Dr. Ing Guillermo Santiago
Física II A/B - Segundo Cuatrimestre 2006

Algunas consideraciones sobre la energía almacenada en una distribución de cargas

Distribución discreta de cargas

Una distribución cualquiera de cargas eléctricas tiene una cierta cantidad de energía asociada. Esto es particularmente fácil de ver en el caso de contar con N cargas Q_i ubicadas en las posiciones $\mathbf{r}_i$. Consideramos que este sistema es armado trayendo sucesivamente cada una de las cargas desde una distancia muy grande. Así, para traer la primera no efectuamos trabajo alguno dado que sobre la misma no actúan fuerzas eléctricas. Luego, para poner la segunda carga en su posición final debemos hacer un trabajo W_{12}.

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|} \qquad (1)$$

Si ahora movemos imaginariamente la tercera carga podemos calcular el trabajo realizado computando los términos entre la carga 1 y la 3 y luego entre la 2 y la 3.

$$W_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{|\vec{r}_{13}|} \qquad W_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{|\vec{r}_{23}|} \qquad (2)$$

Podemos continuar así con las demás cargas hasta haber conformado toda la distribución de cargas. La cantidad total de trabajo realizado (y por lo tanto la energía almacenada) es simplemente la suma de los términos anteriormente mencionados.

$$W = \sum_{\substack{Todos \\ los\ pares}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_{ij}|} = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_{ij}|} \quad i \neq j \qquad (3)$$

En la última expresión incluimos el factor ½ para evitar contabilizar dos veces el mismo término al recorrer las sumatorias todos los valores de i y j.

Distribución continua de cargas

Cuando tenemos una distribución continua de cargas las sumas anteriores deben ser reemplazadas por integrales. Así, si consideramos que cada elemento de volumen dv tiene una cantidad de carga $dQ=\rho\, dv$ obtenemos:

$$W = \frac{1}{2}\int_{\substack{Todo \\ el\ espacio}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_{12}|}dv_1 dv_2 \qquad (4)$$

Donde tenemos ahora dos integrales que recorren toda la distribución de cargas (por eso mantenemos el factor ½ al comienzo).
Si nos concentramos en la integral sobre dv_2 observamos lo siguiente:

$$\int \frac{\rho(2)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_{12}|} dv_2 = V(1) \quad (5)$$

Observamos que la misma devuelve el potencial generado en la posición 1 por toda la distribución 2, por lo que podemos reducir la expresión (5) a:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(1) V(1) dv_1 \quad (6)$$

El uso del subíndice para indicar la región es entonces innecesario puesto que no quedan variables de la región 2 en la expresión. Entonces reducimos a:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V dv \qquad (7)$$

Esta es la relación final que nos permite computar la cantidad de energía almacenada en el sistema.

Un pequeño ejemplo para introducir la densidad de energía

De los muchos ejemplos que podemos dar para aplicar esta expresión tomamos el caso simple de un capacitor de placas paralelas de área *A*, separación *d* y conectado a una pila de valor V_p. Si asignamos a la placa negativa el potencial de referencia nulo, entonces la otra se encuentra a un potencial V_p y la cantidad de energía almacenada es:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V dv = \frac{1}{2} V_p \int \rho dv = \frac{1}{2} V_p Q = \frac{1}{2} C V_p^2$$

Donde *C* es la capacidad.

Introducimos ahora el concepto de densidad de energía *u* como la cantidad de energía *dW* almacenada por unidad de volumen *dv*, es decir:

$$u = \frac{dW}{dv} \qquad (8)$$

En el sistema MKS la densidad de energía se mide en J/m^3.
En nuestro ejemplo esta cantidad es muy fácil de calcular puesto que todas las magnitudes son uniformes así que el cómputo se reduce a dividir la cantidad de energía almacenada por el volumen.

$$u = \frac{W}{v} = \frac{1/2\, Q V_p}{Ad} = \frac{1}{2} \frac{Q}{A} \frac{V_p}{d} = \frac{1}{2} \sigma \frac{V_p}{d} = \frac{1}{2} |\vec{D}| |\vec{E}| \qquad (9)$$

En esta última expresión recordamos que la razón de la carga Q almacenada en una placa al área A de la misma es la densidad superficial de carga σ y que ésta coincide con el módulo del vector desplazamiento $\vec{D}$. Asimismo recordamos que la razón de la diferencia de potencial entre placas V_p a la distancia d entre las mismas coincide con el módulo del campo eléctrico $\vec{E}$.
Vemos que, al menos en este caso simple, pudimos reducir el cálculo de la densidad de energía almacenada a una expresión simple en los campos $\vec{D}$ y $\vec{E}$.
Por supuesto que nada sabemos de la generalidad de la expresión anterior y debemos hacer una demostración más cuidadosa antes de aplicarla a otros casos, por lo que procederemos con más cuidado.

Una aproximación más formal al cómputo de la densidad de energía

Recordemos la forma integral del teorema de Gauss:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (10)$$

Que llevado a su forma diferencial es (hay que repasar Análisis II):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (11)$$

Utilizamos esta última forma para computar nuevamente la energía del sistema:

$$W = \frac{1}{2}\int_v \rho V dv = \frac{1}{2}\int_v \left(\nabla \cdot \vec{D}\right) V dv \qquad (12)$$

Una identidad útil del análisis vectorial es la siguiente. Dada una función escalar ϕ y una vectorial $\vec{A}$ podemos escribir (otra vez hay que repasar Análisis II):

$$\nabla\left(\phi\vec{A}\right) = \phi\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A}\nabla\phi \qquad (13)$$

Que aplicadas a nuestro caso resultan en:

$$W = \frac{1}{2}\int_v \nabla\left(V\vec{D}\right) dv - \frac{1}{2}\int_v \vec{D} \cdot \left(\nabla V\right) dv \qquad (14)$$

Por el teorema de la divergencia, la primera integral puede transformarse de una de volumen a una de superficie del producto $V\vec{D}$ sobre la superficie cerrada que rodea a la región. Pero si esta región ha de contener a todos los campos es necesario extenderla hasta el infinito. Dado que V varía como $1/r$ y D lo hace como $1/r^2$ entonces el integrando tiene una dependencia de la forma $1/r^3$. Por otra parte la superficie aumenta como r^2 por lo que la tendencia general del integrando es de la forma $1/r$. Entonces el valor total de primera integral tiende a cero conforme la superficie tiende a infinito.

$$\int_v \nabla\left(V\vec{D}\right)dv = \int_{S_\infty} V\vec{D}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (15)$$

Por lo tanto para el cómputo de la energía sólo es necesaria la segunda integral.

Si recordamos que el campo eléctrico lo podemos computar como menos el gradiente del potencial obtenemos:

$$W = \frac{-1}{2}\int_v \vec{D}\cdot\nabla V dv = \frac{1}{2}\int_v \vec{D}\cdot\vec{E}dv \qquad \rightarrow \qquad u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \qquad (16)$$

Esta última relación coincide con la que habíamos obtenido para el capacitor plano pero ahora tiene validez general y no restringida a ese ejemplo en particular.

Al resolver un problema electrostático tenemos fácilmente disponibles los valores de $\vec{D}$ y $\vec{E}$ por lo que computar la densidad de energía no representa mayor problema. Si integramos dicha densidad de energía a todo el volumen donde haya campo no nulos entonces obtendremos la cantidad total de energía que hay almacenada en el sistema.

Qué hacemos ahora con la teoría de la sección anterior?

Primero, **NO** pretendemos que recuerden de memoria la demostración. Sólo quisimos mostrar que el concepto de densidad de energía y cómo se calcula tienen validez más allá del caso simple (capacitor plano) con el que fueron introducidas.
Vamos a ver ahora cómo operamos con ellas para encontrar respuestas útiles.
Por supuesto que no tiene sentido volver sobre el capacitor plano puesto que de allí venimos, así que no tiene gracia.
Vamos a tratar un caso ligeramente diferente, el de un cable coaxil (capacitor cilíndrico) de radio interior *a*, exterior *b*, largo *L* y cuyo espacio entre placas está relleno por un dieléctrico de permitividad relativa ε_r.
Este caso ya lo hemos resuelto y es particularmente simple si nuevamente despreciamos los efectos de borde. En tal caso las líneas de campo son simplemente radiales; nacen en el conductor central (supuesto positivo) y mueren en el conductor externo (supuesto negativo).
Aunque ya hemos desarrollado en las clases el cómputo de la capacidad vamos a repetirlo para ver cómo lo conectamos con lo que hemos aprendido.
Primero asumimos que el sistema fue cargado con una pila de valor V_p aplicada entre el conductor central y el exterior. Las cargas almacenadas en cada uno de ellos tienen módulo Q. Dados que hemos sido eficientes y pudimos "adivinar" la dirección de las líneas de campo entonces podemos emplear con provecho el teorema de Gauss para calcular la intensidad de los campos.

La superficie gaussiana más práctica es un cilindro coaxial con el conductor central y cuyo radio *r* se encuentra comprendido entre *a* y *b*.
En estas condiciones computamos el flujo del vector desplazamiento a través de dicha superficie. Utilizamos dicho vector porque igualaremos el flujo a la cantidad de carga libre ubicada dentro de la superficie que es precisamente la carga *Q* perteneciente al conductor central.
Como ya procedimos otras veces reconocemos que el flujo por las tapas del cilindro es nulo dado que las líneas de campo son perpendiculares al vector que representa al elemento de superficie.
En la cara lateral del cilindro las líneas de campo son paralelas al elemento de superficie, por lo que el producto escalar que determina el elemento de flujo es simplemente el producto de los módulos de los vectores.
Por último, al ver que el problema carece de detalle angular, concluimos que a cada radio la intensidad de los campos es única, por lo que dicha intensidad puede ser extraída fuera de la integral para obtener:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{Sup\ lat} \left|\vec{D}\right|\left|d\vec{S}\right| = \left|\vec{D}\right| \int_{Sup\ lat} \left|d\vec{S}\right| = \left|\vec{D}\right| 2\pi r L = Q$$
$$\left|\vec{D}\right| = \frac{Q}{2\pi r L} \qquad \left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r L} \tag{17}$$

Vemos (como ya sabíamos) que los campos varían en forma inversamente proporcional a la distancia al centro.
Para conectar la cantidad de carga almacenada con el valor de la pila computamos la circulación del campo eléctrico desde el conductor central hasta el exterior.

$$V(b) - V(a) = -V_p = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$C = \frac{Q}{V_p} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{18}$$

Resultados estos que ya conocíamos (ya los debíamos conocer?)

La cantidad de energía acumulada es entonces

$$W = \frac{1}{2}CV_p^2 = \frac{1}{2}\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}V_p^2 \tag{19}$$

Vamos a ver cómo podemos llegar al mismo resultado operando con nuestra recién definida densidad de energía. Primero vamos a computarla:

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{Q}{2\pi rL}\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r rL} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(2\pi rL)^2\varepsilon_0\varepsilon_r} \qquad (20)$$

Esta relación nos dice que hay más densidad de energía en las regiones próximas al conductor central puesto que el campo es más intenso allí.
Ahora, a diferencia del capacitor plano, no podemos computar la energía total simplemente multiplicando la densidad de energía por el volumen puesto que no hay uniformidad de los campos. Lo que hacemos es integrar sobre el volumen.

$$W = \int_v u dv = \int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^L u\; dz\; rd\varphi\; dr = 2\pi L\frac{Q^2}{(2\pi L)^2\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_a^b \frac{1}{2}\frac{rdr}{r^2} = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (21)$$

Que coincide con la (19) si nos ayudamos con la (18) (hagan el reemplazo).

Hasta aquí puede parecer que nos hemos complicado mucho para recuperar un resultado que podíamos computar fácilmente con la capacidad.
Vamos a ver ahora otro ejemplo en apariencia un poco más difícil.

Consideremos una distribución esférica de cargas de radio a y densidad volumétrica ρ uniforme. Este caso lo hemos tratado en lo que hace al cálculo de los campos, por completitud lo repetimos aquí.
Calcularemos la densidad de energía primero con la expresión (7). La densidad de cargas es uniforme así que puede ser extraída fuera de la integral:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V dv = \frac{1}{2}\rho\int V dv$$

Dada la simetría del problema, en lugar de escribir el elemento de volumen en coordenadas esféricas consideramos una cáscara esférica de radio r y espesor dr cuyo volumen vale: $dv=4\pi r^2 dr$. Consecuentemente el potencial generado por la distribución de cargas, tomando como $V(\infty)=0$, es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4/3\,\pi r^3\rho}{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r^2$$

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V dv = \frac{1}{2}\rho\int V dv = \frac{1}{2}\rho\int_0^a \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\frac{a^5}{5}$$

Calcularemos ahora de nuevo utilizando la densidad de energía.
Recordamos que el campo eléctrico tiene dos zonas bien definidas. Dentro de la esfera el mismo vale:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

Mientras que fuera de la misma es:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

Calculamos ahora la densidad de energía para cada región:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 \quad r < a$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \quad r \geq a$$

Ahora debemos tener cuidado e integrar en volumen la densidad de energía a TODA región con campo no nulo, es decir a TODO el espacio y no sólo limitarnos a las esfera.

$$W = \int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0}\frac{a^5}{5} + \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0}a^5 = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}$$

Resultado que concuerda con el obtenido previamente.
Es importante enfatizar que la integración debe proceder sobre toda región que tenga campos no nulos y no limitarse a la región donde hay cargas.

Este último ejemplo con seguridad parecerá muy difícil de seguir y hasta es probable que alguien considere que le resultará imposible repetirlo sin copiarlo y menos aún acometer otro ejemplo.
Sin embargo es una sensación errónea. Es posible repetir este ejemplo y aún desarrollar otros, sólo hace falta entrenamiento y práctica.
Ahora es el turno de ustedes.