán los tres casos correspondientes al régimen transitorio del circuito RLC serie.



condiciones iniciales:

$i_L(0) = 0$

$V_C(0) = 0$

Planteando la ecuación de la malla

$$E = V_R + V_L + V_C$$

y reemplazando

$$E = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

La ecuación anterior, que tiene tanto a la función incógnita como a su derivada primera y su integral, se conoce con el nombre de *ecuación íntegro-diferencial*. Para resolverla, se derivan ambos miembros:

$$0 = R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t)$$

La ecuación característica es: $Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0$

Dividiendo ambos miembros por L: $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$

Proponiendo que $2\sigma = \frac{R}{L}$ y $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, la ecuación característica queda como:

$$s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación característica se encuentra que las raíces son:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$$

Esto da origen a tres casos:

1. $\sigma^2 > \omega_0^2 \Rightarrow s_1 \in \Re \wedge s_2 \in \Re \wedge s_1 \neq s_2$ (raíces reales y distintas)
2. $\sigma^2 = \omega_0^2 \Rightarrow s_1 \in \Re \wedge s_2 \in \Re \wedge s_1 = s_2$ (raíces reales y coincidentes)
3. $\sigma^2 < \omega_0^2 \Rightarrow s_1 \in C \wedge s_2 \in C \wedge s_1 = s_2^*$ (raíces complejas conjugadas)

4.1) Primer caso: raíces reales y distintas

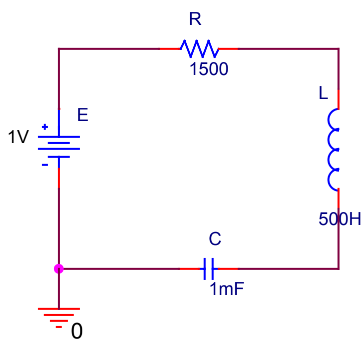
En el primer caso, la solución de la ecuación diferencial tiene la siguiente forma:

$$i(t) = Ae^{\left(-\sigma+\sqrt{\sigma^2-\omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-\sigma-\sqrt{\sigma^2-\omega_0^2}\right)t}$$

A y *B* son las constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales.

Ejemplo 4.1.1

Analizar el régimen transitorio del siguiente circuito:



datos:

$E = 1V$

$C = 1mF$

$L = 500H$

$R = 1500\Omega$

$i_L(0) = 0$

$V_C(0) = 0$

La ecuación característica tiene la forma: $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$

Reemplazando con los datos del problema se obtiene: $s^2 + 3s + 2 = 0$

Las raíces son: $s_1 = -1$ *y* $s_2 = -2$*, lo cual corresponde con el primer caso estudiado (raíces reales y distintas).*
La solución es, entonces:

$$i(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

Para obtener las condiciones iniciales para la corriente y su derivada se plantea la ecuación de malla en el instante inicial:

$E = Ri(0) + L\dfrac{di(0)}{dt} + V_C(0)$ *(observando que* $i(0) = i_L(0)$ *)*

Se obtiene que: $\dfrac{di(0)}{dt} = \dfrac{E}{L}$

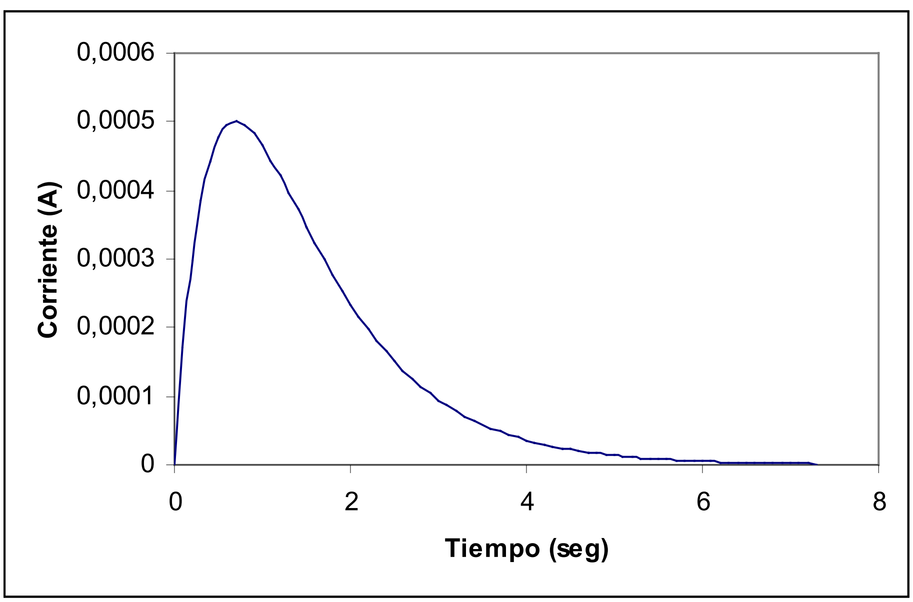
Por lo tanto, las condiciones inciales son: $i(0) = 0$ *e* $i'(0) = 0{,}002$

Evaluando dichas condiciones en i(t) e i'(t) se despejan las constantes A y B:

$$\begin{cases} i(0) = A + B = 0 \\ i'(0) = -A - 2B = 0{,}002 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} A = 0{,}002 \\ B = -0{,}002 \end{matrix}$$

Finalmente

$$\boxed{i(t) = 0{,}002\left[e^{-t} - e^{-2t}\right]}$$



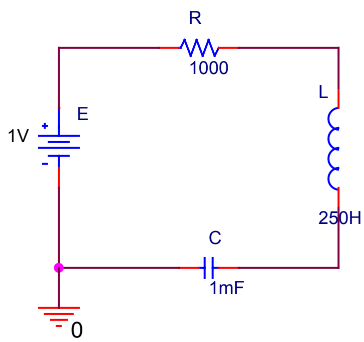
4.2) Segundo caso: raíces reales y coincidentes

La solución para este caso es:

$$i(t) = Ae^{-\sigma t} + Bte^{-\sigma t}$$

Ejemplo 4.2.1

Analizar el régimen transitorio del siguiente circuito



datos:

$C = 1mF$

$L = 250H$

$R = 1000\Omega$

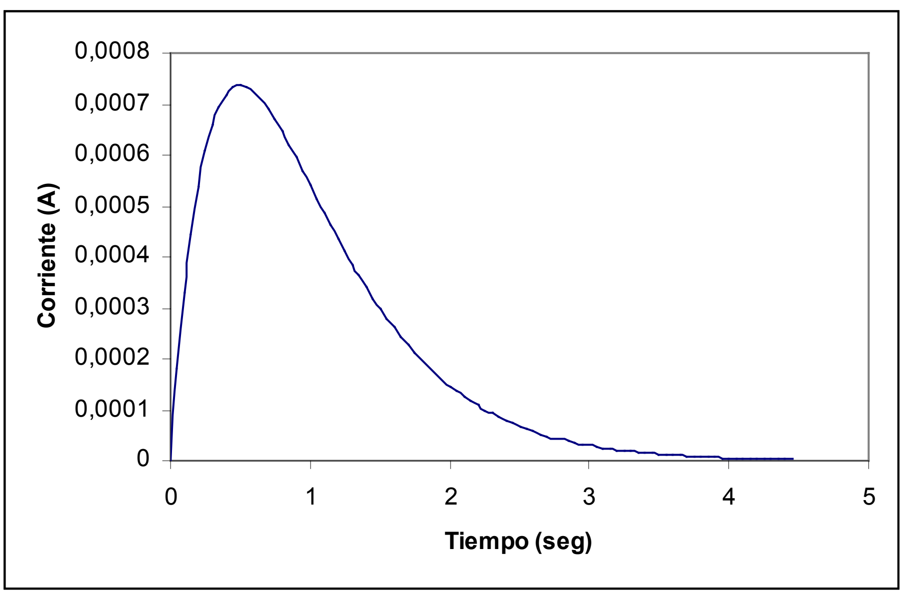
$E = 1V$

$i_L(0) = 0$

$V_C(0) = 0$

La resolución es similar al ejemplo 4.1.1 (se deja como ejercicio). En este caso, la solución que se obtiene es la siguiente:

$$\boxed{i(t) = 0{,}004te^{-2t}}$$



4.3) Tercer caso: raíces complejas conjugadas

La obtención de la solución en este caso requiere un desarrollo matemático que se detalla a continuación.

Las raíces obtenidas de la ecuación característica son, en este caso:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\sqrt{\left|\sigma^2 - \omega_0^2\right|}$$

Reemplazando en la solución propuesta se obtiene:

$$i(t) = Ae^{\left(-\sigma + j\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}\right)t} + Be^{\left(-\sigma - j\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}\right)t}$$

$$i(t) = Ae^{-\sigma t}e^{j\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}t} + Be^{-\sigma t}e^{-j\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}t}$$

Recordando la relación de Euler:

$$Ae^{j\varphi} = A\cos\varphi + jAsen\varphi$$

Reemplazando en *i(t)*:

$$i(t) = Ae^{-\sigma t}\cos\left(\sqrt{\left|\sigma^2 - \omega_0^2\right|t}\right) + jAe^{-\sigma t}sen\left(\sqrt{\left|\sigma^2 - \omega_0^2\right|t}\right) +$$

$$+ Be^{-\sigma t}\cos\left(-\sqrt{\left|\sigma^2 - \omega_0^2\right|t}\right) + jBe^{-\sigma t}sen\left(-\sqrt{\left|\sigma^2\omega_0^2\right|t}\right)$$

Dado que la función coseno es par y la función seno es impar, se cumple que

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$$

Reemplazando todo en *i(t)*:

$$i(t) = Ae^{-\sigma t}\cos\left(\sqrt{\left|\sigma^2 - \omega_0^2\right|}\right) + jAe^{-\sigma t}sen\left(\sqrt{\left|\sigma^2 - \omega_0^2\right|}\right) +$$

$$+ Be^{-\sigma t}\cos\left(\sqrt{\left|\sigma^2 - \omega_0^2\right|t}\right) - jBe^{-\sigma t}sen\left(\sqrt{\left|\sigma^2 - \omega_0^2\right|t}\right)$$

En general, las constantes A y B son complejas. Tomando el factor $e^{-\sigma t}$ como factor común:

$$i(t)=e^{-\sigma t}\left[A\cos\left(\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}t\right)+jAsen\left(\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}t\right)+B\cos\left(\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}t\right)-\right.$$

$$\left.-\,jBsen\left(\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}t\right)\right]$$

Reagrupando:

$$i(t)=e^{-\sigma t}\left[(A+B)\cos\left(\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}t\right)+j(A-B)sen\left(\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}t\right)\right]$$

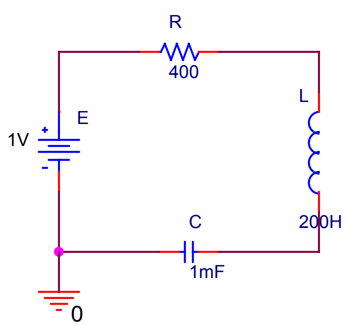
Llamando $C=A+B$ y $D=j(A-B)$, la solución queda como:

$$\boxed{i(t)=e^{-\sigma t}\left[C\cos\left(\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}t\right)+Dsen\left(\sqrt{\left|\sigma^2-\omega_0^2\right|}t\right)\right]}$$

Donde C y D son las constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales.

Ejemplo 4.3.1

Resolver el régimen transitorio del siguiente circuito.



datos:

$C=1mF$

$L=200H$

$R=400\Omega$

$E=1V$

$i_L(0)=0$

$V_C(0)=0$

Reemplazando los datos del problema en la ecuación característica se obtiene:

$$s^2+2s+5=0$$

Las raíces son: $s_1=-1+j2$ *y* $s_2=-1-j2$*, por lo tanto corresponde al tercer caso en estudio (raíces complejas conjugadas). La solución tiene entonces la siguiente forma:*

$$i(t) = e^{-\sigma t}\left[C\cos\left(\sqrt{\left|\sigma^2 - \omega_0^2\right|}t\right) + Dsen\left(\sqrt{\left|\sigma^2 - \omega_0^2\right|}t\right)\right]$$

donde $\sigma = \frac{R}{2L}$ *y* $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. *Al reemplazar con los datos del problema, se obtiene la solución:*

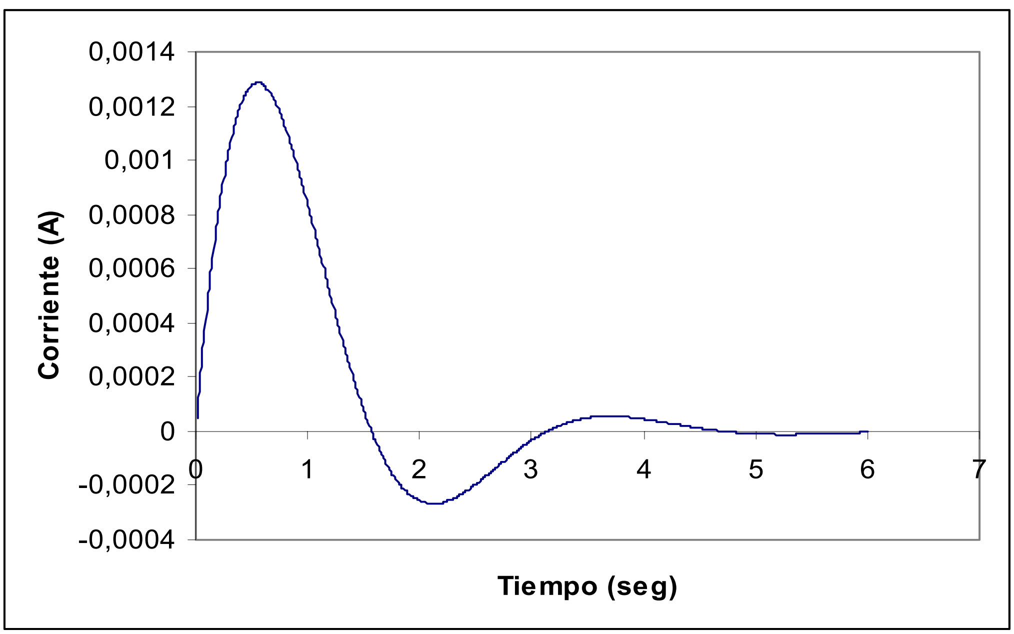
$$i(t) = e^{-t}\left[D\cos(2t) + Esen(2t)\right]$$

Evaluando las condiciones iniciales (se obtienen de la misma manera que en los ejemplos 4.1.1 y 4.2.1):

$$\begin{cases} i(0) = D = 0 \\ i'(0) = -D + 2E = 0{,}005 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ E = 0{,}0025 \end{cases}$$

Con lo cual, la solución obtenida es:

$$\boxed{i(t) = 0{,}0025e^{-t}sen(2t)}$$



Se deja como ejercicio para el lector la resolución del circuito RLC serie sin fuentes, o sea, excitado por condiciones iniciales.