Encendiendo y apagando circuitos (Transitorios que le dicen...)

En toda la parte previa de Física II consideramos que, o bien las cargas estaban quietas (electrostática), o se movían con velocidad constante, brindando corrientes de magnitud estable en el tiempo.
Ahora vamos a acometer el estudio de lo que sucede cuando conectamos o desconectamos un circuito. Vamos a responder a la pregunta: ¿Cómo evoluciona una corriente desde cero hasta un valor determinado? ¿Cuánto tiempo toma? ¿Qué sucede con la energía?
Como en otras circunstancias comenzaremos con circuitos simples e iremos complicándolos lentamente para terminar contando cualitativamente cómo operan algunos circuitos que hacen uso de lo que vamos a estudiar.

Cargando capacitores

El antecedente más antiguo viene del momento en que estudiábamos capacitores y decíamos cosas tales como: Un capacitor *C* es cargado con una pila *Vp*...
Cuando sacamos el capacitor de la caja estaba descargado y entonces al conectarlo a la pila tuvimos un flujo de cargas entrante al capacitor hasta que la carga *Q* almacenada en el mismo alcanzó el valor conocido $Q=CV_p$. Si hubo un flujo de carga existió una corriente. Es importante destacar que esta corriente fue *transitoria*, es decir que existió durante un rato y luego cesó porque al alcanzar la condición en la que la cantidad de carga en el capacitor es estable ya no hay corriente ($I=dQ/dt$).
Manos a la obra. La figura muestra la consabida pila, el capacitor y, reconociendo que los cables no son perfectos, incluimos una resistencia R que represente las pérdidas en el cable.

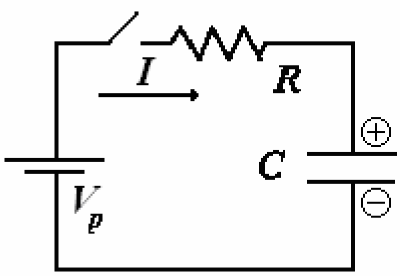

Figura 1. Capacitor cargado por medio de una pila a través de una resistencia

Si la corriente *I* y la polaridad del capacitor son los que muestra la figura aplicamos la segunda ley de Kirchooff (¿estará bien deletreado así?) para obtener:

$$
\begin{aligned}
&V_p - IR - \frac{Q}{C} = 0 \qquad I = \frac{dQ}{dt} \\
&V_p - \frac{dQ}{dt}R - \frac{Q}{C} = 0 \\
&\frac{dQ}{dt}R - \frac{Q}{C} = V_p
\end{aligned}
\tag{1}
$$

El segundo sumando es la caída de tensión sobre la resistencia y el tercero el correspondiente a la caída sobre el capacitor ($V=Q/C$)
El último renglón es una ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $Q(0)=0$ puesto que inicialmente el capacitor se encuentra descargado.

Resolver la ecuación (1) nos puede resultar simple, complicado o desesperante según haya sido nuestra experiencia en el tema (mejor no recordar esas vivencias ¿no?)
Formalmente la (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea. Con tantos adjetivos es obvio que nos sentiremos asustados y nos sentiremos paralizados.
Pero para nuestra suerte es una ecuación simple, en la que el miembro de la derecha es una constante. Primero aislamos el término en dQ/dt

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R}\left(V_p - \frac{Q}{C}\right) \tag{2}$$

El miembro de la derecha contiene una única variable (Q) y todo lo demás son constantes, entonces hacemos el siguiente cambio de variable:

$$w = \frac{1}{R}\left(V_p - \frac{Q}{C}\right) \Rightarrow dw = \frac{-1}{RC}dQ \tag{3}$$

Ahora reemplazamos en la (2) y obtenemos:

$$\begin{aligned} -RC\frac{dw}{dt} &= w \\ \frac{dw}{w} &= \frac{-1}{RC}dt \end{aligned} \tag{4}$$

Integramos miembro a miembro: el de la izquierda desde $w(0)$ hasta w y el de la derecha desde cero hasta t

$$\begin{aligned} \int_{w(0)}^{w} \frac{dw}{w} &= \frac{-1}{RC}\int_0^t dt \\ \log\left[\frac{w}{w(0)}\right] &= \frac{-t}{RC} \\ w &= w(0)\exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Volvemos ahora a las variables originales. Primero notamos que $w(0)= V_p/R$ puesto que $Q(0)=0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R}\left(V_p - \frac{Q}{C}\right) &= \frac{V_p}{R}\exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \\ Q &= CV_p\left[1-\exp\left(\frac{-t}{RC}\right)\right] \end{aligned} \tag{6}$$

El análisis de las (6) nos dice que a $t=0$ resulta $Q=0$ (bien) y que para valores de t tendiendo a infinito tenemos $Q=CV_p$ (también correcto).
Vamos a representar la (6) con unos pequeños cambios. Primero notamos que el término CV_p corresponde a la carga final del capacitor pero que depende de los valores específicos de C y V_p que usemos. Vamos a representar entonces $Q/(CV_p)$, cuyo valor máximo será uno. Además no

utilizaremos al tiempo t como la variable independiente sino $t/(RC)$ para evitar puntualizar en valores específicos de R y C. Antes de pasar a los valores es importante notar que el producto RC tiene dimensiones de tiempo (verificarlo) y menos mal que es así porque de lo contrario la (6) sería dimensionalmente incorrecta. Este producto RC lo denominamos constante de tiempo τ. Vamos a la gráfica:

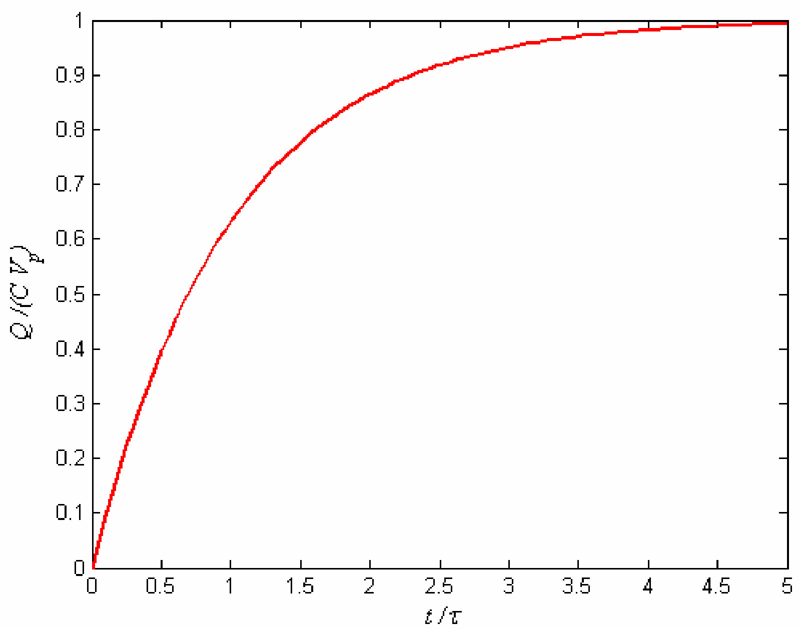

Figura 2. Carga normalizada al valor máximo versus el tiempo normalizado a τ

Al observar la gráfica notamos que para $t = \tau$ la carga del capacitor es el 63 % del valor final, cuando $t= 3\ \tau$ obtenemos el 95% y para $t= 5\ \tau$ más del 99%. Aquí se nos plantea la pregunta: ¿cuándo termina de cargarse el capacitor? La respuesta formal es que jamás termina de cargarse porque la función que hemos computado tiende asintóticamente al valor final. Lejos de sentarnos y esperar un tiempo infinito hasta llegar al valor final pensamos que un 99% es un resultado muy bueno y nos contentamos. Declaramos entonces que un capacitor puede ser considerado como cargado cuando ha transcurrido un tiempo igual a cinco constantes de tiempo.

Ahora que tenemos la carga almacenada en el capacitor en función del tiempo podemos calcular la corriente que entregó la pila simplemente derivando con respecto al tiempo:

$$I = \frac{V_p}{R} \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \tag{7}$$

La corriente máxima (V_p/R) se obtiene en t=0 y tiene sentido porque en ese momento, cuando la carga en el capacitor es cero, la caída de tensión en este también es cero.

Para representar gráficamente normalizamos la corriente al valor máximo V_p/R, así tenemos un resultado independiente de la pila y la resistencia.

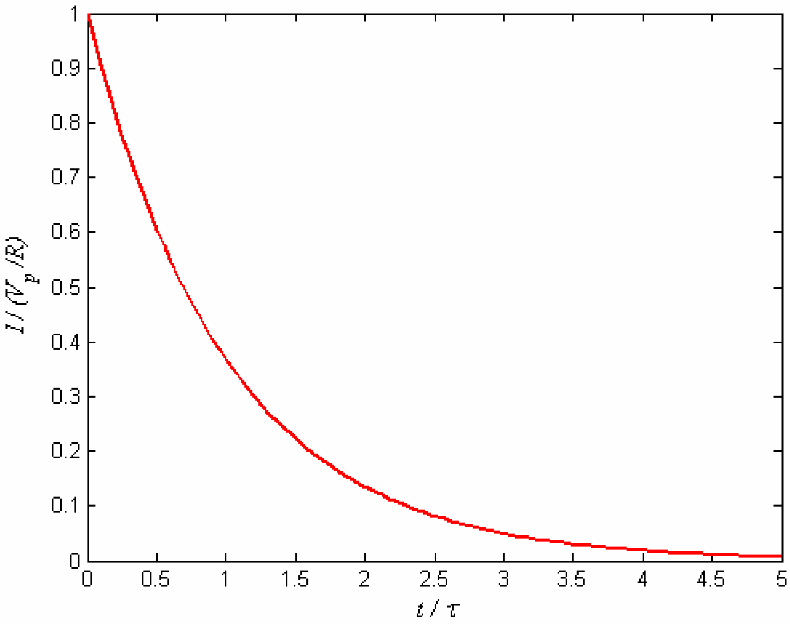

Figura 3. Corriente de carga normalizada a la máxima versus el tiempo normalizado a τ

Podemos plantearnos una pregunta ahora. Dado que para cargar el capacitor circuló una corriente a través de una resistencia tuvimos que disipar algo de energía. ¿Cuánto fue?
La energía E perdida en la resistencia es la integral en el tiempo de la potencia disipada en ella.

$$E = \int_0^{\infty} I^2 R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{V_p}{R} \right)^2 \exp\left(\frac{-2t}{RC} \right) R \, dt = \frac{1}{2} C \, V_p^2 \tag{8}$$

El resultado es correcto pero extraño. La energía disipada al cargar el capacitor es exactamente igual a la almacenada en el mismo. Esto quiere decir que la pila debe entregar el *doble* de la energía que vamos a almacenar en el capacitor. El resultado es independiente del valor de la resistencia, no importa si es grande o chica, simplemente no aparece en la expresión. Entonces viene la espantosa duda. ¿Qué pasaría si tuviera un cable perfecto? ¿No debería ser nula la energía perdida?
Esta duda es difícil de responder, queda pendiente para los que sigan electromagnetismo.

Vamos ahora al problema inverso. Tenemos un capacitor inicialmente cargado con una carga inicial Q_0 (con la polaridad que muestra la figura) y lo conectamos sobre una resistencia R para descargarlo.

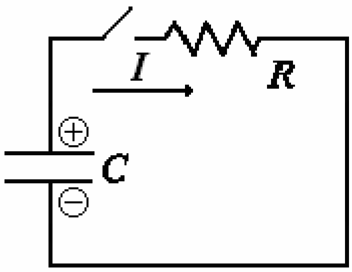

Figura 4. Capacitor inicialmente cargado que es descargado sobre una resistencia

Volvemos a aplicar la segunda ley de Kirchooff.

$$
\begin{aligned}
&\frac{Q}{C} - IR = 0 \quad I = -\frac{dQ}{dt} \\
&R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \\
&\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \quad \frac{dQ}{Q} = \frac{-dt}{RC} \\
&\log\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = \frac{-t}{RC} \\
&Q = Q_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

El primer renglón es en apariencia erróneo. Previamente hemos definido la corriente como la derivada de la carga con respecto al tiempo y ahora lo precedemos de un signo menos; ¿cómo es posible?

La solución estriba en reconocer que con el signo propuesto para la corriente positiva, la carga en el capacitor *decrece* a lo largo del tiempo y por eso es necesario el signo menos.

La gráfica de la (9) la tenemos en la figura siguiente

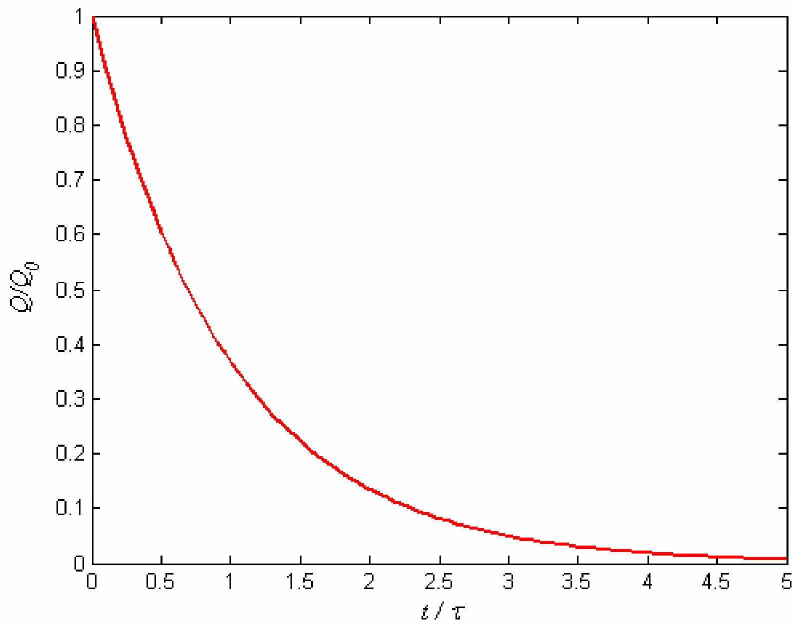

Figura 5. Carga normalizada a la inicial versus el tiempo normalizado a τ

Podemos ver que tanto la carga como la descarga tienen aspectos en común. Están regidos por leyes exponenciales y el proceso dura aproximadamente 5 τ.

Conectando inductancias

Vamos a ver ahora un problema parecido al primero. Una pila V_p alimenta una inductancia L a través de un cable de resistencia R.

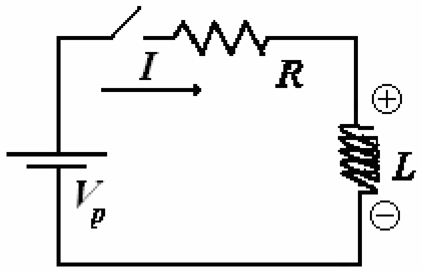

Figura 6. Inductancia conectada a una pila a través de una resistencia.

Atacamos de nuevo con nuestra herramienta favorita, la segunda ley de Kirchooff.

$$V_p - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{10}$$

El segundo sumando es nuevamente la caída de tensión sobre la resistencia y el tercero es la fuerza electromotriz inducida en bornes de la inductancia (ley de Faraday-Lenz).
Para resolver la (10) aplicamos el mismo método, aislamos el término en *dI/dt*:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}\left(V_p - IR\right) \tag{11}$$

Nuevamente vemos que el miembro de la derecha contiene a la incógnita (I) y una serie de constantes (V_p, L, R). Hacemos entonces el mismo cambio de variables.

$$w = \frac{1}{L}\left(V_p - IR\right) \Rightarrow dw = \frac{-R}{L}dI \tag{12}$$

Reemplazamos en la (10)

$$\begin{aligned}
&\frac{-L}{R}\frac{dw}{dt} = w \\
&\frac{dw}{w} = \frac{-R}{L}dt \\
&\int_{w(o)}^{w}\frac{dw}{w} = \int_0^t \frac{-R}{L}dt \\
&\log\left(\frac{w}{w(0)}\right) = \frac{-R}{L}t \\
&w = w(0)\exp\left(\frac{-R}{L}t\right)
\end{aligned} \tag{13}$$

Volvemos a las variables originales y vemos que $w(0)=V_p/L$ porque $I(0)=0$

$$\frac{1}{L}\left(V_p - IR\right) = \frac{V_p}{L}\exp\left(\frac{-R}{L}t\right)$$
$$I = \frac{V_p}{R}\left[1 - \exp\left(\frac{-R}{L}t\right)\right] \qquad (14)$$

Notamos que $I(0)=0$ (está bien) y que para grandes valores de t la corriente tiende a V_p/R, que es lo que esperamos puesto que cuando la corriente alcanza el valor estacionario desaparece la fuerza electromotriz inducida en la inductancia.
Observamos también que la constante L/R tiene dimensiones de tiempo (verificarlo) y siguiendo con la idea anterior la nombramos constante de tiempo τ.
Como podemos observar la (14) y la (6) son funcionalmente idénticas por lo que la gráfica es la misma. El único cambio importante es el cambio en la definición de la constante de tiempo.

Hacemos ahora el camino inverso. Consideramos una inductancia L por la que inicialmente circula una corriente I_0 y sobre la que conectamos una resistencia R.

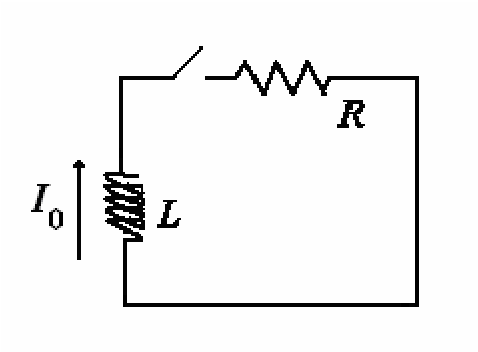

Figura 7. Inductancia con una corriente inicial conectada a una resistencia

La ecuación **K** nos dice:

$$-L\frac{dI}{dt} - IR = 0$$
$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$
$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \qquad (15)$$
$$\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t$$
$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

La evolución de la corriente es nuevamente una exponencial.
Ciertamente el comportamiento de los capacitares o inductores en ambos casos es muy parecido a menos de la definición de la constante de tiempo para cada caso.

Mezclando capacitores e inductores

Vamos a considerar una situación con capacitores e inductores que es ilustrativa de un circuito eléctrico que semeja un oscilador mecánico como un sistema masa-resorte.
Consideramos un capacitor C inicialmente cargado con una carga Q_0 que es descargado sobre una inductancia L por la que no circula corriente alguna en el momento inicial.

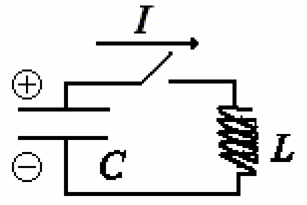

Figura 8. Circuito con un capacitor inicialmente cargado y una inductancia

Atacamos de nuevo con la ley **K**

$$\begin{aligned} &\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad I = -\frac{dQ}{dt} \\ &\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Nuevamente debemos escribir $I=-dQ/dt$ porque con el sentido propuesto para la corriente el capacitor *pierde* carga.
Esta ecuación es más compleja porque involucra derivadas segundas. Suponemos que la solución es de la forma $Q=\exp(\lambda t)$ donde λ es una constante a determinar (no tiene nada de malo proponer una solución y ver si es satisfactoria). Reemplazamos la solución propuesta.

$$\begin{aligned} &\frac{\exp(\lambda\, t)}{C} + L\,\lambda^2\,\exp(\lambda\, t) = 0 \\ &\lambda^2 = -\frac{1}{LC} \\ &\lambda = \pm j\sqrt{\frac{1}{LC}} \end{aligned} \tag{16}$$

En el último renglón j es la unidad imaginaria ($j^2 = -1$). En los cursos de matemática es usual utilizar la letra i, pero en nuestro contexto esa letra la reservamos para la corriente eléctrica. Entonces, en muchas ramas de la ingeniería usamos j para la unidad imaginaria.
Dado que la ecuación (15) es de segundo grado, la solución es una combinación lineal de la forma:

$$Q = A\exp(j\,\lambda\, t) + B\exp(-\,j\,\lambda\, t) \tag{17}$$

A primera vista la (17) parece mal porque esperamos una solución real para la carga. La solución es simple si recordamos la identidad: $\exp(jx)=\cos(x)+j\mathrm{sen}(x)$. Podemos llevar la (17) a la forma real:

$$Q = C\cos(\lambda\, t) + D\sin(\lambda\, t) \tag{18}$$

Donde las constantes C y D quedan dadas por las condiciones iniciales. En nuestro caso tenemos $Q(0)=Q_0$ e $I(0)=0$, por lo que resulta $C=Q_0$ y $D=0$.
Dadas las dimensiones de λ (1/seg) es costumbre renombrarla ω para que coincida con la nomenclatura usual:

$$Q = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \tag{19}$$

La carga entonces oscila a una frecuencia $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ y esta afirmación merece una explicación lenta. Veamos una gráfica que representa la evolución temporal de la carga y la corriente.

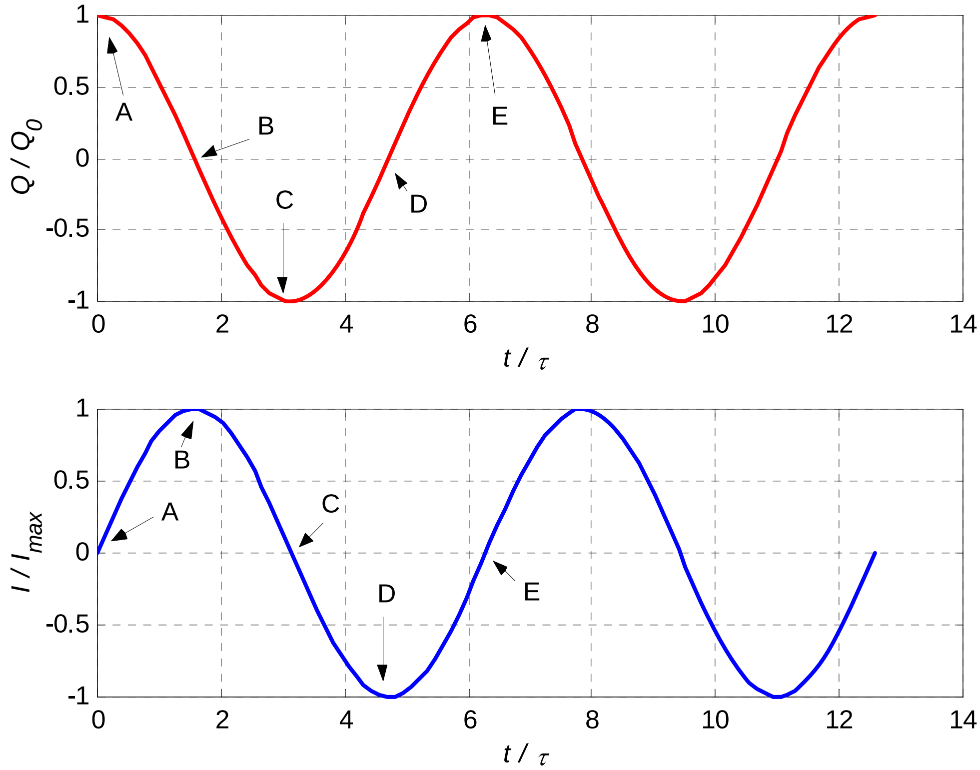

Figura 8. Carga y corriente en un circuito L C

Para comprender la tendencia de las dos curvas es importante recordar dos reglas simples.
Sabemos que la carga en un capacitor es $Q=C\ V_c$, si derivamos con respecto al tiempo tendremos la corriente, es decir $I_c=C\ dV_c/dt$. Si las corrientes han de ser finitas entonces el término dV_c/dt también lo debe ser. Por lo tanto la caída de tensión en el capacitor debe ser una función continua (sin saltos) porque de lo contrario tendríamos corrientes infinitas.
Algo semejante sucede con la inductancia. A partir de la ley de Faraday sabemos que la fuerza electromotriz inducida en la inductancia vale (en módulo):$V_L=L\ (dI/dt)$. Nuevamente, para valores finitos de V_L necesitamos que así lo sea dI/dt, es decir que también la corriente debe ser una función continua. En síntesis la tensión sobre un capacitor no puede variar discontinuamente, así como tampoco lo debe hacer la corriente sobre una inductancia.
Con estas ideas simples podemos comprender el comportamiento cualitativo de la figura 8. En el momento inicial (A) el capacitor está totalmente cargado y por la inductancia no circula corriente. Conforme el capacitor se descarga, la corriente por la inductancia aumenta hasta que llegamos al punto B. Aquí el capacitor está descargado pero por la inductancia circula una

corriente (la que no puede extinguirse abruptamente). Por la ley de Faraday la fuerza electromotriz inducida en la inductancia es tal que intenta mantener la circulación de corriente. En estas condiciones el capacitor vuelve a cargarse, pero esta vez con polaridad opuesta hasta llegar al punto C donde adquiere la misma carga que la inicial pero de polaridad opuesta. Ahora el ciclo se repite pero con los signos opuestos: el capacitor se descarga y la corriente sobre la inductancia aumenta pero en sentido opuesto. Al llegar al punto D el capacitor nuevamente está descargado y la corriente es máxima (en sentido opuesto al inicial). El circuito continúa evolucionando hasta repetir la situación inicial en el punto E.
Esta secuencia se repite hasta el infinito porque tanto el capacitor como la inductancia son sistemas conservativos, así que la cantidad total de energía del sistema se mantiene y todo lo que tenemos es un traspaso cíclico de energía del capacitor a la inductancia y viceversa. Por este motivo decimos que el circuito formado por un capacitor y una inductancia se comporta de manera semejante a un oscilador formado por una masa y un resorte. Periódicamente se transfiere energía del campo eléctrico en el capacitor al campo magnético en la inductancia. En el sistema mecánica la energía es transferida del resorte (potencial elástica) a la masa (cinética).

Ahora mezclamos los tres componentes

Así como en el sistema mecánico que acabamos de mencionar tendremos inevitablemente pérdidas de energía por roces, lo mismo sucede en nuestro circuito del punto anterior. Los cables no son perfectos y tienen pérdidas asociadas con la resistencia de los mismos. Vamos a alterar el circuito para tomar en cuenta estas resistencias:

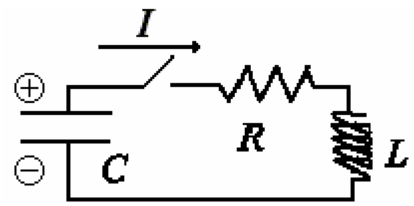

Figura 9. Circuito con un capacitor inicialmente cargado, una resistencia y una inductancia.

Una vez más (¡¡¡¡qué saturados que estamos!!!!) usamos la ley **K**

$$\frac{Q}{C} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad I = -\frac{dQ}{dt}$$
$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \tag{20}$$

Volvemos a ensayar la misma solución Q=exp(λt)

$$\frac{\exp(\lambda\, t)}{C} + R\lambda\, \exp(\lambda\, t) + L\lambda^2\, \exp(\lambda\, t) = 0$$
$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0 \tag{21}$$
$$\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

Ahora tenemos que interpretar las soluciones posibles.

Si $R^2 > 4L/C$ tenemos dos raíces reales y distintas (λ_1 y λ_2) que nos dan una solución:

$$
\begin{aligned}
Q &= A\exp(\lambda_1\ t) + B\exp(\lambda_2\ t) \\
I &= -\frac{dQ}{dt} = -\lambda_1\ A\exp(\lambda_1\ t) - \lambda_2\ \exp(\lambda_2\ t)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Las dos raíces son negativas (mirar los signos) y entonces la solución es la combinación de dos exponenciales decrecientes. En tal situación recibe el nombre de régimen *sobreamortiguado*
Donde las constantes A y B se determinan por las condiciones iniciales del problema ($Q(0)=Q_0$ e $I(0)=0$) las que brindan:

$$
\begin{aligned}
&Q(0) = Q_0 = A + B \\
&I(0) = 0 = -A\lambda_1 - B\ \lambda_2 \\
&A = \frac{Q_0\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
&B = \frac{Q_0\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Vamos a un ejemplo, tomemos R=100 Ω, L=0.2 Hy y C= 100 μF. Encontramos λ_1= -138.2 1/s y λ_2= -361.8 1/s
Representaremos la carga (suponiendo Q_0=1)y la corriente en función del tiempo (sin normalizar a ninguna constante)

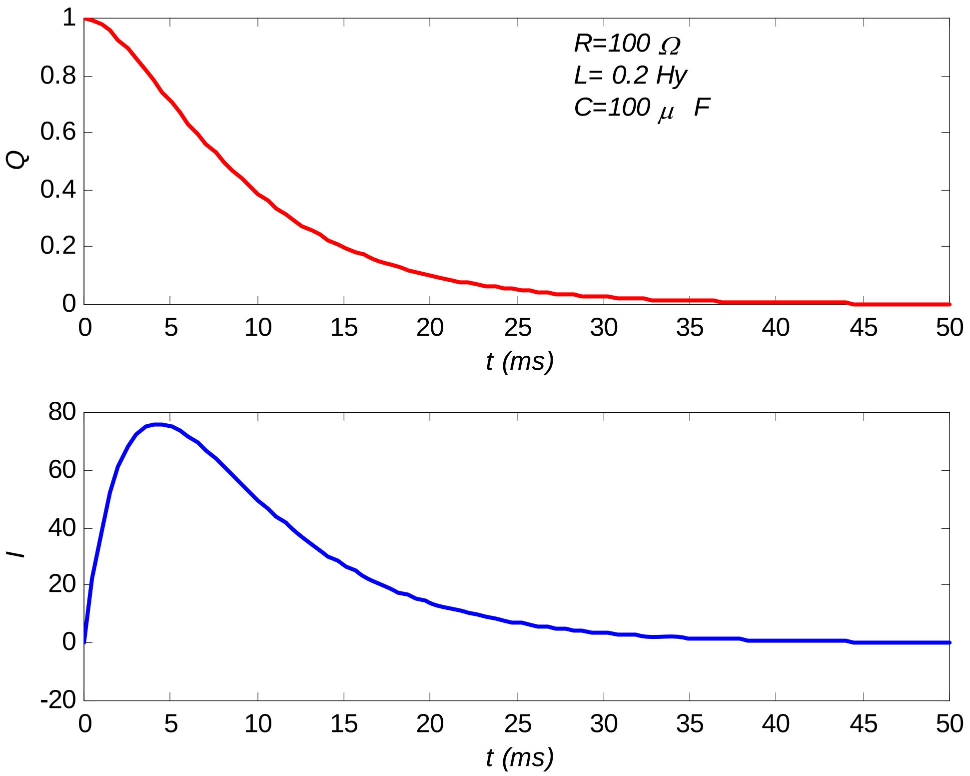

Figura 10. Descarga de un circuito RLC en régimen sobreamortiguado

Pasamos ahora a la segunda posibilidad. Si R^2=4 L/C las dos raíces son iguales (discriminante nulo) la solución es de la forma (repasar libro de análisis o álgebra según corresponda)

$Q = (A + B\,t)\exp(\lambda\,t)$

Esta situación recibe el nombre de régimen crítico

Para nuestro problema las constantes resultan $A=Q_0$ y $B=-\lambda\,Q_0/(\lambda+1)$

Vamos a repetir el ejemplo manteniendo L y C en los valores anteriores pero reduciendo R hasta anular al discriminante de la (21), esto resulta en R= 89. 44 Ω.

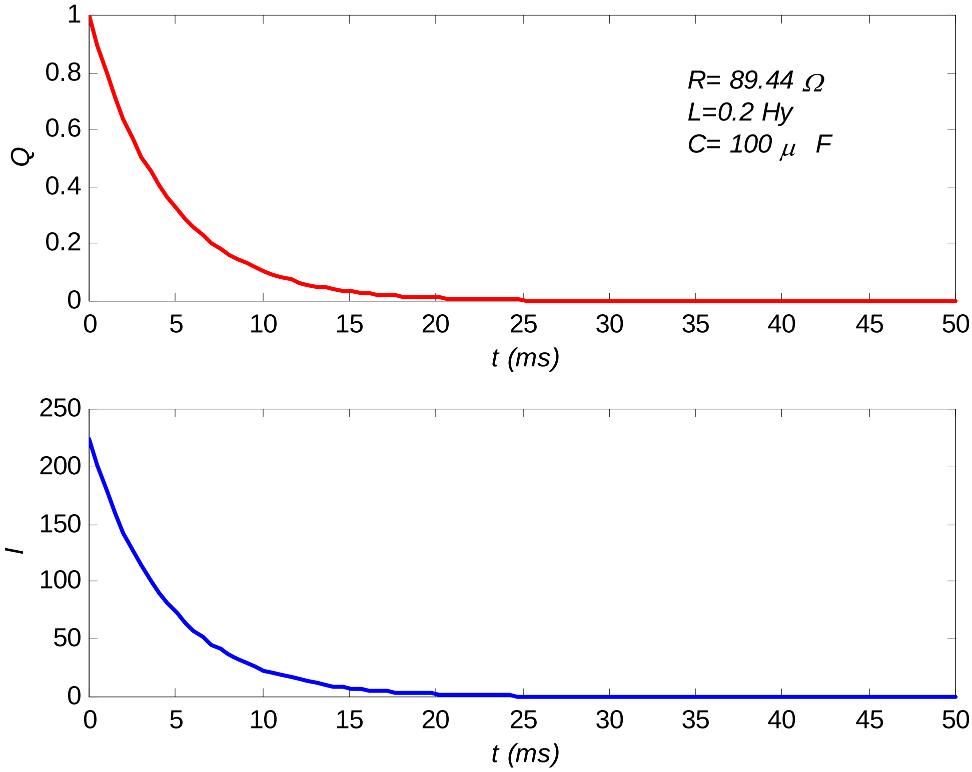

Figura 11. Descarga de un circuito en régimen crítico

Por último, si $R^2<4L/C$ los valores de λ son complejos conjugados, es decir que tienen partes imaginarias α y β que satisfacen $\lambda = \frac{-R}{2L} \pm i\frac{\sqrt{\left|R^2 - 4\,L/C\right|}}{2L} = \alpha + i\beta$. Este régimen se denomina subamortiguado. La solución correspondiente es (luego de largos factoreos)

$$Q = \exp(\alpha\,t)\left[A\cos(\beta\,t) + B\sin(\beta\,t)\right]$$

Tarea para el hogar: encontrar los valores de A y B que satisfacen nuestro problema.

Repitiendo nuestro ejemplo bajamos la resistencia a 5 Ω (valor arbitrario) y obtenemos α=-12.5 1/s y β= 223 1/s. La gráfica la vemos en la figura siguiente

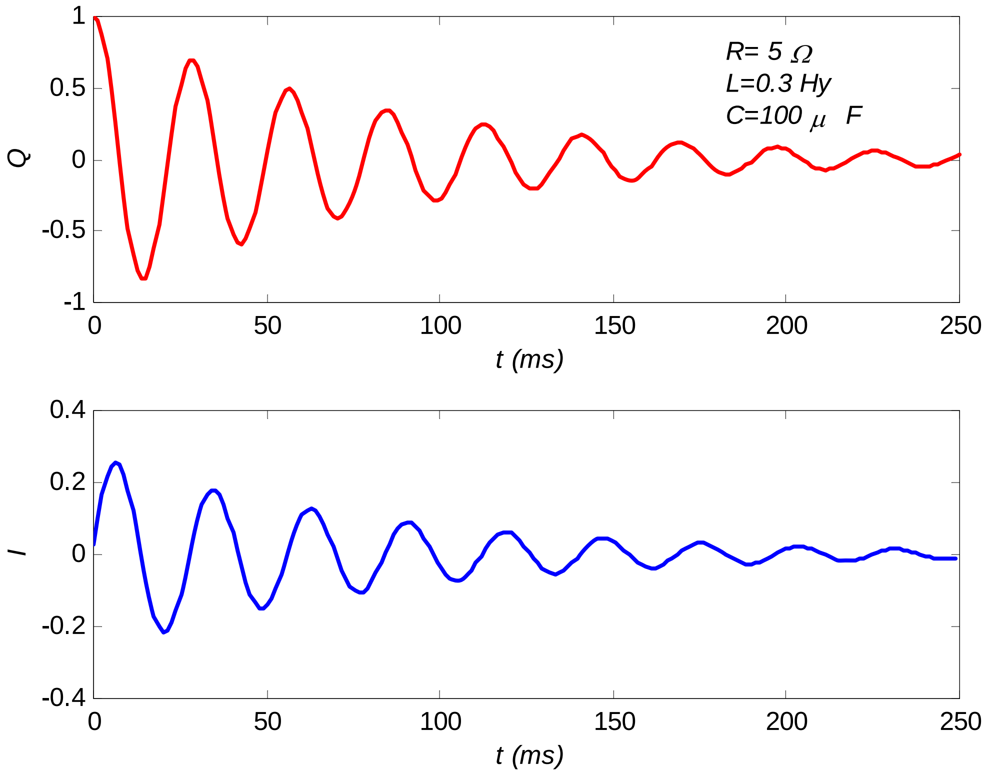

Figura 12. Descarga de un circuito RLC subamortiguado

El carácter de la solución ha cambiado drásticamente. En los casos anteriores teníamos una que la carga evolucionaba de forma monótonamente decreciente y que la corriente presentaba el aspecto de una "joroba".

Ahora tenemos una gráfica que parece oscilar (debido al término en coseno y seno de la solución) pero que se extingue exponencialmente a lo largo del tiempo. Esto decrecimiento se llama amortiguamiento y está directamente relacionado con las pérdidas. De no existir la resistencia retornamos al caso en que teníamos solamente un capacitor y una inductancia.

Podríamos intentar ahora un problema más difícil y es el de comenzar con un capacitor descargado, una resistencia, una inductancia por la que no circula corriente y conectar todo el conjunto a una pila y nos preguntamos entonces cómo se carga el capacitor.

Podríamos resolverlo pero es un ejemplo que está un poco más allá de nuestro objetivo porque involucra resolver una ecuación diferencial no homogénea lo que es un poco más difícil y por eso lo vamos a dejar de lado.

En resumen hemos visto el comportamiento transitorio de carga y descarga de los circuitos RC y RL. El circuito RLC solo lo analizamos en la fase de descarga.

Más allá de la complejidad de cada caso vimos que TODOS se resuelven comenzando con la ley de suma de las tensiones en una malla y que en cada caso se generaba una ecuación diferencial. En los circuitos RC y RL teníamos ecuaciones de primer orden, mientras que en los circuitos LC y RLC la ecuación resultó de segundo orden.

Esta es la aproximación para resolver el comportamiento transitorio de cualquier circuito. Nosotros nos limitamos a los expuestos porque son los más simples, pero la técnica aplicada sirve para todos.

Suerte con los problemas