

Física II. Electricidad y Magnetismo

Proemio

Por un prolongado período consideré innecesario el escribir apuntes de clase puesto que hay muy buenos textos introductorios sobre los temas básicos de electricidad y magnetismo. Estos libros han pasado por un prolijo proceso de elaboración y pulido, por lo que los considero superiores a los apuntes redactados informalmente.

Quedaban, quizás, algunos ítems por profundizar pero no me parecían de una envergadura tal que requirieran de un texto aparte.

En los últimos tiempos me he visto obligado a revisar mi posición debido a dos razones. Primero he notado que el uso de libros de texto ha retrocedido notoriamente. Desconozco las razones de esta costumbre pero es un hecho que el estudiantado confía más en sus apuntes que en los libros. Lamentablemente lo que se transcribe de una clase dista mucho de ser perfecto. La persona que toma notas tiene que dividir su atención entre seguir el hilo discursivo y escribir. Además, los docentes cometemos errores u omitimos puntos que pretendíamos explicar pero que dejamos de lado por olvido o falta de tiempo.

La segunda razón tiene mucho que ver con mi modalidad de dar clase. Prefiero exponer lentamente las ideas dando tiempo al auditorio a asimilar los conceptos y a tomar notas. Sin embargo, esta metodología parece ser contraproducente porque muchas personas encuentran difícil transcribir al papel, en forma eficiente, lo expuesto oralmente. Es así que he leído varias opiniones que mencionan, con carácter de ligero reproche, que el material que escribo en el pizarrón (listo para ser copiado), es limitado. Si bien creo que mi aproximación no es mala, otorgo que puede ser insatisfactoria para un auditorio urgido de tiempo. Además, tenemos tantos temas a desarrollar en una clase que estas terminan pareciendo maratones de enseñanza.

En vista de esto, he decidido proveer una ayuda: notas más o menos elaboradas que siguen el mismo desarrollo de la clase pero que alivian la necesidad de tomar extensivos apuntes.

Esta es una tarea formidable por la extensión; son muchísimas páginas y será imposible proveer todo el temario de la materia en este cuatrimestre porque debería usar las 24 horas del día para escribir, pero la travesía de un millar de kilómetros comienza con un paso. Sea este el primero de una larga serie.

Considero prudente hacer notar que, si bien he revisado el material, el mismo no está exento de errores ortográficos, de sintaxis, de notación y cualquier otra falla que venga a la mente. Los libros no son reemplazables.

Guillermo Santiago

Agosto de 2007

Introducción

El número de palabras que utilizan el prefijo “electro” es muy grande y mucho más lo es el de otras que no lo contienen pero cuyo significado evoca ideas semejantes.

Definitivamente vivimos en un mundo “electrodependiente” (si tal palabra existiera). Basta pensar en las infinitas incomodidades que acarrea un apagón y en el terrible impacto que en nuestra vida cotidiana tienen las computadoras, teléfonos celulares, reproductores de mp3,

mp4 y otros centenares de objetos que utilizamos sin detenernos demasiado a pensar en las razones de su funcionamiento.

El objetivo principal de este curso es precisamente aprender los principios básicos de la naturaleza que determinan qué podemos hacer (y qué no) con las “electrocosas”.

No puedo prometer que en un cuatrimestre habremos aprendido lo suficiente como para comprender a fondo cómo funciona un teléfono celular (ni mucho menos), pero sí comenzaremos a recorrer el camino en esa dirección.

Para quienes estudian Ingeniería Electricista o Electrónica este es solamente el primer curso de una larga serie de otros en los que la complejidad de los temas irá aumentando. Al mirar para atrás y pensar en Física II dirán: “¿Y por esta pavada me hacía drama?”

Otros, la mayoría, tendrán a lo sumo un par más de materias donde este tema se trate y con ese capital, más reducido, deberán enfrentar el trabajo de todos los días. Quizás estos alumnos son las que más debieran beneficiarse con este curso.

Quizás el párrafo anterior haya sido un poco solemne y no era mi intención. Mi objetivo no es el de asustar sino el de tratar de mostrar que podemos aprender cosas útiles y que esta materia no es un “filtro” o un obstáculo mayor a la hora de continuar la carrera.

Bien, esta introducción ya ha durado demasiado y es tiempo de ponernos a trabajar porque el temario es largo y el tiempo escaso (este es un defecto grave del plan y como docente me avergüenza reconocerlo).

Las cargas eléctricas y las fuerzas asociadas. Ley de Coulomb

En los cursos de Química previos nos hemos topado con palabras propias de nuestro temario pero cuyo significado no comprendimos a fondo. Sabemos que los átomos tienen un núcleo conformado por protones, de carga positiva, neutrones, sin carga, y alrededor del núcleo un enjambre de electrones de carga negativa. Hasta aprendimos cosas aún más extrañas como niveles de energía en los que se ubicaban los electrones (1 s, 2s,...).

Pues bien, tanto los protones como los electrones son los ejemplos elementales de cargas eléctricas. La naturaleza nos entrega exclusivamente **dos tipos de carga: positivas y negativas**. Estos son solo nombres y no conllevan juicio alguno (algunas personas piensan que las cargas positivas son “buenas” y que las negativas son “malas”). Cada átomo tiene iguales cantidades de carga positiva y negativa por lo que lo declaramos “neutro”. Sin embargo, es posible alterar este balance. El método más antiguo reportado está basado en frotar un objeto contra otro. Al rozar unos átomos contra otros algunos “pierden” electrones, quedando cargados positivamente, mientras que otros “ganan” los electrones que fueron cedidos y quedan entonces cargados negativamente. Los detalles de este fenómeno, denominado triboelectricidad, son complejos para ser considerados ahora pero es interesante mencionar que la palabra electrón es de origen griego y significa ámbar. Esta es una resina vegetal que fácilmente adquiere carga por frotamiento, en particular contra pieles de animales. Las razones por las que alguien podía encontrar útil, o aunque sea interesante, el frotar una resina contra una piel escapan a mi entendimiento. Como síntesis es bueno recordar que un objeto cargado eléctricamente es aquel que ha intercambiado carga con otro (sea por frotamiento o por formas que ya mencionaremos). Esto lleva a una conclusión importante, dado que la naturaleza nos brinda átomos neutros (con iguales cantidades de cargas positivas y negativas), ese balance debe mantenerse siempre porque hemos constatado experimentalmente que la carga eléctrica no es susceptible de ser creada o destruida, solo puede ser transportada de un sitio a otro. Este es el llamado principio de conservación de la carga y la experiencia demuestra que se cumple sin excepciones. Lo utilizaremos extensivamente porque es el primer paso para estudiar muchas situaciones.

Volviendo a los resultados experimentales observamos que dos objetos cargados con el mismo tipo de carga experimentan una fuerza repulsiva. En cambio, si las cargas son de diferente tipo, la fuerza es atractiva. Esto era simplemente una curiosidad para divertir a reyes y poderosos y durante muchísimos años no se produjo avance alguno.

En el siglo XVIII Charles Agustín de Coulomb llevó a cabo una serie de experimentos en los que cuantificó las características de estas fuerzas entre objetos cargados. Para hacerlo utilizó lo que llamamos una balanza de torsión y que vemos en la figura 1.

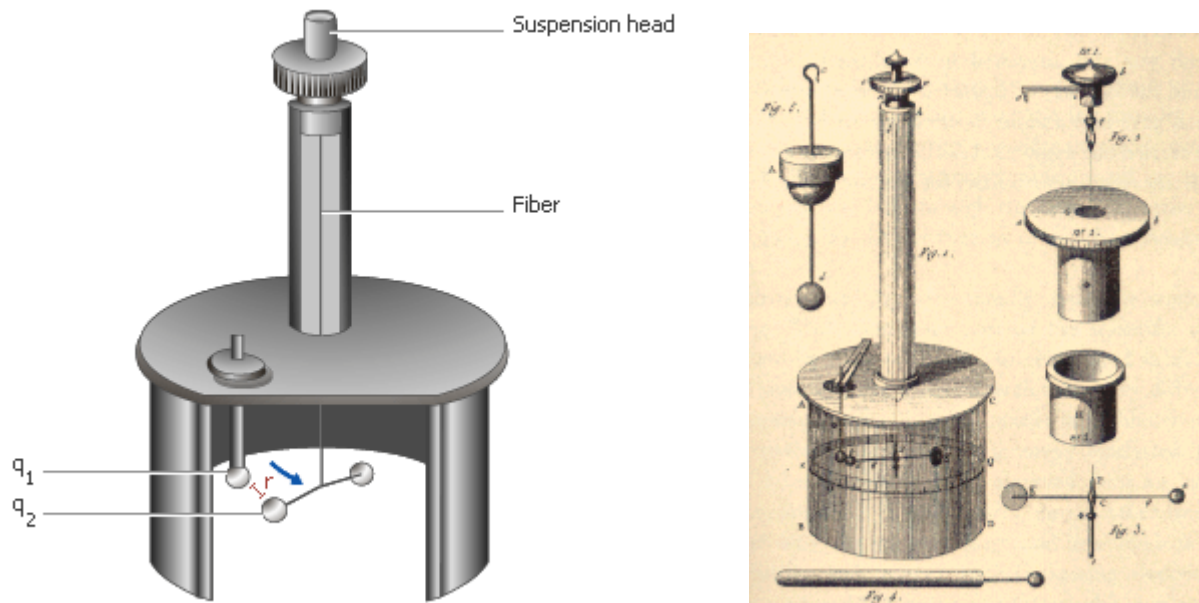


Figura 1. Experimento de Coulomb

En el extremo de un hilo pende una barra horizontal balanceada en la que se ubica una pequeña esfera que puede ser cargada por frotándola con otro objeto. En las vecindades se ubica otra esfera cargada y montada sobre un soporte firme. Dado que actúan fuerzas eléctricas de atracción o repulsión el hilo tiende a retorcerse en un sentido u otro. Para devolver al sistema a la condición original se rota el extremo superior del hilo en sentido contrario y se registra el ángulo θ girado. Para pequeñas rotaciones el hilo sigue un comportamiento lineal semejante a la ley de Hooke para un resorte por lo que resulta que el torque τ es proporcional al ángulo θ rotado a través de la llamada constante de torsión del hilo C_t ($\tau = C_t \theta$). Con el torque conocido, así como la distancia de la esfera cargada al hilo, es posible computar la fuerza eléctrica actuante sobre la esfera (¿recuerdan la relación entre fuerza, distancia y torque?).

El resumen de los experimentos se sintetiza en la así llamada ley de Coulomb la que para esferas muy pequeñas (casi puntos) dice que el módulo de la fuerza de interacción es proporcional al producto de las cargas q_1 y q_2 de cada esfera e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d_{12} que las separa.

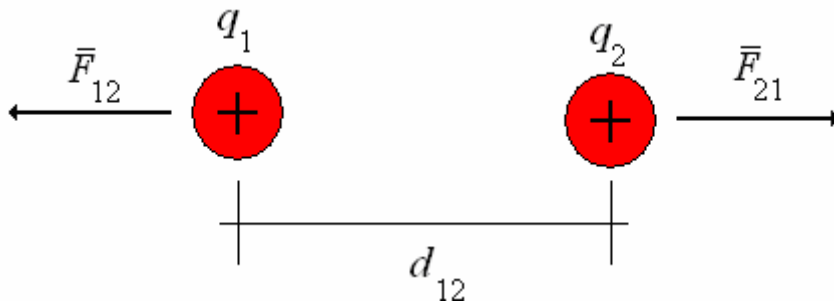


Figura 2. Interacción eléctrica entre dos cargas puntuales

$$|\vec{F}_{12}| = k \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \quad (1)$$

donde k es una constante a determinar.

Esta ley es fundamental y debemos discutirla en detalle. Surgen preguntas como: ¿de dónde proviene?, ¿cómo se puede demostrar? En el fondo, ¿qué es la carga eléctrica? La respuesta a la primera es que es una ley totalmente nueva, encontrada experimentalmente, y que no puede ser reducida a un conocimiento previo. En este sentido la ley de Coulomb se parece a la ley de atracción gravitatoria de Newton ($|F| = G \frac{m_1 m_2}{d_{12}^2}$). No solo son matemáticamente muy

parecidas sino que también son fundamentales en el mismo sentido, no hemos sido capaces de reducirlas a conceptos previos y por eso las consideramos leyes básicas de la naturaleza. Las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas pero las eléctricas pueden ser atractivas o repulsivas; sin embargo desde el punto de vista matemático las leyes son iguales. En este punto nos encontramos en una situación similar a la que vivimos cuando fuimos expuestos por primera vez al concepto de masa y de fuerza gravitatoria. Recordemos que no fue fácil asimilarlos y que lentamente, luego de estudiar muchos ejemplos, fuimos “entendiendo” el significado de estos conceptos. Obviamente la masa es más fácil (más o menos) para que vayamos conectando los conceptos de fuerza, masa y aclaración porque nos hacen pensar en empujar un changuito de supermercado vacío y luego lleno de botellas de la bebida que nos plazca. En cuanto al peso sucede algo semejante; tenemos una experiencia sensorial previa que nos ayuda un poco.

Lamentablemente no sucede lo mismo con las cargas eléctricas y las fuerzas asociadas. No tenemos una vivencia cotidiana de ellas con la posible excepción de arrimar el brazo a un televisor encendido y sentir cómo el vello del brazo es atraído hacia la pantalla. Este déficit de experiencia sensorial nos va a demandar un poco más de abstracción. No es simple pero haremos todo lo posible para allanar el camino.

Volviendo a la ley de Coulomb queda pendiente el tema de la constante k . Dado que el concepto de carga eléctrica es nuevo podemos optar por definir la unidad de carga como aquella que ubicada a una unidad de distancia de otra igual genera una fuerza unitaria por lo que la constante también será unitaria. Esta era la elección tomada en el sistema CGS pero cayó en desuso. En el sistema MKS se tomó otra decisión y la unidad de carga, denominada Coulomb (C), quedó dada por otro camino que comentaremos en otro momento. La constante k deja de ser unitaria y vale aproximadamente $9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$.

Esta constante tan grande sugiere que las fuerzas eléctricas son muy intensas y lo veremos con el siguiente ejemplo.

Consideremos un mol de una sustancia, por ejemplo carbono. Sabemos que equivale a 12 gramos (no mucho por cierto) y que contiene 6.02×10^{23} átomos. Cada átomo de carbono tiene 6 electrones y 6 protones. Un experimento llevado a cabo por Henry Millikan a principios del siglo XX mostró que la carga de los electrones y los protones es igual en módulo y equivale a 1.6×10^{-19} C. El total de carga positiva Q (o negativa) presente en 12 g de C es entonces:

$$Q = 6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 6.02 \times 10^{23} \approx 58 \times 10^4 \text{ C.}$$

Imaginemos ahora que intentamos separar toda la carga positiva de la negativa y apartarlas una distancia de 1 metro; ¿cuál será la fuerza de atracción entre ambos grupos?

Con la ayuda de la ley de Coulomb obtenemos una fuerza increíblemente grande, del orden de 3×10^{21} N. Cuesta imaginar un ejemplo más o menos cotidiano de una fuerza tan grande, de hecho jamás pude encontrarlo. Es fácil ver el origen numérico de la respuesta, no solo es grande la constante de proporcionalidad, sino también la cantidad de carga involucrada. Por supuesto que podemos pensar en aumentar la distancia para reducir el módulo de la fuerza a valores “aceptables”, pero eso requiere de distancias astronómicas.

Esto nos muestra que las fuerzas eléctricas son muy intensas y que en situaciones “normales” la cantidad de carga que podemos transferir es muy pequeña. Podemos preguntarnos ahora: ¿Para qué queremos fuerzas eléctricas? Pues bien, las fuerzas que mantienen el enlace entre átomos tienen un carácter eléctrico (aunque no tan simple como muestra la ley de Coulomb), así que al menos nos interesa para mantenernos en una única pieza. Más allá de esta reflexión egoísta les cuento que la fotocopiadora o la impresora láser funcionan directamente en base a fuerzas eléctricas, así que si queremos poner una fábrica de ellas nos preocuparía el tema.

La interacción entre dos cargas ya quedó descrita pero la buena noticia (o mala, según sea vista) es que puede ser extendida al caso de varias cargas recurriendo al llamado principio de superposición que nos asegura que, en el caso de tener varias cargas presentes, la fuerza total actuante sobre una carga puede ser calculada como la suma vectorial de las fuerzas. Dado que la oración anterior es un poco compleja vamos a plantearla con un ejemplo simple que muestra la figura 3.

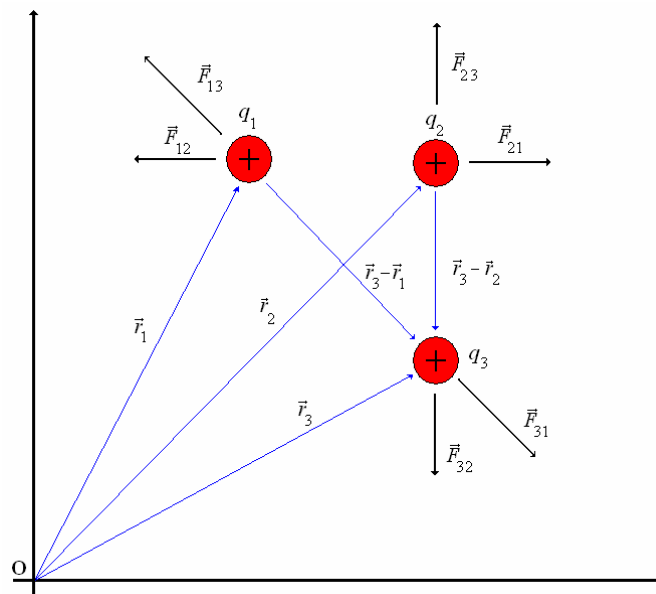


Figura 3. Sistema de tres cargas eléctricas puntuales

Para no complicar el ejemplo hemos dibujado tres cargas, q_1 , q_2 y q_3 , ubicadas en las posiciones \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y \vec{r}_3 medidas con respecto a un origen de coordenadas \mathbf{O} . Todas las cargas son consideradas positivas para facilitar el primer análisis. Supongamos que el objetivo es computar la fuerza eléctrica total actuante sobre la carga 3. En base al principio de superposición estudiamos primero la interacción entre la carga 1 y la 3 (sin tomar en cuenta la 2), luego lo hacemos para el par 2 y 3 (sin considerar la 1) y finalmente sumamos los resultados parciales para tener la fuerza total deseada.

La tarea no parece complicada puesto que evaluar con la ley de Coulomb el módulo de cada fuerza es simple, así que resta hacer un dibujo prolijo para hacer la suma vectorial. No será tarea difícil pero es muy tediosa por lo que vamos a hacer algunos arreglos que nos permitirán simplificar el cálculo e inclusive generar un algoritmo que podamos programar en una computadora.

Concentrémonos en la interacción entre las cargas 1 y 3. La fuerza, repulsiva por ser cargas del mismo signo, apunta en la dirección de la recta que une dichos puntos. Específicamente el vector $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ apunta en el sentido en el que lo hace la fuerza actuante sobre la carga 3 por la interacción con la 1. Tomamos entonces el módulo de la fuerza:

$$|\vec{F}_{31}| = k \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2} \quad (|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| \text{ es la distancia entre ambos puntos})$$

y si le agregamos un vector unitario en la dirección de $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ tendremos la fuerza dada con módulo y sentido. Para generar dicho vector unitario dividimos a $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ por su módulo y obtenemos:

$$\vec{F}_{31} = k \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} = k q_3 q_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3}$$

Esta es una expresión vectorial muy útil porque contiene toda la información necesaria; ya no tenemos que computar el módulo por un lado y dibujar el sentido después. La aplicación directa de esta expresión, aunque parezca más complicada, nos reduce la cantidad de trabajo. Si pasamos ahora a la interacción entre la carga 2 y la 3 es solo cuestión de cambiar los subíndices:

$$\vec{F}_{32} = k \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} = k q_3 q_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}$$

Solo nos queda sumar para tener la fuerza total sobre la carga 3: $\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$

Nos podemos preguntar ahora sobre qué habría pasado si alguna de las cargas hubiera sido negativa. Pues bien, basta con poner cada carga con su respectivo signo (verifiquenlo!!!).

Podemos entonces generalizar la situación y pensar que tenemos un conjunto de cargas puntuales q_i ($i=1\dots N$) y queremos computar la fuerza eléctrica actuante sobre una carga q_j cualquiera. Generalizando las expresiones anteriores obtenemos:

$$\vec{F}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N k q_j q_i \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} \quad (2)$$

Veamos cada término por separado. Primero la sumatoria nos indica que tenemos que considerar los pares posibles a excepción de la carga j -ésima consigo misma dado que la experiencia muestra que no existe interacción de una carga puntual consigo misma y menos mal que es así porque la distancia sería nula y estaríamos en serios problemas. Luego, cada término es una simple repetición de lo ya visto, por lo que no presenta mayores complicaciones (más allá del tedio). Es importante destacar un aspecto de nomenclatura que repetiremos extensivamente; el primer subíndice indica la carga (o lugar) sobre la que estudiamos el efecto de las demás, reflejado en el segundo subíndice. Por supuesto que es solo una convención, pero es la utilizada internacionalmente y pretendemos seguir la misma regla. Veamos un ejemplo con las siguientes cargas (el prefijo n se lee “nano” y equivale a 10^{-9}) y posiciones (las cargas están en el plano $z=0$ para simplificar el dibujo):

$$\begin{aligned}
 q_1 &= 10 \text{ nC}, & \vec{r}_1 &= (1\hat{i} + 2\hat{j}) \\
 q_2 &= -5 \text{ nC}, & \vec{r}_2 &= (0\hat{i} + 1\hat{j}) \\
 q_3 &= -2 \text{ nC}, & \vec{r}_3 &= (-2\hat{i} + 2\hat{j}) \\
 q_4 &= 20 \text{ nC}, & \vec{r}_4 &= (-1\hat{i} - 2\hat{j})
 \end{aligned}$$

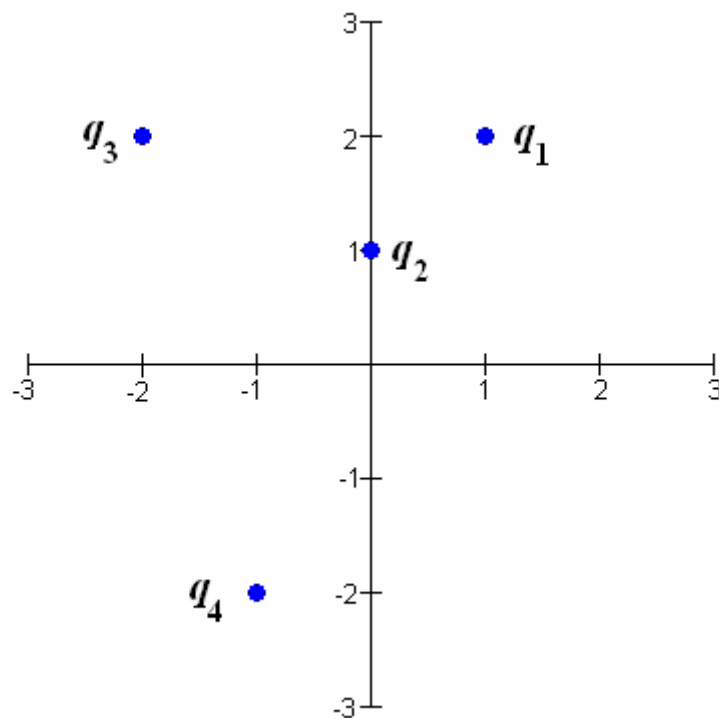


Figura 4. Un ejemplo con cuatro cargas puntuales

Queremos calcular la fuerza total actuante sobre la carga 2. Reemplazamos los valores para obtener:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} (-5 \times 10^{-9} \text{ C})(10 \times 10^{-9} \text{ C}) \frac{[(0 \hat{i} + 1 \hat{j}) - (1 \hat{i} + 2 \hat{j})]}{|(0 \hat{i} + 1 \hat{j}) - (1 \hat{i} + 2 \hat{j})|^3} = -4.5 \times 10^{-5} \frac{(-1 \hat{i} - 1 \hat{j})}{2.83} \text{ N} \\ \vec{F}_{23} &= 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} (-5 \times 10^{-9} \text{ C})(-2 \times 10^{-9} \text{ C}) \frac{[(0 \hat{i} + 1 \hat{j}) - (-2 \hat{i} + 2 \hat{j})]}{|(0 \hat{i} + 1 \hat{j}) - (-2 \hat{i} + 2 \hat{j})|^3} = 9 \times 10^{-6} \frac{(2 \hat{i} - 1 \hat{j})}{11.18} \text{ N} \\ \vec{F}_{24} &= 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} (-5 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C}) \frac{[(0 \hat{i} + 1 \hat{j}) - (-1 \hat{i} - 2 \hat{j})]}{|(0 \hat{i} + 1 \hat{j}) - (-1 \hat{i} - 2 \hat{j})|^3} = -9 \times 10^{-5} \frac{(1 \hat{i} + 3 \hat{j})}{31.62} \text{ N} \\ \vec{F}_2 &= \left(\left(\frac{4.5 \times 10^{-5}}{2.83} + \frac{18 \times 10^{-6}}{11.18} + \frac{-9 \times 10^{-5}}{31.62} \right) \hat{i} + \left(\frac{4.5 \times 10^{-5}}{2.83} + \frac{-9 \times 10^{-6}}{11.18} + \frac{-27 \times 10^{-5}}{31.62} \right) \hat{j} \right) \\ &= (14.7 \hat{i} + 6.6 \hat{j}) \times 10^{-6} \text{ N}\end{aligned}$$

Aunque quede reiterativo enfatizamos una vez más la regla. Primero ubicamos la carga sobre la que queremos calcular el efecto (q_j, r_j) y luego recorremos todas las demás ($q_i, r_i, i \neq j$).

Antes de continuar vamos a regodearnos con una cuota de maldad. No contentos con haber introducido súbitamente muchas ideas nuevas: existe la carga eléctrica, hay fuerzas eléctricas, no se pueden reducir a otros conceptos,... vamos a hacer un cambio de nomenclatura. Por razones que serán comprensibles más adelante, la constante de proporcionalidad k de la ley de

Coulomb la presentamos como: $k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$ la constante ϵ_0 se llama permitividad del vacío y

en el sistema MKS vale (obviamente) $8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$. Pedimos paciencia y ya veremos que este cambio de nomenclatura es útil porque el factor 4π se cancela en otras expresiones y el resultado es más “elegante”

Un comentario de cierre: La experiencia de Coulomb fue realizada con objetos reales, hechos de materiales reales. Sin embargo no hemos mencionado nada de las propiedades de dichos materiales. Aunque no sepamos mucho de la cuestión eléctrica, las palabras “aislador” o “conductor” no nos son totalmente extrañas. En este capítulo, y en el que sigue, suponemos que tenemos cargas “puras” no pertenecientes a material alguno. Esta limitación será corregida más adelante, pero conviene señalar que deberíamos hablar de distribuciones de carga antes que de objetos cargados. Si bien trataremos de respetar esta convención es inevitable que se nos escape algo como “una esfera cargada” cuando deberíamos haber dicho “una distribución esférica de carga”

Las distribuciones continuas de carga

El método anterior, aunque tedioso, permite calcular la fuerza eléctrica actuante sobre una carga que interactúa con otras. En un párrafo previo mencionamos que la carga de los electrones y protones es, en módulo, el mismo valor. Dicha cantidad recibe el nombre de carga elemental puesto que esta es la cantidad mínima e indivisible que se encuentra en la naturaleza (tomemos esto sin demostración)¹. Por lo tanto todo objeto cargado ha de tener un múltiplo entero de estas unidades elementales. Si analizamos el ejemplo anterior, donde propusimos cargas del orden de 10^{-9} C , vemos que el número de cargas elementales involucradas es muy grande. E¹s decir que si ponemos una más o una menos el cambio

¹ La carga de los quarks (objetos de escala atómica) son fracciones de la del electrón pero no se pudieron aislar.

porcentual en el resultado es despreciable. Eso nos lleva a concebir una situación aproximada pero muy útil y es la de considerar a la carga como una magnitud continua con las propiedades de una variable real. Por lo dicho anteriormente esto no es estrictamente posible desde el punto de vista matemático puesto que la carga no es una variable real sino una discreta, pero a los fines prácticos es una suposición muy acertada.

¿Para qué nos puede servir esto? Pues bien, en situaciones del mundo real el número de cargas involucrado en un problema real es muy grande y proceder con una suma discreta como la presentada en el ejemplo es virtualmente imposible.

Necesitamos otra aproximación y esta viene de la mano de nuestro pedido anterior de considerar a la carga como una variable real continua².

Para comprender esto pensemos en una fotocopia común (todos hemos esperado pacientemente para obtener una, ¿no?). ¿Cómo anda la fotocopidora? Observamos que luego de poner el original sobre el vidrio y presionar el botón correspondiente se desliza por debajo del original una luz blanca que explora la imagen a copiar, este es el *scanner*. La imagen reflejada contiene zonas claras (papel) y oscura (tinta). Esta imagen es enfocada y transferida sobre un cilindro no en forma de un dibujo, sino como una distribución de cargas eléctricas. Donde llegó mucha luz hay pocas cargas y sobre las zonas correspondientes a las partes oscuras se deposita una cantidad apreciable de cargas. Así, luego de explorar la imagen, el cilindro tiene “pintada” una copia de la imagen no con tinta sino con cargas. El paso siguiente consiste en distribuir sobre el cilindro partículas de *toner* que han sido cargadas con polaridad opuesta. Estas se adhieren por atracción eléctrica y ahora sí el cilindro está “pintado” de negro donde corresponde. Luego la hoja de papel es presionada sobre el cilindro mientras rota de forma tal de transferir el *toner* al papel. Solo resta el “planchado” que calienta el papel y funde al *toner* dentro del mismo para que no se borre. Hemos presentado, si bien de forma escueta, el primer uso de las fuerzas eléctricas (¿no estaría mal ser el dueño de una de las compañías fabricantes de fotocopadoras ¿no?).

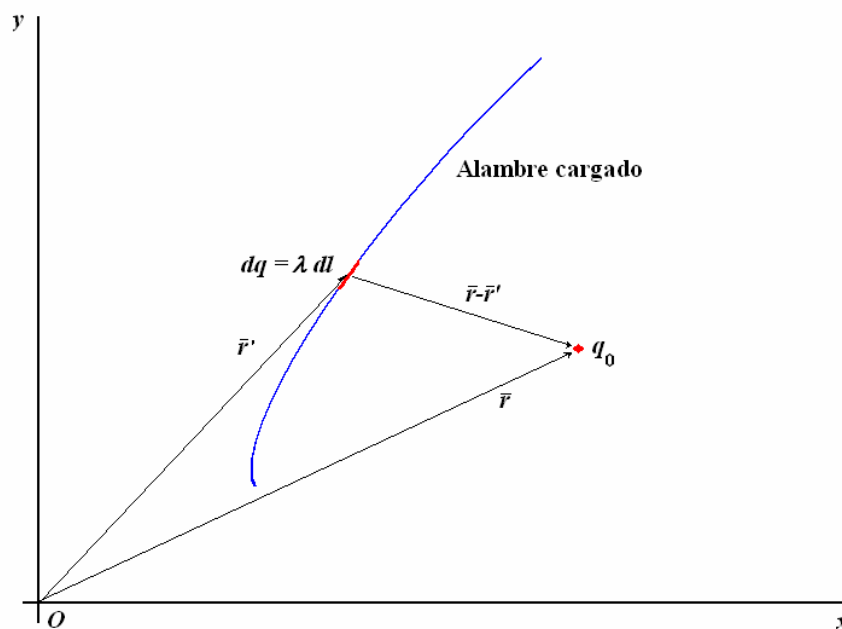


Figura 5. Interacción eléctrica entre un alambre cargado y una carga puntual.

² Algo semejante sucedió en Física I con la masa

Ahora que expusimos el principio de funcionamiento supongamos que queremos cuantificar el proceso para poder tener criterios de diseño. Rápidamente vemos que el número de partículas de *toner* es demasiado grande como para evaluar el resultado a partir de la suma discreta que expusimos anteriormente (¿vieron alguna vez que el *toner* parece un polvo muy fino?).

Vamos a cambiar nuestro método para simplificar el problema, pero como una fotocopia es un problema bidimensional es demasiado difícil por ahora y vamos a considerar algo más simple: un objeto unidimensional cargado, por ejemplo un alambre, y una única carga puntual q_0 sobre la que computamos la fuerza. (ver figura 5).

Concentremos ahora nuestra atención en una pequeña porción del alambre (trazo rojo) de largo Δl y que tiene una carga Δq . Si hacemos tender Δl a cero la razón $\Delta q / \Delta l$ tiende a un límite llamado densidad lineal de carga λ ($\lambda = dq/dl$). Dicho valor es la cantidad de carga por unidad de longitud y las unidades son C/m. Noten que este paso ha sido posible por considerar a la carga como una variable continua. Ahora, con nuestra mirada fija en el segmento de largo dl y carga dq computamos el *diferencial* de fuerza actuante entre dicha parte del alambre y q_0 . Nos valemos de la ley de Coulomb pero tenemos que ser cuidadosos a la hora de asignar las variables. La posición donde se encuentra q_0 la denotamos por \vec{r} (como en nuestro ejemplo previo) y la correspondiente a la de la carga con la que interactúa la nombramos \vec{r}' .

Así obtenemos:

$$d\vec{F}_{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 dq \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3)$$

Ahora resta imaginar que recorremos todo el alambre y sumamos las contribuciones elementales, es decir que **integramos el diferencial de fuerza a lo largo del cable**.

$$\vec{F}_{q_0} = \int d\vec{F}_{q_0} = \int_{Cable} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 dq \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_{Cable} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \lambda dl \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4)$$

En la última expresión reemplazamos $dq = \lambda dl$ siguiendo la definición de la densidad lineal de carga.

Seguramente todo este desarrollo ha sido muy difícil así que lo mejor es mostrar con un ejemplo mostrado en la figura 6. Una distribución rectilínea de largo L está cargada con una densidad lineal constante λ_0 . La carga q_0 se encuentra a una distancia d del eje de la distribución y centrada en el largo de la misma.

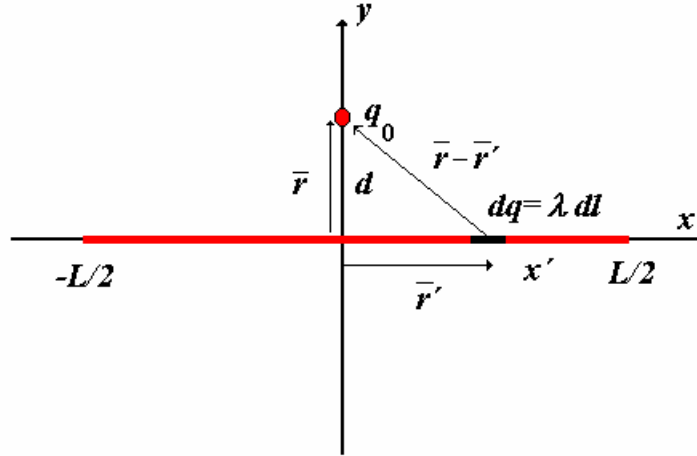


Figura 6. Una distribución de carga rectilínea

Somos libres de elegir el sistema de referencia que más nos convenga. Ubicamos a la distribución sobre el eje x y el origen de coordenadas sobre el punto medio de la misma de forma tal que el punto en el que se encuentra q_0 quede sobre el eje y .

Con esta elección tenemos: (los vectores \vec{r} y \vec{r}' aparecen ligeramente corridos para verlos mejor)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (0 \hat{i} + d \hat{j} + 0 \hat{k}), & \vec{r}' &= (x' \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k}), & dl &= dx' \\ \vec{r} - \vec{r}' &= (-x' \hat{i} + d \hat{j} + 0 \hat{k}), & |\vec{r} - \vec{r}'|^3 &= (x'^2 + d^2)^{3/2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(-x' \hat{i} + d \hat{j} + 0 \hat{k}) \lambda_0 dx'}{(x'^2 + d^2)^{3/2}}$$

Nótese que la integral anterior es **vectorial**, el numerador contiene un vector expresado en sus componentes cartesianas y entonces tenemos **tres** integrales a resolver. Por más incómodo que parezca, la fuerza es una magnitud vectorial y por lo tanto tiene componentes que debemos calcular. En la expresión anterior la tercera componente es nula (¿se ve el motivo?) así que el problema queda reducido a evaluar dos términos:

$$\begin{aligned} F_x(\vec{r}) &= \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(-x') \lambda dx'}{(x'^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{\sqrt{(x^2 + d^2)}} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = 0 \\ F_y(\vec{r}) &= \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(d) \lambda dx'}{(x'^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \frac{x}{d(x^2 + d^2)^{3/2}} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda L}{d \sqrt{(L^2/4 + d^2)}} \quad (6) \\ F_z(\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Puede parecer complicado pero con un poco de práctica se torna simple. La secuencia es siempre la misma:

1. Ubicar el punto (\vec{r}) donde se encuentra la carga q_0 sobre la que queremos calcular la fuerza.
2. Encontrar un punto genérico (\vec{r}') de la región cargada.
3. Expresar el elemento de línea dl .
4. Calcular $(\vec{r} - \vec{r}')$, reemplazar e integrar.

Este ejemplo se concentró en un sistema cargado unidimensional (1-D). Nada impide pensar en objetos cargados bidimensionales (2-D) o tridimensionales (3-D). Solo necesitamos extender el concepto de una distribución continua de cargas para estas situaciones.

Definimos entonces la densidad superficial de carga σ como la cantidad de carga por unidad de superficie: $\sigma=dq/dS$. Las unidades de esta magnitud son C/m^2 . Extendiendo, definimos la densidad volumétrica de carga ρ como la cantidad de carga por unidad de volumen: $\rho=dq/dV$, con unidades de C/m^3 .

Habiendo definido las tres densidades de carga: lineal, superficial y volumétrica, podemos generalizar y dar las expresiones de la fuerza eléctrica actuante sobre una carga q_0 debido a las diferentes situaciones:

$$\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \text{ distribución lineal (7)}$$

$$\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \text{ distribución superficial (8)}$$

$$\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \text{ distribución volumétrica (9)}$$

En las ecuaciones (7-9) enfatizamos que las respectivas densidades de carga, lineal, superficial, o volumétrica, son funciones del punto de la fuente \vec{r}' sobre el que nos encontramos. Si bien muchos de los ejemplos presuponen que dichas densidades son valores constantes, también hay muchas situaciones en las que no lo son y por lo tanto hay que expresarlas como función de las coordenadas del punto genérico del dominio de la integración.

Practiquemos un ejemplo 2-D y otro 3-D. Para el primero imaginamos una letra **O** que aparecerá en una fotocopia. La letra la suponemos con forma de corona circular de radio interior R_i y exterior R_e que yace en el plano x - y con el centro en el origen de coordenadas (podemos poner el origen de coordenadas donde nos plazca). Asimismo, consideraremos que la “oscuridad” de la letra es uniforme, lo que corresponde a decir que la densidad superficial de carga σ_0 es constante. Queda por decidir dónde vamos a colocar nuestra carga q_0 sobre la que calcularemos la fuerza. Como somos un poco vagos elegimos un lugar obvio, fácil y nos decidimos por un punto sobre el eje z porque intuimos que el resultado será más simple.

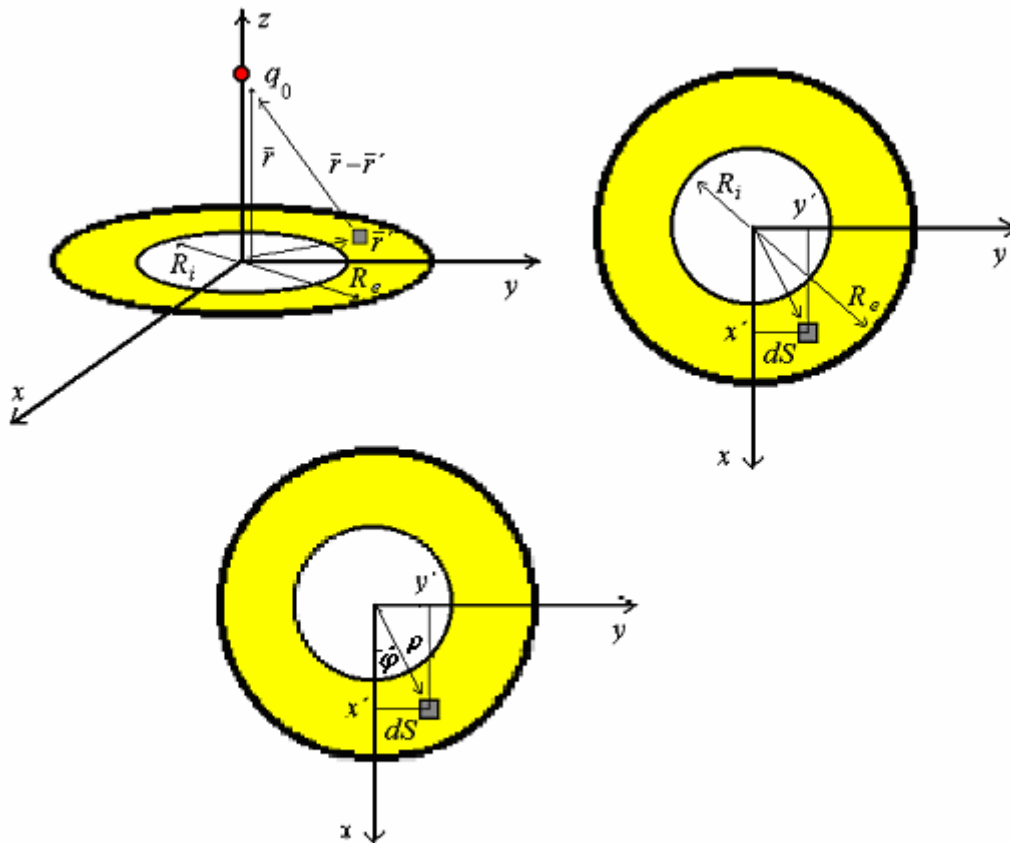


Figura 7. Distribución de carga con forma de corona circular

Asignamos entonces algunas variables:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (0, 0, z) \\ \vec{r}' &= (x', y', 0) \quad (10) \\ dq &= \sigma_0 dS \end{aligned}$$

En el segundo renglón tenemos un problema; x' e y' deben pertenecer a la corona, pero esta es redonda y estamos usando coordenadas cartesianas. Es lógico pasar a un sistema polar donde todo es más simple:

$$\begin{aligned} x' &= \rho' \cos(\varphi'); & y' &= \rho' \sin(\varphi') \\ R_i &\leq \rho' \leq R_e; & 0 &\leq \varphi' \leq 2\pi \end{aligned} \quad (11)$$

De la misma manera debemos cambiar el elemento de área:

$$dS = \rho' d\rho' d\varphi' \quad (12)$$

Sigamos con el cálculo:

$$\begin{aligned}
(\vec{r} - \vec{r}') &= (-\rho' \cos(\varphi') \hat{i} - \rho' \sin(\varphi') \hat{j} + z \hat{k}) \\
|\vec{r} - \vec{r}'|^3 &= (\rho'^2 \cos^2(\varphi') + \rho'^2 \sin^2(\varphi') + z^2)^{3/2} = (\rho'^2 + z^2)^{3/2} \quad (13) \\
\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) &= \frac{q_0}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 (-\rho' \cos(\varphi') \hat{i} - \rho' \sin(\varphi') \hat{j} + z \hat{k})}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\varphi'
\end{aligned}$$

Nuevamente vemos que hay **tres** integrales a resolver. Las dos primeras son fáciles porque las funciones seno y coseno integradas en un período devuelven un valor nulo. Este agradable resultado puede ser corroborado analizando la figura 5. Para cada elemento de área en las coordenadas (ρ', φ') existe uno igual en $(\rho', \varphi' + \pi)$, por lo que las componentes en los ejes x y y se vuelven nulas y solo nos queda la componente en z .

$$F_z(\vec{r}) = \frac{q_0}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 z}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\varphi' = \frac{q_0 \sigma_0}{2 \varepsilon_0} z \left[\frac{1}{\sqrt{R_i^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_e^2 + z^2}} \right] \quad (14)$$

Esta expresión nos brinda la fuerza que actuaría sobre la carga q_0 de la figura 7. Por supuesto que elegimos un lugar fácil para ubicarla, y así conseguimos que dos de las tres componentes de la fuerza fueran nulas, pero en nada altera el desarrollo. En caso de haber imaginado que q_0 estaba en otro lado el procedimiento habría sido exactamente el mismo, solo que en ese caso las tres componentes de la fuerza habrían resultado diferentes de cero.

Pasemos al último ejemplo y consideremos una distribución esférica de radio a uniformemente cargada con densidad volumétrica de carga ρ_0 constante

AVISO: NO CONFUNDIR ESTA DENSIDAD DE CARGA CON EL RADIO VECTOR DE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS CILINDRICOS O ESFERICOS; ES UN LAMENTABLE PROBLEMA DE USAR LA MISMA LETRA PARA DESIGNAR DOS VARIABLES DISTINTAS. APARECE REPETIDO VARIAS VECES PERO LAMENTABLEMENTE NO TIENE SOLUCION PORQUE EL NÚMERO DE LETRAS ES INFERIOR AL DE VARIABLES.

Esta situación equivaldría aproximadamente a la de una partícula de *toner* en una fotocopidora. Como ya dijimos, la elección del origen de coordenadas es a nuestro gusto y lo ubicamos en el centro de la esfera. Dada la simetría del problema, la posición de q_0 es irrelevante, así que la consideramos puesta sobre el eje y y fuera de la esfera cargada.

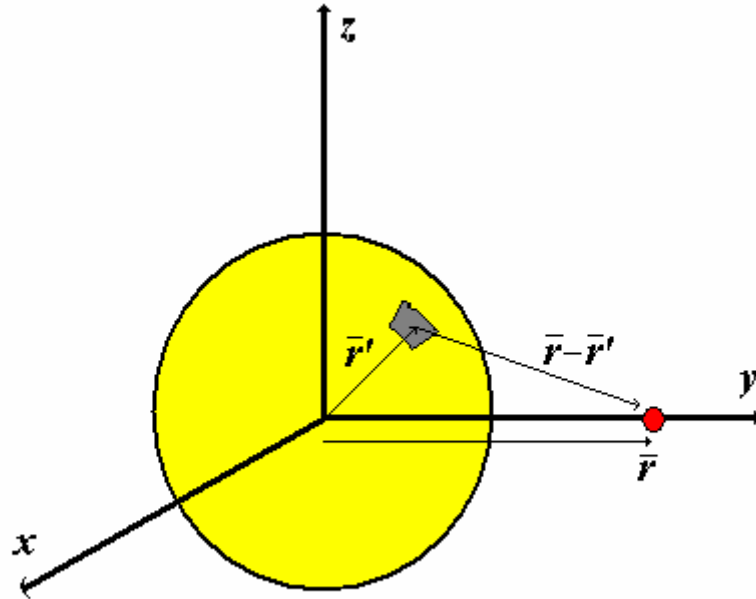


Figura 8. Distribución esférica de cargas

Tenemos las siguientes posiciones:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= (0 \hat{i} + y \hat{j} + 0 \hat{k}) \\
 \vec{r}' &= (x' \hat{i} + y' \hat{j} + z' \hat{k}) \\
 x' &= \rho' \sin(\theta') \cos(\varphi') \\
 y' &= \rho' \sin(\theta') \sin(\varphi') \\
 z' &= \rho' \sin(\theta') \\
 \vec{r} - \vec{r}' &= ((-\rho' \sin(\theta') \cos(\varphi')) \hat{i} + (y - \rho' \sin(\theta') \sin(\varphi')) \hat{j} + \rho' \sin(\theta') \hat{k}) \\
 |\vec{r} - \vec{r}'|^3 &= (\rho^2 - 2 y \rho \sin(\theta) \sin(\varphi))^{3/2} \\
 0 \leq \rho' &\leq a; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi
 \end{aligned} \tag{15}$$

En las expresiones anteriores reconocimos que si la fuente es esférica conviene utilizar una descripción en coordenadas esféricas (Qué descubrimiento!!!)

Terminemos entonces nuestra tarea, la fuerza actuante sobre q_0 es:

$$\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho'^2 \sin(\theta) d\rho' d\theta' d\varphi' = \left(0, \frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{y^2}, 0 \right) \tag{16}$$

La expresión anterior nos dice (si la integración no falló) que la fuerza actúa en la dirección del eje y , lo que resulta razonable porque si volvemos a la figura 6 notamos que para cada elemento de la fuente en x', y', z' existe uno idéntico en $x', y', -z'$, por lo que la componente según el eje z es nula. Con la misma idea, para cada elemento en x', y', z' tenemos otro en $-x', y', z'$ lo que lleva a que la componente según el eje x también desaparezca del resultado final.

Estos han sido tres ejemplos relativamente simples. Las formas no eran complicadas y las densidades de cargas fueron supuestas constantes. Aún así hubo bastante trabajo y muy

tedioso. Trataremos de mantenernos dentro de los ejemplos fáciles y más adelante aprenderemos una propiedad muy atractiva que, en determinados casos simples, nos permite calcular las fuerzas sin recurrir al largo, aburrido y peligroso trabajo de integración.

Nota complementaria: En esta última parte hemos hecho uso del concepto de carga distribuida. En temas que veremos próximamente nos interesa calcular la cantidad total de carga presente en un objeto. Si invertimos las definiciones en las que presentamos las densidades de carga obtenemos:

$$Q = \int_C \lambda \, dl \text{ distribución lineal}$$

$$Q = \int_S \sigma \, dS \text{ distribución superficial}$$

$$Q = \int_V \rho \, dV \text{ distribución volumétrica}$$

Para el caso particular de tener densidades **constantes** el proceso de integración se limita a una simple multiplicación:

$$Q = \lambda_0 L$$

$$Q = \sigma_0 S$$

$$Q = \rho_0 V$$

Un error muy común es utilizar estas expresiones cuando la densidad de carga es variable. Antes de seguir el camino fácil hay que verificar que es válido hacerlo!!!!

El campo eléctrico. Líneas de campo

En las expresiones anteriores, tanto sea cuando tenemos un conjunto discreto de cargas, como cuando tratamos con una distribución continua, está implícita la idea que aparece una fuerza eléctrica de interacción entre un objeto cargado A y otro B. Si arbitrariamente consideramos que el A es la carga q_0 y el B todo el resto, notamos que la fuerza de interacción tiene una dependencia lineal simple con q_0 . Si la duplicamos el resultado también lo hace. Por simples razones de economía podemos pensar que resulta conveniente hacer el cálculo de la fuerza para un valor de q_0 unitario para luego hacer regla de tres para obtener la solución para otros valores de q_0 .

Pero podemos ir un poco más allá de esta visión “práctica” y pensar que si estamos en un punto de observación \vec{r} en el que tenemos la carga q_0 e imaginariamente la removemos, entonces en esa posición hay “algo” aunque ya no esté presente q_0 para tener una fuerza mensurable.

Ese “algo” es denominado campo eléctrico y tiene similitudes con el campo gravitatorio aunque su raíz física es totalmente diferente (de hecho las fuerzas gravitatorias son de naturaleza diferente a las eléctricas). Si tomamos una piedra con la mano, sentimos en la palma una fuerza debida a la atracción gravitatoria entre la piedra y nuestro planeta. Si nos movemos a otro sitio seguimos sintiendo la fuerza en la mano y estamos convencidos de que

en cualquier lugar en que nos ubicáramos igual sentiríamos esa fuerza. Abstrayendo concebimos entonces la idea de un campo gravitatorio generado por la Tierra y que es un vector que en cualquier punto nos da la dirección en que actuaría la fuerza sobre la piedra.

Esta idea la extendemos y concebimos que un objeto cargado genera en su entorno un campo eléctrico, una magnitud vectorial que apunta en la dirección en la que actuaría la fuerza eléctrica si pusiéramos otra carga q_0 en las vecindades del primer objeto cargado.

Esta carga q_0 , que permite “observar” al campo recibe el nombre de “carga de prueba” y arbitrariamente es considerada siempre como positiva.

Definimos entonces el vector campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ como la fuerza eléctrica actuante por unidad de carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} \quad (17)$$

El campo eléctrico es el primer ejemplo de varias cantidades (escalares o vectoriales) que, definidas vagamente, son de la forma: “*resultado obtenido por unidad de algo*”. En el sistema MKS las unidades del campo eléctrico son N/C.

No es fácil concebir un campo vectorial y es bueno recurrir a algunas analogías para comprenderlo un poco mejor.

Un primer ejemplo es el campo de velocidades de un río. Pensemos que lanzamos a la corriente de agua un puñado de corchos todos pintados de colores distintos y seguimos su camino. Notamos que algunos avanzan rápidamente (en el centro del río), algunos lentamente (contra la costa) y algunos pueden quedar atrapados en remolinos y rotar.

Ahora filmamos el movimiento de los corchos y cuadro tras cuadro nos dedicamos a seguir el movimiento de cada uno para luego hacer un gráfico. Cada corcho en cada lugar tiene asignado una velocidad. Graficados todos juntos nos brindan el campo de velocidad del río. Marcando la trayectoria de cada corcho obtenemos las “líneas de flujo” del campo de velocidades. Como sabemos que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria concluimos entonces que las líneas del campo de velocidades son tangentes a las líneas de flujo.

Suficiente con el agua; volvamos a nuestro problema eléctrico y en particular a la figura 7. En ella supusimos que la carga de prueba se encontraba sobre el eje y , pero nada nos impide considerar que su posición es cualquier lugar en el espacio. La vamos “paseando” y nos imaginamos para dónde actuaría la fuerza resultante (lo mismo que con la piedra de hace un rato). La respuesta es simple: tendríamos siempre una fuerza de repulsión en la dirección de la recta que une el centro de la esfera con q_0 . Entonces, si para cada punto del espacio dibujamos un vector que nace en la esfera cargada y termina en el lugar donde se encuentra q_0 obtendremos un diagrama como el de la figura 9.

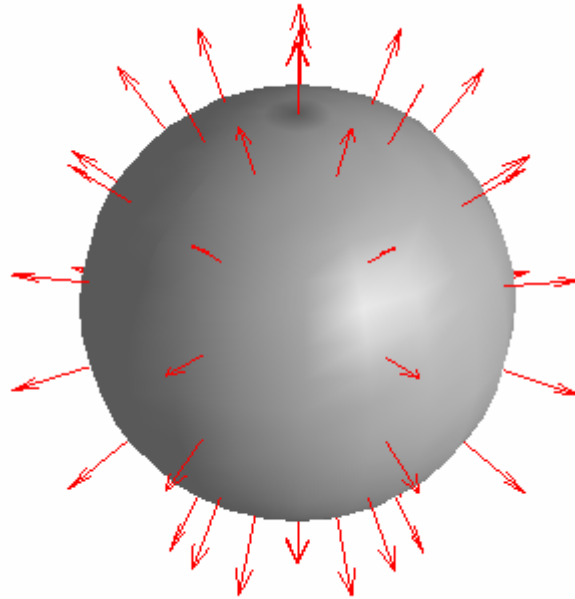


Figura 9. Líneas de campo de una esfera uniformemente cargada

La distribución espacial de las líneas de campo semeja un erizo de mar con sus púas. Para escribir formalmente este campo combinamos la (16) con la (17) y lo ilustrado por la figura 7.

El módulo del campo vale: $|\vec{E}| = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0} \frac{1}{y^2} = \frac{Q_{esfera}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^2}$. Según ya mencionamos, el obtener una

dependencia como $1/y^2$ dependía del hecho de haber ubicado la carga de prueba sobre el eje y . Pero, dada la simetría del problema, lo único relevante es la distancia desde la carga de prueba al centro de la esfera. Por lo tanto podemos escribir que el módulo del campo vale:

$|\vec{E}| = \frac{Q_{esfera}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$ donde r es la distancia desde el centro de la esfera al punto donde se encuentra

la carga de prueba. A partir del módulo encontramos el vector simplemente ayudados por la figura 8. La dirección es radial saliente, por lo tanto:

$$\vec{E} = \frac{Q_{esfera}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad (18)$$

La expresión anterior es correcta pero contiene muchas trampas ocultas que nos pueden llevar a cometer errores terribles (**el número de exámenes reprobados por este error es impactante**).

Primero nos enfrentamos con el versor \hat{r} que nace en el origen de coordenadas y apunta hacia el punto genérico donde se encuentra la carga de prueba. ¿Qué sucede si tenemos la situación de la figura 10?

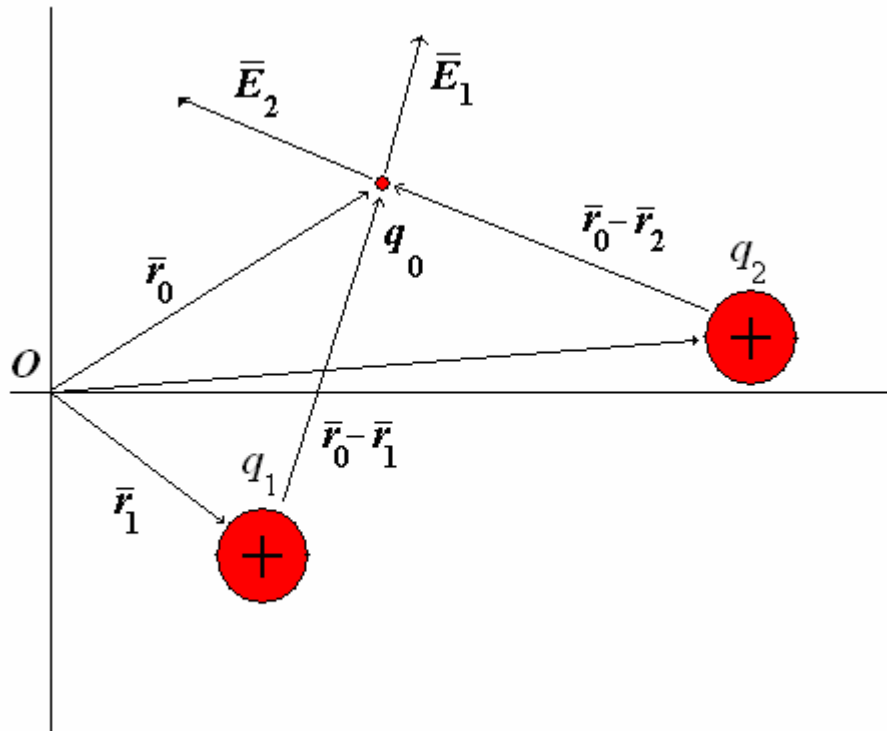


Figura 10. Campo debido a dos cargas puntuales.

Si solo existiera q_1 la pondríamos en el origen de coordenadas y no tendríamos problema alguno. Lo mismo pasaría si solamente existiera q_2 . Lamentablemente no es así; podemos mover el origen de coordenadas para que coincida con una de las cargas (si nos parece conveniente) pero entonces la otra no está en el origen. Lo que **jamás** debemos hacer (error muy común) es ir paseando el origen de coordenadas para que siempre la carga que estamos analizando quede en el lugar fácil y entonces escribimos un campo en la dirección del versor radial correspondiente. Esto está **MAL** porque **NO** se puede correr el punto **O** una vez que lo elegimos.

En forma vectorial la respuesta correcta es:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) + \frac{q_2}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_2) \right]$$

Es muy importante notar que cada término apunta en una dirección distinta. Si hubiéramos persistido en escribir todas componentes en \hat{r} (moviendo el origen de coordenadas) el resultado habría sido erróneo.

El mismo problema aparece con los versores $\hat{\varphi}$ o $\hat{\theta}$, conforme nos movemos cambian de dirección. En tal sentido es muchísimo más seguro operar en coordenadas cartesianas donde los versores \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} mantienen siempre su dirección aunque nos movamos.

Después de este interludio matemático podemos volver a la física. Con la ecuación 2 (si las cargas son puntuales) o las ecuaciones 7 a 9 para el caso de distribuciones continuas, podemos

calcular la fuerza actuante sobre la de prueba q_0 . Entonces, para obtener el campo eléctrico solo resta dividir por q_0 .

Resta hacer un comentario respecto de la magnitud de la carga de prueba q_0 . Ya mencionamos que por convención la consideramos como positiva; queda pendiente comentar que dicha carga debe ser lo suficientemente pequeña como para no alterar la distribución espacial de las otras involucradas en el problema. A primera vista esta última afirmación puede sonar extraña porque hemos declarado que conocemos la distribución de las cargas que generan el campo (sea 1-D, 2-D o 3-D). ¿Cómo puede ser que el valor de q_0 sea relevante? La respuesta detallada queda para más adelante, pero podemos adelantar que en el caso de que el objeto cargado sea metálico, la forma en que las cargas se distribuyen depende de la presencia de otras vecinas. En esta situación resulta conveniente que la carga de prueba sea lo más pequeña posible para que las alteraciones que produzca sean despreciables. Entonces mejoramos nuestra definición de campo eléctrico como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{q_0}(\vec{r})}{q_0}$$

Con los métodos expuestos anteriormente podemos calcular, en cualquier punto del espacio, el campo eléctrico generado por un cuerpo cargado. Por tratarse de una magnitud vectorial obtenemos tres funciones. La comprensión de los resultados se torna muy dificultosa, por lo que conviene recurrir a una presentación gráfica de los resultados. La primera opción es dibujar vectores en lugares selectos. Vamos a aplicar este método para un sistema formado por dos cargas positivas iguales A y B . En la figura 11 representamos los campos generados por cada carga individual (en azul y verde) y en la 12 el campo total (en rojo).

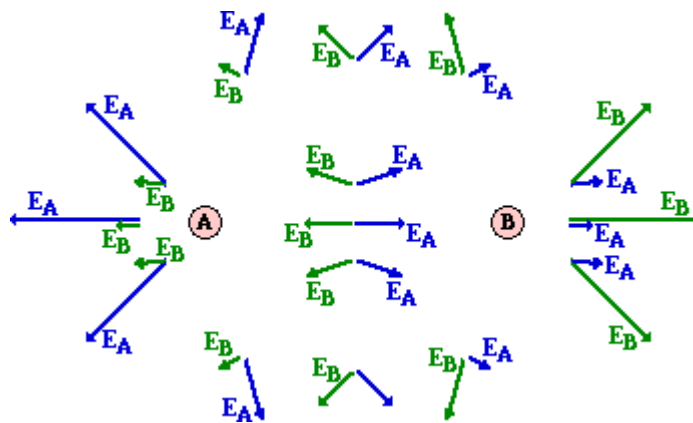


Figura 11. Campos generados por dos cargas positivas iguales

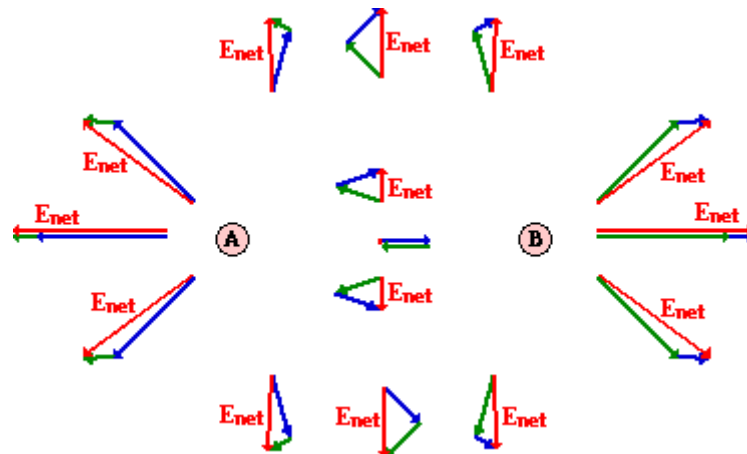


Figura 12. Campo total generado por dos cargas positivas iguales

Hoy día, con computadoras es una tarea relativamente simple, pero si se desea tener un dibujo detallado es necesario presentar muchos vectores y rápidamente la representación gráfica se vuelve confusa. Para mejorar la presentación se convino en que era mejor presentar las así llamadas *líneas de campo*. Estas líneas son curvas tales que en cada punto del espacio el campo eléctrico resulta *tangente* a dicha curva. Si esta afirmación es confusa vamos a verla en acción con un dibujo simple para la misma situación de las figuras 11 y 12.

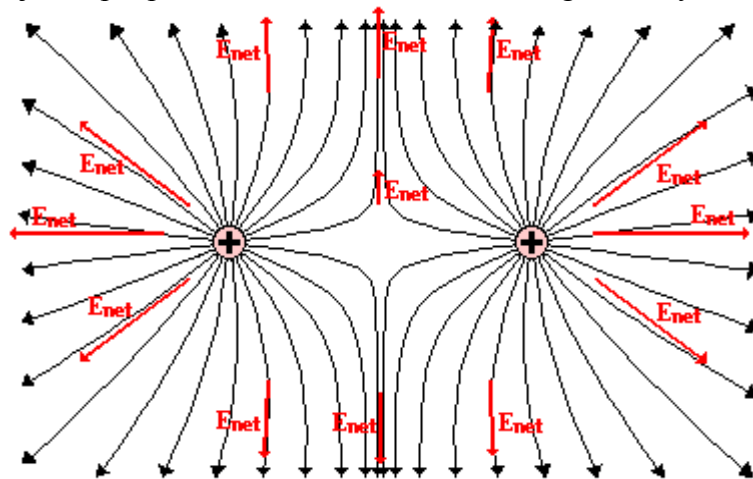


Figura 13. Líneas de campo para dos cargas positivas iguales.

Si bien la figura 13 sigue mostrando los vectores, es habitual no presentarlos y quedarnos solo con las líneas de campo. Sabemos que en cada punto el campo debe ser tangente a la curva. Dado que hemos perdido la información sobre el módulo del campo al no dibujar el vector debemos dar una convención para reemplazar la información faltante. La regla es que la densidad de líneas dibujadas sea proporcional a la intensidad del campo. La densidad de líneas se mide en la dirección normal al campo y el número total de líneas que “salen” o “entran” de una carga es proporcional a esta. Si el campo es “débil” dibujamos una baja densidad de líneas. Por el contrario, si el campo es “fuerte” dibujamos “muchas” líneas. Otra regla es que trazamos las líneas “naciendo” en las cargas positivas y “muriendo” en las negativas. Por tal motivo decimos que las cargas positivas son “fuentes” del campo y las negativas son “sumideros”. Las palabras “fuentes” y “sumideros” tienen una fuerte raíz del campo de los fluidos. Podemos pensar (muy ligeramente) que las cargas positivas son como una “ducha” en la que nacen las líneas de campo para terminar en un “drenaje” que son las

cargas negativas. En una bañera real el agua emana de la regadera (fuente), se va por la rejilla (sumidero) y las líneas de flujo del agua se ven simplemente. En el caso eléctrico la situación es más difícil (no podemos ver el campo) pero la analogía es bastante buena.

Como ayuda a la hora de dibujar las líneas de campo destacamos que no se deben cruzar jamás, puesto que si esto sucediera en un punto P , esto significaría que la fuerza actuante sobre la carga de prueba no estaría unívocamente definida.

Para ayudar un poquito vamos a presentar otros ejemplos (siempre con dos cargas) pero con distintos signos y valores.

Como tarea proponemos determinar cuál carga tiene mayor valor (prescindiendo del signo).

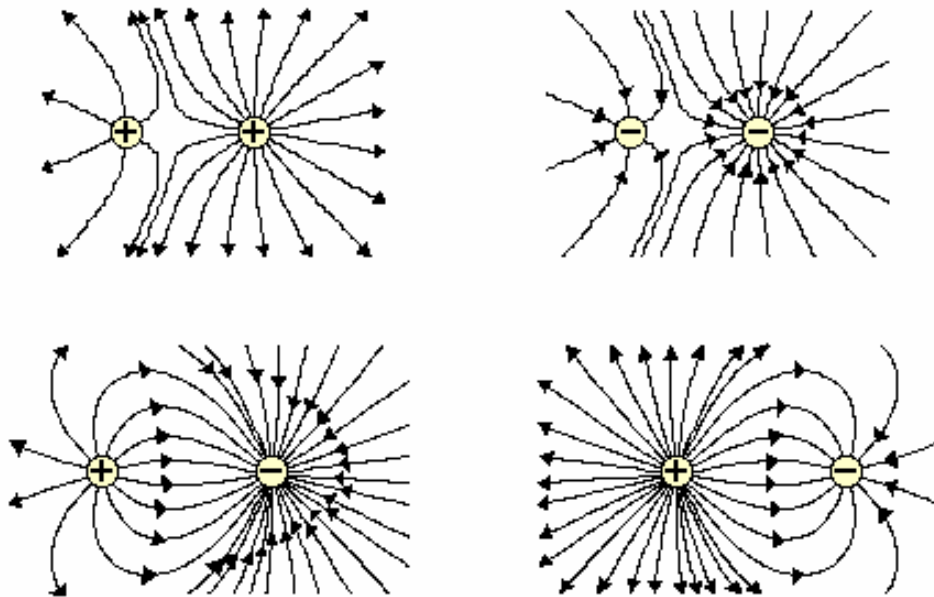


Figura 14. Líneas de campo para dos cargas de diferente valor

Otro ejercicio: Determinar los signos de las cargas y las magnitudes relativas (contar el número de líneas) en la figura 15.

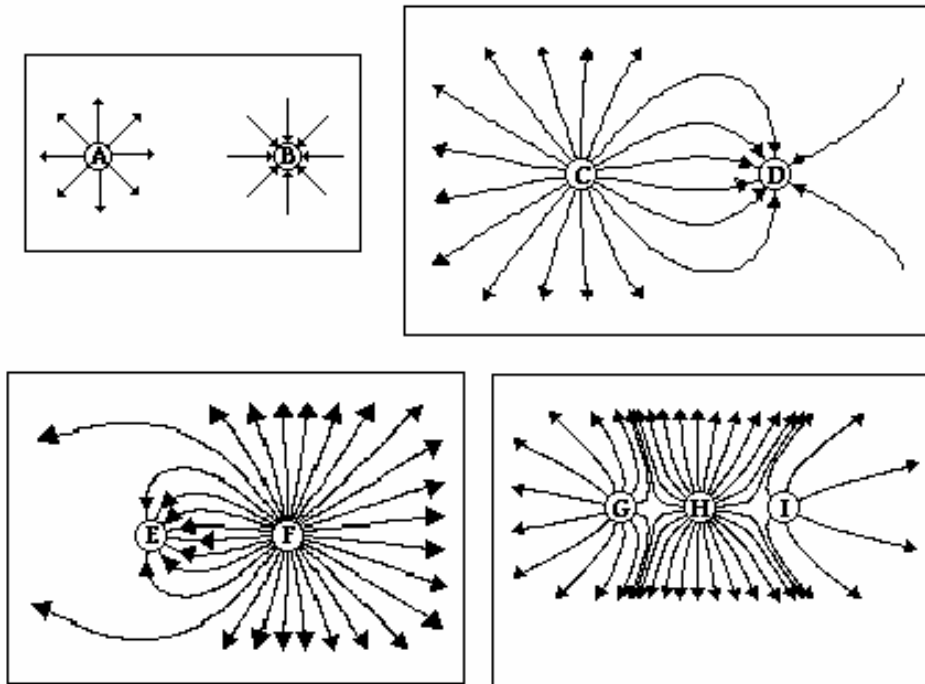


Figura 15. Cuatro configuraciones de campo

¿Para qué nos interesa el campo eléctrico? Algunas personas encuentran razón suficiente en contemplar la belleza de las ecuaciones y dedican mucho tiempo al estudio de las propiedades matemáticas. Otras prefieren verlo en acción, “haciendo” cosas. Siendo la Ingeniería una disciplina dedicada, entre otras cosas, al diseño de “aparatos” vamos a ver algunos ejemplos concretos que nos sirvan de referencia.

Vamos a efectuar descripciones muy generales, porque los detalles tecnológicos son complejos y difíciles de seguir a esta altura.

Ya vimos cómo operaban las fuerzas eléctricas en una fotocopiadora. Otro caso de interés es la pintura electrostática. El principio es igualmente simple; la pintura, en forma de un polvo muy fino, es cargada positivamente, mientras que el objeto a ser pintado (un auto por ejemplo) está cargado negativamente. La fuerza eléctrica atrae a las partículas de pintura hacia el objeto donde quedan adheridas. Un proceso posterior las fija. Esta pintura, a diferencia de las comunes, no utiliza un solvente volátil que deba evaporarse. De esta forma se evita la contaminación ambiental con vapores potencialmente tóxicos. Mucho más glamorosos son los dispositivos MEMs (Micro Electro-Mechanical), estos son sistemas de escala microscópica que son desplazados con fuerzas eléctricas. Para una pequeña muestra ver la siguiente página: <http://electronics.howstuffworks.com/dlp1.htm>.

El flujo del campo eléctrico. La ley de Gauss

Muchas propiedades de un campo vectorial quedan determinadas por el flujo y la circulación del mismo, los que a su vez están íntimamente ligados a los teoremas de Gauss y Stokes con sus respectivos operadores divergencia y rotor.

Reconozco que haber mencionado estas palabras tabú debe haber evocado las peores pesadillas, disparado temblores incontrolables y suscitado la huida desesperada de más de un lector. Pero pasado el susto inicial debemos respirar hondo, calmarnos y acostumbrarnos a utilizar esos conceptos porque son herramientas muy útiles.

En el capítulo anterior hablamos de las “fuentes” (las cargas positivas) y “sumideros” (las cargas negativas) del campo eléctrico. Estos términos tienen un fuerte origen “hidráulico” sugiriendo que un fluido emana de las fuentes para ser consumido en los sumideros. Con la palabra flujo pasa exactamente lo mismo. Originariamente fue concebida para calcular, por ejemplo, la cantidad de agua que fluye por un río. En este caso el campo en cuestión es el de velocidades y la interpretación es simple y directa.

Con el campo eléctrico la situación es más difícil porque no lo podemos ver y además es un concepto mucho más abstracto porque involucra la fuerza que actuaría sobre una hipotética carga de prueba puesta en un lugar.

Igualmente conviene refrescar la memoria y recordar que el flujo Φ de un campo vectorial \vec{F} a través de una superficie S está dado por:

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (19)$$

El integrando es el *producto escalar* de dos magnitudes vectoriales (no olvidarlo) y la superficie S puede ser abierta o cerrada. En este último caso se conviene en considerar la dirección de $d\vec{S}$ apuntando hacia fuera de la región cerrada y el flujo queda dado por el conocido teorema de Gauss-Ostrogradsky:

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div}(\vec{F}) dV \quad (20)$$

Donde V es el volumen limitado por S y div es el operador divergencia.

Suficiente repaso; hagamos un ejercicio matemático: Computar el flujo del campo eléctrico generado por una carga puntual Q (positiva) a través de una superficie esférica de radio r , tal que el centro de dicha esfera coincida con la carga Q .

Hacemos una vista 2-D del problema en la figura 16.

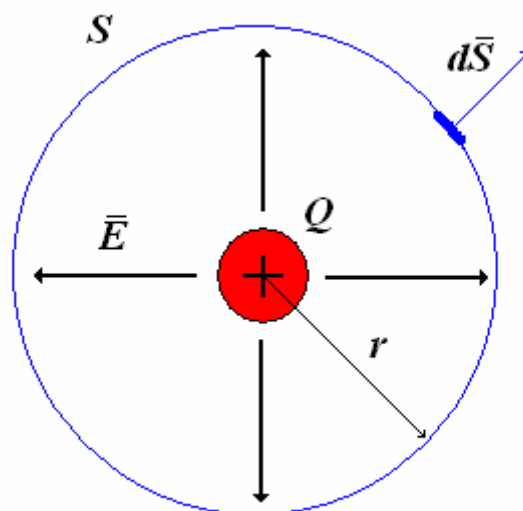


Figura 16. Una carga puntual Q rodeada por una superficie esférica S concéntrica.

Intencionalmente hemos elegido un problema simple. En efecto, por lo visto en el capítulo anterior, el campo eléctrico generado por una carga puntual es solo función de la distancia a la misma y vale (considerando que la carga está en el origen de coordenadas):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Dado que la superficie sobre la que integramos es una esfera de radio r , es conveniente expresar el elemento de área como: $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{e}_r$. Notar que el elemento de área también apunta en la dirección radial (hacia fuera de la esfera).

El flujo es entonces:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (21)$$

Curiosidad: el resultado es independiente del radio r de la esfera. No debemos detenernos aquí porque se trataría simplemente de un ejercicio matemático más de una larga lista. Conviene ver si logramos extraer algún significado. Volvamos a la analogía hidráulica: Pensemos en una ducha; las líneas de flujo de agua “nacen” en la ducha y caen. Rodeemos la ducha con una superficie real o imaginaria y computemos el flujo del agua a través de dicha superficie. Lo que obtenemos son la cantidad de litros por segundo que atraviesan la superficie. ¿Cuál es la fuente de dicho caudal? Para nuestro problema es la ducha (ya sabemos que el agua vino por dentro del caño desde la planta potabilizadora, pero no es relevante para nuestra discusión). Volviendo al campo eléctrico decimos entonces que la carga Q es fuente del campo eléctrico E y que el flujo del mismo a través de una superficie esférica concéntrica es proporcional a la carga (el factor ϵ_0 no importa porque solo refleja el sistema de unidades).

Surge ahora una pregunta obvia: ¿Qué habría pasado si hubiéramos rodeado la carga con una superficie cerrada arbitraria? ¿Tendremos que repetir el cálculo indefinidamente? La respuesta requiere del teorema de Gauss y para desarrollarla la bosquejamos en la figura 17.

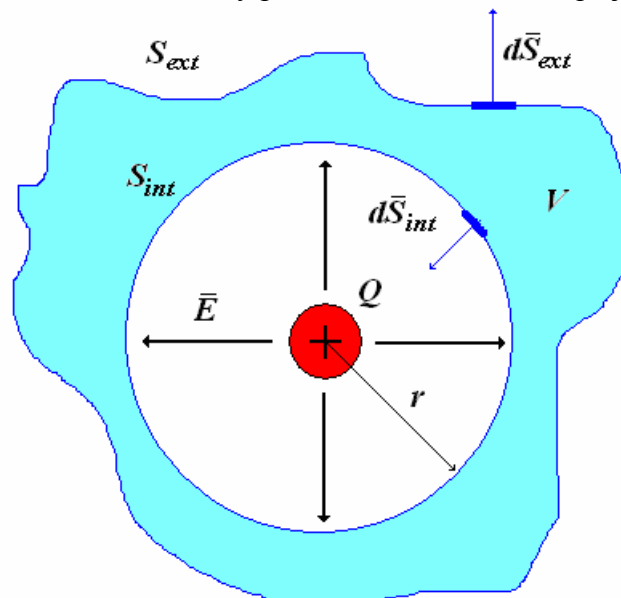


Figura 17. Una carga puntual Q rodeada por una superficie esférica S_{int} y una arbitraria S_{ext}

La solución estriba en considerar un volumen V limitado interiormente por nuestra esfera del problema anterior (S_{int}) y exteriormente por una superficie arbitraria S_{ext} . Aplicamos el teorema de Gauss a este volumen, para ello debemos computar la divergencia del campo eléctrico generado por la carga Q . En coordenadas esféricas tenemos:

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) E_\theta) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad r \neq 0 \quad (22)$$

La divergencia del campo eléctrico es nula excepto en $r=0$ (lugar donde está la carga). El primer sumando es nulo porque el factor r^2 se cancela con el término $1/r^2$ presente en la componente E_r del campo. Las otras componentes del campo, E_θ y E_ϕ son nulas.

Dado que el volumen V estudiado no contiene al punto $r=0$, podemos asegurar que el flujo total que atraviesa la superficie es nulo, es decir:

$$\Phi=0=\Phi_{S_{ext}}+\Phi_{S_{int}} \quad (23)$$

Por lo que $\Phi_{S_{ext}} = -\Phi_{S_{int}}$

Los flujos son iguales a menos de los signos, pero esto es fácil de comprender (y cambiar) porque notamos que en nuestro ejemplo original la normal a la superficie esférica S_{int} tenía la dirección opuesta a la utilizada en este último cálculo (comparar las figuras 15 y 16). Si invertimos los signos para llevar todo a la misma convención llegamos a la conclusión que el flujo computado a través de la superficie esférica es igual al que obtendríamos sobre cualquier otra superficie cerrada que encerrara a la carga Q .

El resultado de la ecuación (21) es entonces válido para cualquier superficie. Además, en virtud del principio de superposición, podemos extender este resultado a un conjunto de varias cargas encerradas dentro de una superficie, obteniendo:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (24)$$

Donde Q_{enc} denota la totalidad de la carga encerrada dentro de la superficie S .

La ecuación (24) se denomina, con poca originalidad, ley de Gauss de la electrostática. Si bien la derivación fue hecha a partir de considerar una o más cargas puntuales, es fácil ver que la misma también aplica a una distribución continua puesto que cualquier objeto cargado puede ser descompuesto en elementos de carga dq para los cuales aplicamos la misma deducción.

Un último comentario matemático: el caso más general de un objeto cargado corresponde a una distribución volumétrica (3D). En esta condición la (24) se transforma en:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0} \quad (25)$$

Si recurrimos una vez más al teorema del flujo (20) encontramos que:

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (26)$$

Esta última relación contiene *exactamente* la misma cuota de información que la (24), solo que está escrita en términos de derivadas parciales (por el operador divergencia) en lugar de una integral. Como dicen los libros de cocina *reservamos* la (26) para dentro de unas clases. Volvamos a la ley de Gauss porque varias veces la utilizaremos para estudiar distintos aspectos del campo eléctrico. Ahora, para aliviar las tensiones de tanta matemática vamos a mostrar cómo con un poco de buen razonamiento previo (más algo de suerte) y la ayuda de la ley de Gauss podemos determinar el valor del campo eléctrico sin necesidad de recorrer el difícil camino de las ecuaciones (7)-(9).

El núcleo de la idea se encuentra en que algunas distribuciones de carga son lo suficientemente sencillas como para que podamos inferir la dirección de las líneas de campo por simples razonamientos. Si esta oración sonó complicada vamos a un primer ejemplo basado en la distribución de carga esférica de radio a y densidad uniforme ρ_0 (positiva) de la figura 8, la que miraremos de costado.

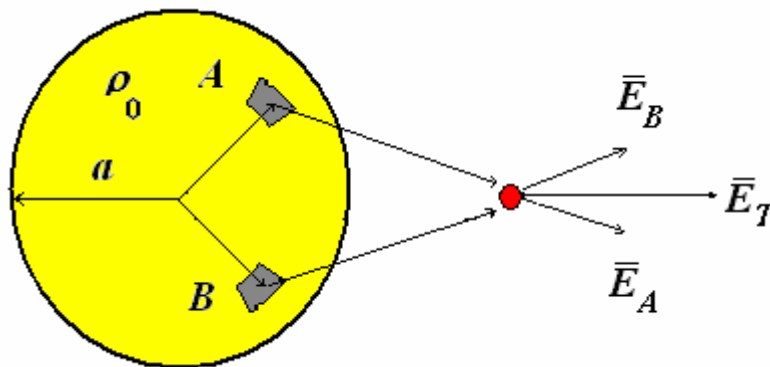


Figura 18. Una distribución volumétrica uniforme de carga

La clave del análisis reside en ubicarnos en el punto rojo, sobre el que deseamos computar el campo eléctrico, y notar que el objeto cargado puede ser dividido en contribuciones elementales de las que mostramos solo dos, denominadas A y B . Estos elementos están simétricamente posicionados respecto del punto de observación. Las contribuciones de campo que generan, \vec{E}_A y \vec{E}_B , dan por resultante \vec{E}_T que se encuentra dirigida en la dirección radial. Como el proceso se puede repetir, encontrando otros elementos distribuidos simétricamente sobre toda la esfera, concluimos que el campo en el punto de observación apunta en la dirección radial. Nótese que el resultado habría sido el mismo para cualquier otro punto de observación que estuviera a la misma distancia r puesto que la distribución de carga es simétrica. Este resultado ya lo habíamos encontrado antes, pero ahora lo conseguimos “desarmando” el objeto cargado y analizando las contribuciones elementales.

¿Cuál es el beneficio de todo este empeño? Veremos que la ley de Gauss, junto con haber “adivinado” la dirección de las líneas de campo, nos permitirá computar el campo eléctrico sin necesidad de recurrir al largo proceso de integración de las ecuaciones (7)-(9).

En párrafos anteriores demostramos que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada independientemente de la forma de la superficie en cuestión. Tenemos libertad de elegir la superficie más conveniente y nos decidimos por una esférica que pase por el punto de observación (figura 19)

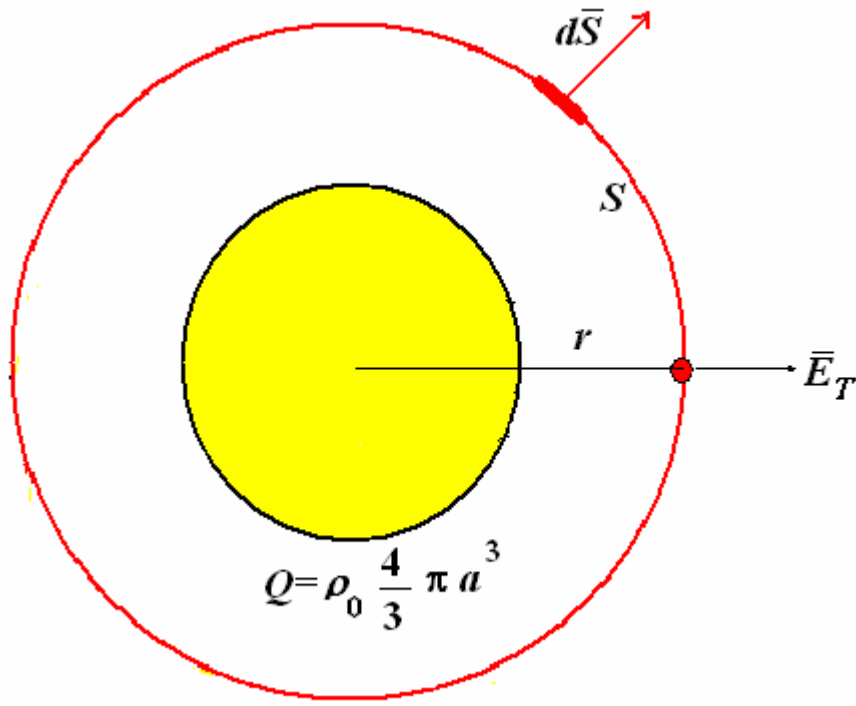


Figura 19. Flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica

Apliquemos ahora la ley de Gauss recordando que el campo apunta en la dirección radial (\hat{r}) al igual que el elemento de área.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S (E(r) \hat{r}) \cdot (dS \hat{r}) = \oint_S E dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (27)$$

Ahora necesitamos de una idea importante: Al recorrer el dominio de integración, la distancia r permanece constante y con ello el módulo del campo eléctrico, por lo que podemos escribir:

$$\Phi = \oint_S E dS = E \oint_S dS = ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (28)$$

La superficie S de la esfera vale: $S=4 \pi r^2$, por lo que el módulo del campo eléctrico queda:

$$E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{1}{4 \pi r^2} \quad (29)$$

Esta ecuación es idéntica a la (18) y parece que hemos perdido el tiempo en juegos matemáticos que hacen recordar a un perro mordiéndose la cola. Sin embargo, el trabajo no ha sido en vano; apliquemos la misma técnica al caso de tener que computar el campo en un lugar dentro de la esfera ($r < a$) (figura 20, perdón por el dibujo torcido)

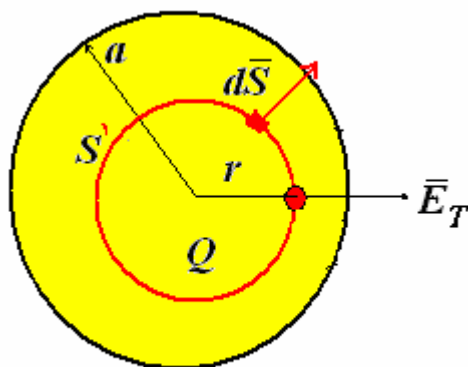


Figura 20. Cálculo del campo eléctrico dentro de una distribución esférica de carga

Como ya hemos determinado la dirección de las líneas de campo usamos la misma forma de la superficie de integración. Entonces, todo lo referente al miembro de la izquierda en la (28) es idéntico. Lo que cambia es el miembro de la derecha porque ahora la superficie S **NO** encierra a la totalidad de la carga de la esfera. La expresión correcta para el flujo es:

$$\Phi = \oint_S E \, dS = E \oint_S dS = ES = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (30)$$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \quad ; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \hat{r} \quad (31)$$

Es impactante la simplicidad con la que hemos obtenido la (31). Por el camino de integración de la (9) habríamos consumido muchas líneas de desarrollo y ahora, gracias a haber adivinado la dirección de las líneas de campo, y con la ayuda de la ley de Gauss, resolvimos el problema con menor esfuerzo. Representamos en la figura 21 el módulo del campo eléctrico para regiones internas y externas a la esfera. Notar que en $r=a$ coinciden las expresiones (28) y (31).

Como comentario accesorio vale la pena mencionar que la superficie a través de la que computamos el flujo suele ser llamada superficie gaussiana (nombre muy poco original por cierto)

Ahora es importante volver sobre nuestros pasos y repasar nuestra estrategia puesto que la repetiremos en otras ocasiones pero debemos estar atentos para no utilizarla mal. En los análisis presentados aparece como crucial la idea de simetría. Esto es correcto pero amerita profundizarlo. El objeto cargado no solo debe ser geoméricamente simétrico, sino que debemos ser capaces de encontrar la dirección del campo resultante en cualquier punto y una superficie de integración sobre la que el módulo del campo permanezca constante, de forma tal que podamos extraerlo como un factor constante en el miembro de la izquierda en la ley de Gauss. Como ejemplos “malos” podemos considerar un cubo o un anillo uniformemente cargados; a pesar de la simetría geométrica es imposible determinar por razonamientos simples la dirección de las líneas de campo y menos aún concebir una superficie sobre la cual el módulo del campo sea constante (en el caso de cubo piensen en la diferencia de estar parado cerca del punto medio de una de las caras y luego sobre una arista).

¿Es la esfera uniformemente cargada el único ejemplo útil? La respuesta es no. Proponemos como ejemplo demostrar que una esfera cargada con una densidad de carga que dependa únicamente de la coordenada radial, $\rho = \rho(r)$, es un caso “bueno”.

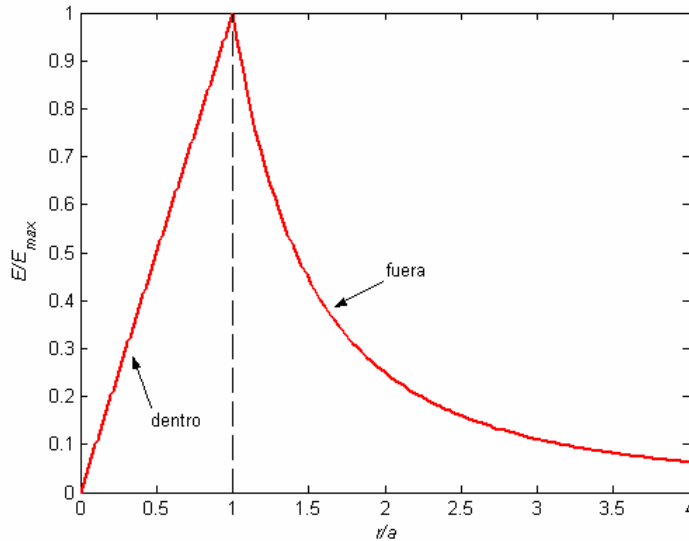


Figura 21. Módulo del campo eléctrico normalizado para una distribución esférica de cargas con densidad volumétrica constante.

Pero quedan más ejemplos sencillos aún. Tomemos como objeto una distribución uniforme y positiva de carga con forma de alambre y de largo infinito (figura 22). Este es un problema tedioso de resolver por integración de la (7). Veremos que podemos “adivinar” la dirección de las líneas de campo y beneficiarnos con el uso de la ley de Gauss. Hacemos una vista de costado de este “hilo” cargado.

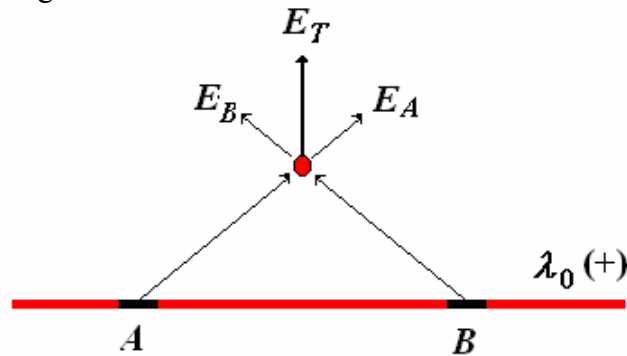


Figura 22. Vista lateral de una distribución lineal uniforme..

Centramos nuestra atención en los elementos A y B , ubicados simétricamente respecto del punto de observación (de color rojo). Notamos que las contribuciones de estos elementos, al ser sumadas vectorialmente, entregan un campo resultante cuya dirección es perpendicular al alambre. Este razonamiento puede ser repetido con otros pares (a izquierda y derecha del punto de observación), obteniéndose el mismo resultado: la dirección del campo neto es perpendicular al alambre. Como el alambre es de longitud infinita, este resultado es válido para *cualquier* punto de observación, por lo que concluimos que el campo, en todo punto del espacio, tiene dirección radial con el alambre como eje. En síntesis: $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Es importante notar que el significado de la palabra radial es diferente en este caso (de obvia simetría cilíndrica) comparado con el ejemplo anterior (de simetría esférica).

En la figura 23 mostramos una perspectiva del alambre junto con algunas líneas de campo.

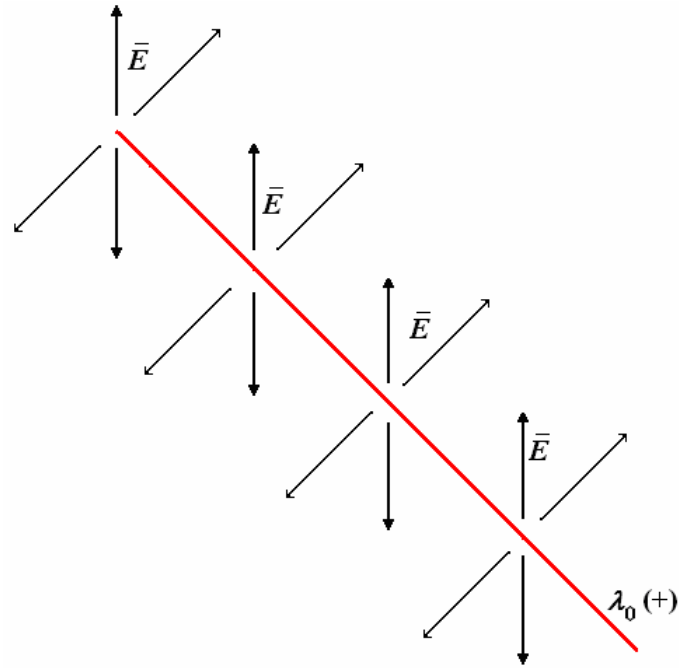


Figura 23. Esquema en perspectiva de una distribución lineal de carga de largo infinito, uniformemente cargada y algunas líneas de campo

La historia se repite; ahora que conocemos la dirección de las líneas de campo debemos encontrar una superficie tal que al recorrerla el módulo del campo permanezca constante. La respuesta aparece pronto; en la medida en que nos mantengamos a una distancia constante del alambre el valor de campo que esperamos es constante. Tomamos entonces como superficie de integración un cilindro de radio r y largo L , concéntrico con el alambre (figura 24). Por claridad hemos omitido la tapa frontal del cilindro para poder observar el alambre y las líneas de campo, pero es importante destacar que *ambas* tapas deben entrar en el análisis porque necesitamos una superficie *cerrada*.

Para computar el flujo analizamos por separado las tapas y después la superficie lateral. La respuesta para el primer caso es simple puesto que las líneas de campo son perpendiculares a las normales a las tapas, por lo que el flujo a través de ellas es cero (¿se ve claro?). Pasamos ahora al flujo a través de la superficie lateral del cilindro (recordando que el módulo del campo es constante cuando la recorremos):

$$\Phi_{lat} = \int_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{lat} E \hat{r} \cdot dS \hat{r} = \int_{lat} E dS = E \int_{lat} dS = ES = E 2\pi r L = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda_0 L}{\epsilon_0} \quad (32)$$

$$E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$$

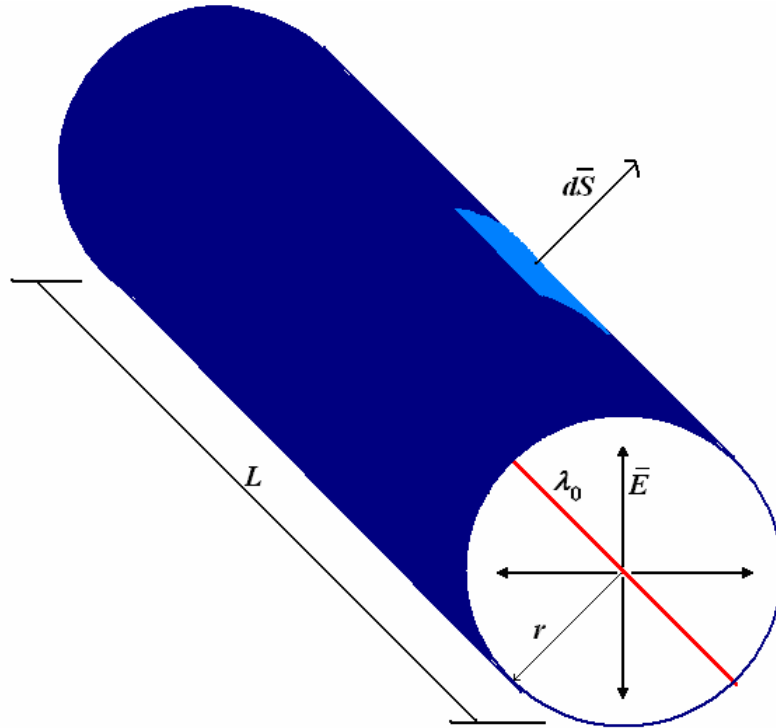


Figura 24. El “hilo” de la figura anterior rodeado de una superficie cilíndrica

Por lo expuesto en el párrafo anterior, la ecuación (32) refleja el flujo total del campo eléctrico a través de la superficie cilíndrica. En el miembro de la derecha hemos reemplazado la carga encerrada por el valor $\lambda_0 L$ por tratarse de un alambre uniformemente cargado.

Resulta obvio comentar que la resolución que brinda la (32) es mucho más simple que por medio de la integración de la (7). Podemos apuntar más alto y pasar de la distribución anterior, que es un objeto 1-D, a uno 3-D semejante: una distribución cilíndrica de radio a y uniformemente cargada en volumen con densidad ρ_0 (positiva) (ver figura 25). Como ejercicio previo propongo (más que proponer, ordeno) efectuar un análisis semejante al de la figura 23. Nuevamente encontraremos que las líneas de campo tienen dirección radial y, por el mismo argumento del caso anterior, conviene tomar por superficie de integración al mismo cilindro.

Con estas consideraciones notamos que hay dos regiones de interés, la que corresponde al exterior del cilindro ($r > a$) y la interior ($r < a$). La primera es la más simple de estudiar porque es virtualmente idéntica al ejemplo precedente dado que la superficie de integración encierra a la totalidad de la carga contenida en el alambre. El flujo, computado en forma análoga a la (32) resulta:

$$\Phi_{lat} = \int_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{lat} E \hat{r} \cdot dS \hat{r} = \int_{lat} E dS = E \int_{lat} dS = ES = E 2\pi r L = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \pi a^2 L}{\epsilon_0} \quad (33)$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$$

Distinta es la situación para el segundo caso ($r < a$) porque la superficie cilíndrica a través de la que computamos el flujo no encierra la totalidad de la carga (figura 25). En este caso el flujo y el campo son:

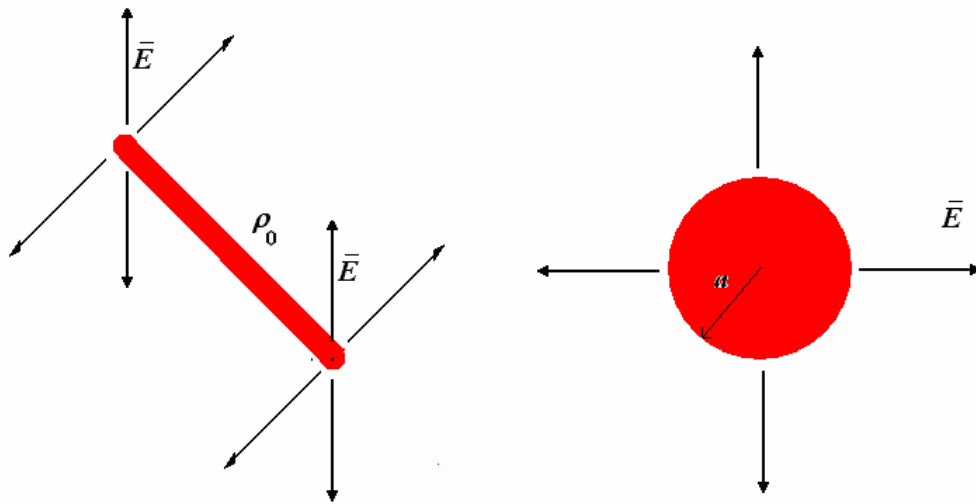


Figura 25. Un cilindro uniformemente cargado y de largo infinito. Izquierda: Vista en perspectiva; derecha vista frontal

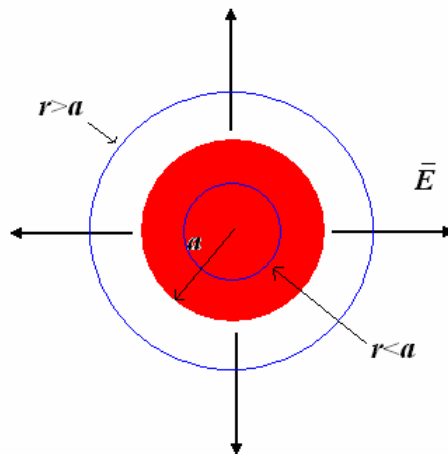


Figura 26. Vista frontal del cilindro de la figura 25. Se muestra la traza de la superficie gaussiana para puntos fuera ($r > a$) y dentro ($r < a$) del cilindro.

$$\Phi_{lat} = \int_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{lat} E \hat{r} \cdot dS \hat{r} = \int_{lat} E dS = E \int_{lat} dS = ES = E 2\pi r L = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \pi r^2 L}{\epsilon_0} \quad (34)$$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r \hat{r}$$

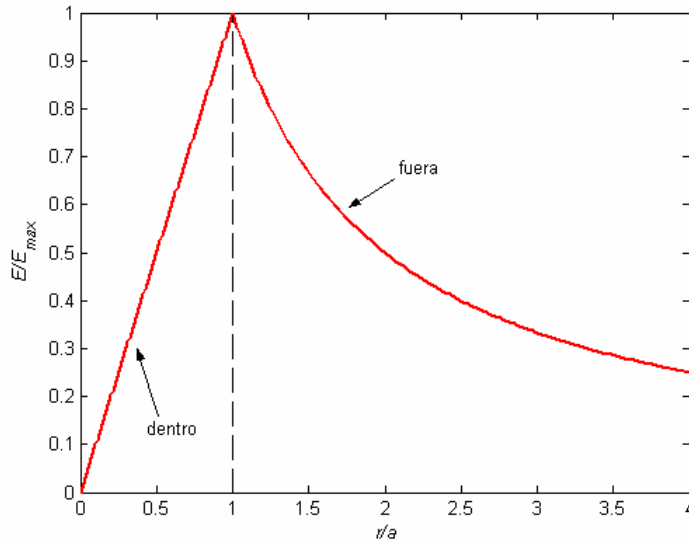


Figura 27. Módulo del campo eléctrico para el cilindro cargado de la figura 25.

En la figura 27 mostramos los resultados de las ecuaciones (33) y (34). Es importante marcar que en la frontera del cilindro ($r=a$) ambos valores coinciden.

Como tarea para el hogar queda por demostrar que si la distribución de cargas es de la forma $\rho=\rho(r)$, también podemos “adivinar” la dirección de las líneas de campo.

Como cierre de este ejemplo queda por comentar la “utilidad” de considerar un alambre de largo infinito. Obviamente ningún sistema real puede poseer tal característica pero lo desarrollado puede ser considerado como una buena aproximación cuando nos encontramos “lejos” de los bordes del alambre real. Tarea para el hogar: ¿Qué significa “lejos” de los bordes?

Si miramos un poco en perspectiva notaremos que fuimos capaces de encontrar ejemplos simples en los casos de simetría esférica y cilíndrica. También lo hay en el caso cartesiano y el sistema que estudiaremos es una distribución plana infinita e uniformemente cargada con densidad superficial σ_0 (positiva)(ver figura 28).

Nuevamente mostramos los aportes de distintos aportes elementales, A , B , C y D . Estos elementos están simétricamente distribuidos respecto de la normal al plano que pasa por el punto de observación (punto rojo). El campo resultante apunta en la dirección normal al plano porque las componentes paralelas al mismo se cancelan de a pares. Como todo el plano puede ser descompuesto en elementos semejantes, llegamos a la conclusión que el campo en cualquier lugar de observación es perpendicular al plano. Habiendo encontrado la dirección de las líneas, debemos buscar la superficie gaussiana correspondiente. Hay algunas opciones, pero las más usual es nuevamente un cilindro como presentamos en la figura 29 (lado izquierdo).

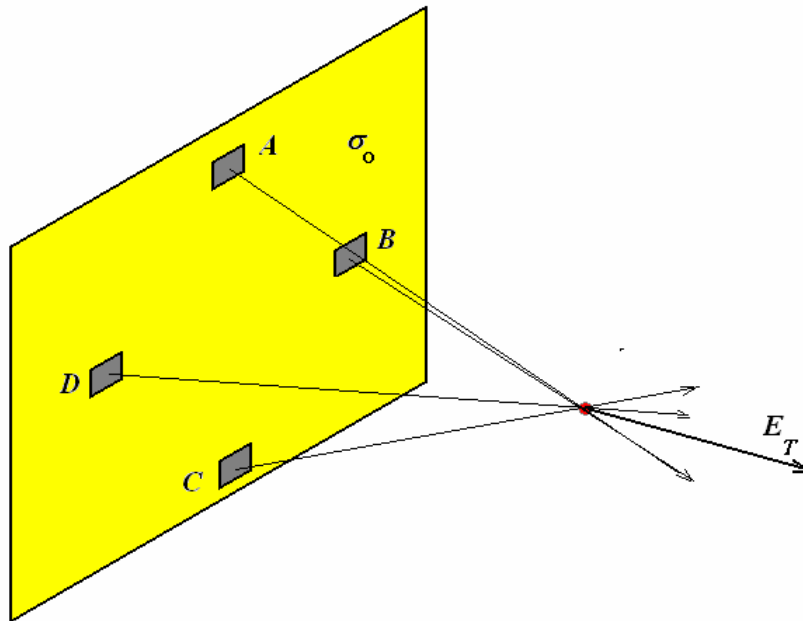


Figura 28. Un plano infinito uniformemente cargado

El análisis es más simple considerando una vista lateral, sin las complejidades de una perspectiva (figura 29 derecha)

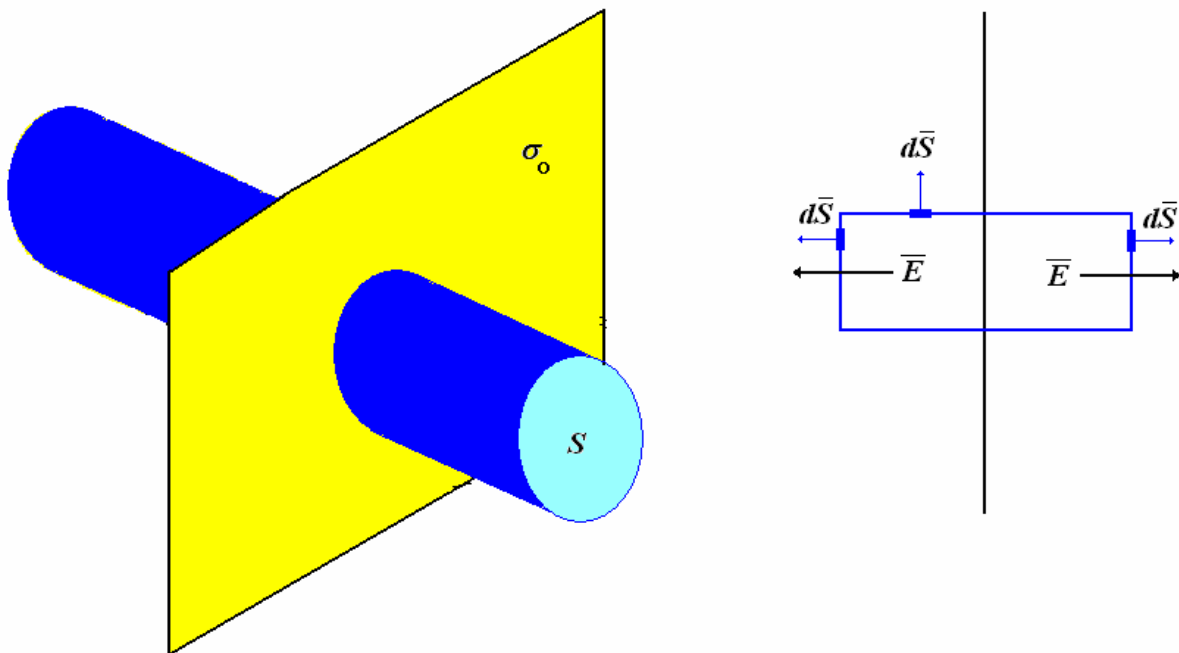


Figura 29. Plano cargado y superficie gaussiana cilíndrica. Izquierda: vista en perspectiva, derecha: vista lateral.

Para computar el flujo conviene separar el análisis en dos partes: la superficie lateral y las dos tapas. De la figura se observa que el flujo por la cara lateral es nulo puesto que la normal a dicha superficie es perpendicular al campo. Queda entonces calcular el flujo por las tapas. Nótese que en ambas tapas la dirección de la normal a la superficie es igual a la del campo, por lo que el ángulo formado es una vez más de cero grados. Como ambas tapas son idénticas

el flujo total es simplemente el doble del correspondiente al de una de ellas. Si la superficie de cada tapa es S obtenemos:

$$\Phi = 2 \int_{tapa} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \int_{tapa} E dS = 2E \int_{tapa} dS = 2E S = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 S}{\epsilon_0} \quad (35)$$

$$E = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}; \quad \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

En la (35) la carga encerrada está dada por el producto $\sigma_0 S$ por tratarse de una distribución uniforme.

A primera vista el resultado parece extraño. La (35) predice un campo de módulo constante, independientemente del lugar de observación. Esto parece estar en contradicción con nuestra expectativa de obtener una intensidad de campo que vaya menguando conforme nos alejamos del objeto.

La sospecha es parcialmente correcta. El problema estriba en que hemos considerado un plano *infinito* y esto fue crucial en el proceso durante el que “adivinamos” la dirección de las líneas de campo. En el mundo real podremos tener una hoja cargada y al tener una extensión finita nuestro argumento principal falla, principalmente cuando el punto de observación está próximo a los bordes de la hoja. Sin embargo el resultado de la (35) da una buena aproximación cuando el campo es evaluado “lejos” de los bordes del sistema real. Misma pregunta (y tarea): ¿Qué significa “lejos”?

Como comentarios integradores de todos los ejemplos anteriores es importante primero remarcar que al aplicar la ley de Gauss las cargas en cuestión son las que se encuentran *dentro* de la superficie gaussiana. Esto significa que las que quedan fuera no colaboran en el resultado final (reparar los ejemplos con la bola y el cilindro cargados en volumen). Segundo, y **FUNDAMENTAL**, es recordar que la ley de Gauss es válida **SIEMPRE**, más allá de que el caso sea “fácil” o “difícil”. De tanto aplicar esta ley a los casos simples, muchas personas terminan creyendo que la validez de la misma está restringida a estos ejemplos. Este es un **ERROR GRAVISIMO** que ha costado muchos exámenes.

¿Hay más ejemplos “fáciles”? La respuesta es negativa; no hay otras distribuciones de carga para las que podamos encontrar, por razonamientos simples, la dirección de las líneas de campo y una superficie sobre la cual el módulo del mismo permanezca constante. Esto es imprescindible porque toda la estrategia reside en extraer el módulo del campo eléctrico fuera de la integral del flujo para así reducir el problema a una simple multiplicación.

Pero la falta de otros casos simples no es demasiado grave puesto que muchos casos pueden ser resueltos considerando la superposición de partes basadas en los ejemplos anteriores.

Tomemos una superficie infinita, uniformemente cargada con densidad superficial σ_0 , coincidente con el plano xz . Un alambre cargado con densidad lineal λ_0 , paralelo al eje z , corta al plano xy en $(0,d)$. Se desea conocer el campo eléctrico en la posición (d,d,d) .

Desarmamos el problema en los dos constituyentes obvios: el plano y el alambre. Por lo expuesto en párrafos anteriores, el campo generado por el plano es de módulo constante en cualquier posición y apunta en la dirección normal al plano. En nuestro caso obtenemos:

$\vec{E}_{plano} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j}$ (\hat{j} es el versor normal al plano). El alambre es un poco más difícil de tratar por

el ya mentado problema del versor radial. Lo peor que podemos hacer es entrar en el modo automático y copiar el resultado de la (32) directamente reportando:

$$\vec{E}_{alambre}(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{e}_r$$

Hasta que no escribamos correctamente r y \hat{e}_r en términos del problema no habremos terminado la resolución. Repasemos un poco: \vec{r} es el vector, perpendicular al alambre, que nace en el mismo y termina en el punto de observación. Para nuestro caso es $\vec{r} = (d \hat{i} + d \hat{j}, d \hat{k}) - (0 \hat{i} + d \hat{j} + d \hat{k}) = d \hat{i}$, su módulo vale $r=d$, y el versor correspondiente

$$\text{es } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{i}$$

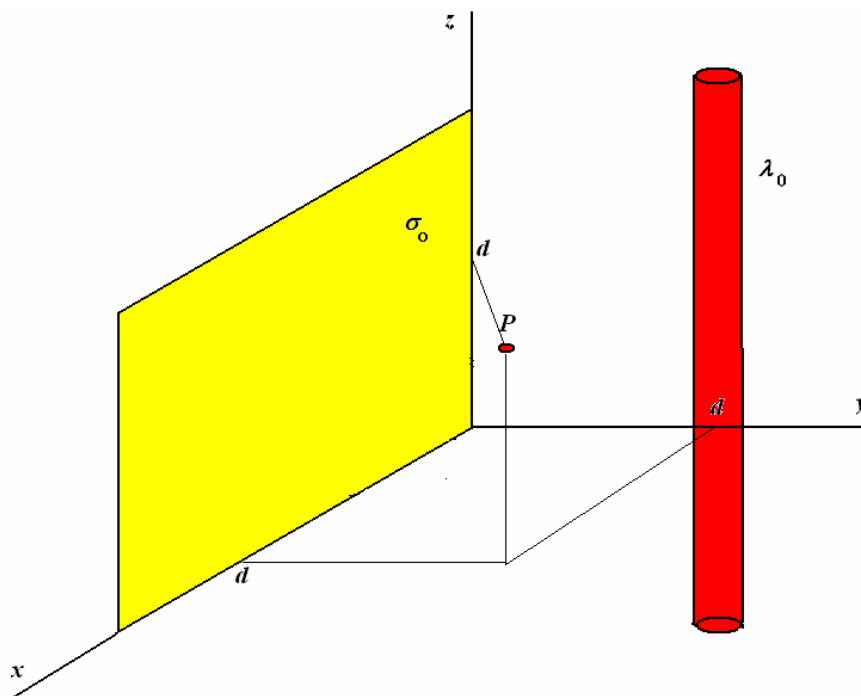


Figura 30. Un problema compuesto

La respuesta correcta es entonces:

$$\vec{E}_{Total}(P) = \vec{E}_{Plano}(P) + \vec{E}_{Alambre}(P) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \hat{i}$$

Un último ejemplo clásico y que parece desafiar al método: Un cilindro macizo de radio a y largo infinito está perforado con otro cilindro de radio b corrido una distancia d del centro del primero. El cilindro macizo está uniformemente cargado en volumen con densidad ρ_0 . Consigna: calcular el campo eléctrico en el centro del agujero (figura31).

A primera vista parece que estamos condenados. El objeto es asimétrico por culpa del agujero, por lo que parece que no queda más remedio que recurrir al método de integración a través de la (9).

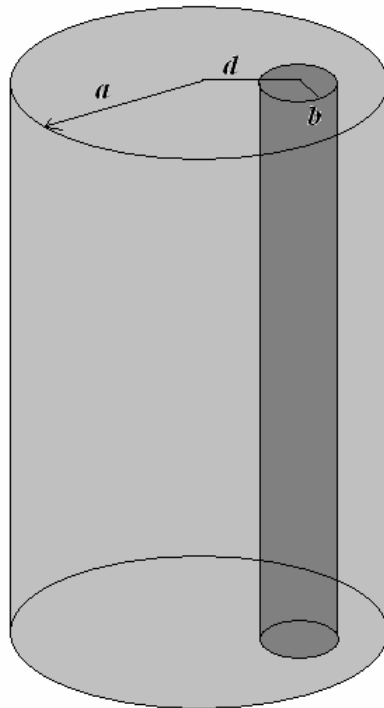


Figura 31. Un cilindro cargado con una perforación

Por suerte hay gente ingeniosa que logra descomponer un problema difícil en partes fáciles. La idea genial es concebir al cilindro perforado de la figura 31 como la suma de dos cilindros. Uno de radio a con densidad ρ_0 de carga positiva y otro, más pequeño, de radio b y densidad de carga $-\rho_0$. Al combinar (sumar) ambos cilindros nos queda una zona sin carga (el agujero) y volvemos al sistema original. Increíblemente simple y eficaz.

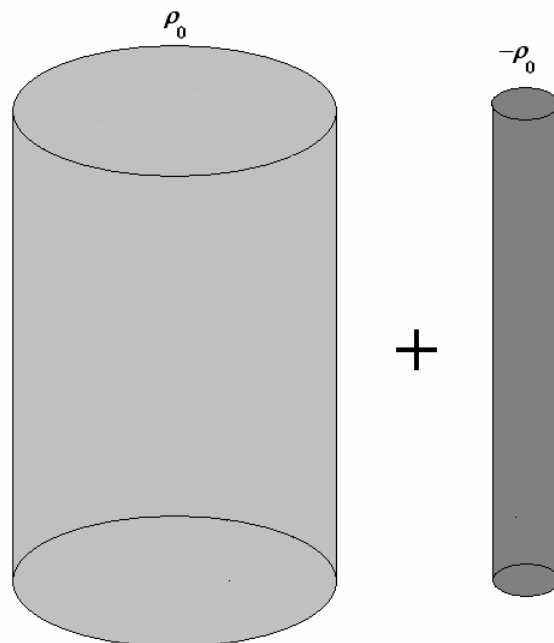


Figura 32. El objeto de la figura 31 “desarmado”

Ahora todo parece más simple; se trata de computar dos campos por separado y luego sumarlos.

Elegimos poner el centro del cilindro grande en el origen de coordenadas. El centro del cilindro pequeño lo ubicamos sobre el eje y , es decir en el punto $(0,d,0)$.

Primero computamos el campo debido al cilindro grande en el punto $(0,d,0)$. El problema es semejante al analizado en (34), faltando determinar las cantidades. El valor de r es igual a d y el versor radial (en el centro del agujero) apunta en la dirección \hat{j} . Así tenemos el aporte del

cilindro grande: $\vec{E}_{grande} = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} \hat{j}$. Pasemos ahora al campo generado por el cilindro chico. El

centro del agujero coincide con el del cilindro pequeño. Cuando puntualizamos en la (34) nos encontramos con que el campo generado por el cilindro chico es nulo!! Esto suena raro pero es correcto!! (Distinto habría sido si el punto de observación hubiera sido uno distinto al centro del agujero. Entonces el campo computado anteriormente es la respuesta final e increíblemente coincide con el que habríamos obtenido en ese lugar si el cilindro grande hubiera sido macizo. Desafío extra: calcular el campo en otro lugar (ayuda: aplicar bien la (34) en lo referente a las distancias y los versores; consultar al docente).

El trabajo de las fuerzas eléctricas. La diferencia de potencial

Los capítulos anteriores estuvieron dedicados al cálculo del campo eléctrico con distintas herramientas. Repetimos que nuestro interés en el campo eléctrico estriba en que con fuerzas eléctricas podemos mover cargas (aunque aún no hemos ahondado mucho en esto) y todo el negocio eléctrico reside en mover cargas ordenadamente (desde la linterna más humilde a la computadora más espectacular).

Si volvemos a nuestra querida carga de prueba e imaginariamente la transportamos desde un punto de partida hasta un punto de llegada resulta claro que, en general, habrá un trabajo involucrado.

Este tema resulta ser tan importante nuestra área que lo vamos a desarrollar lentamente para formularlo en una forma práctica para nuestros objetivos.

Comenzamos con la figura 33. La carga de prueba q_0 está sometida a un campo eléctrico \vec{E} generado por un conjunto de cargas, estáticas, no mostrado. Obviamente actúan fuerzas eléctricas sobre todas las cargas, en particular la de prueba. Para mantener las cargas en sus respectivas posiciones pensaremos que están fijas gracias a algún adhesivo, salvo por la carga de prueba que es retenida por nuestra mano.

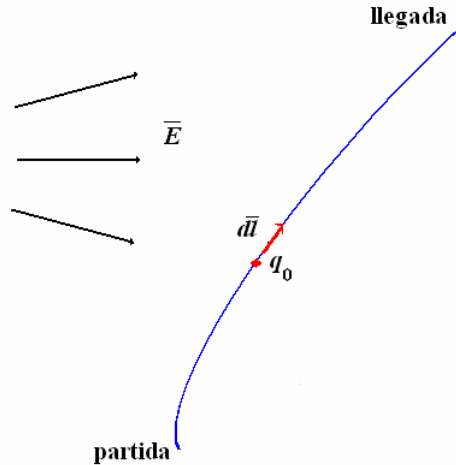


Figura 33. Una carga de prueba recorre un camino sometida a un campo eléctrico

Ahora imaginamos que movemos a q_0 desde una posición de partida hasta una de llegada siguiendo un camino C . Lo hacemos de una manera muy lenta, de forma tal que la velocidad de la carga sea virtualmente nula en todo momento. Para cumplir con esta consigna la fuerza que aplica nuestra mano debe ser de igual módulo y opuesta a la que ejerce el campo eléctrico (de lo contrario habría una fuerza neta sobre la carga, esta aceleraría y la velocidad no sería casi nula). Esta forma de desplazar la carga recibe el nombre de cuasi-estática (el nombre es claro) y asegura, entre otras cosas, que la energía cinética de la carga sea casi cero, por lo que el trabajo realizado por la mano es opuesto al efectuado por las otras fuerzas (eléctricas en este caso)

Volvamos por un rato a Física I y computemos el trabajo W hecho por la *mano*:

$$W_{partida-llegada} = \int_{partida}^{llegada} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{partida}^{llegada} -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (36)$$

En la (36) escribimos la fuerza aplicada por la mano como el valor opuesto al ejercido por el campo y, en virtud de la definición de este, la fuerza eléctrica es el producto de la carga de prueba por el campo. Por un tema de nomenclatura tuvimos que omitir que el camino de integración es la curva C y que por lo tanto $d\vec{l}$ es un elemento de camino tangente en todo punto a C .

Nada mejor que un primer ejemplo fácil. La carga de prueba está sometida al campo generado por una única carga Q positiva, ubicada en el origen de coordenadas (figura 34). Los puntos de partida \vec{r}_i y llegada \vec{r}_f (i por *inicial*, f por *final*) se encuentran sobre una recta que pasa por Q y el camino recorrido es a lo largo de esta recta.

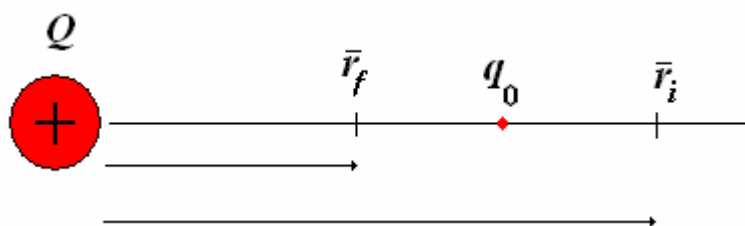


Figura 34. Desplazando la carga de prueba en el campo de una carga puntual

Calculemos entonces el trabajo realizado:

$$W_{\vec{r}_f, \vec{r}_i} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \quad (37)$$

Hay que comentar muy lentamente cada uno de los pasos de la ecuación anterior. Primero tenemos el campo eléctrico generado por Q . La ecuación (18) nos da su módulo y dirección. En este ejemplo tan simple el elemento de camino es recorrido en dirección radial, por lo que escribimos $d\vec{l} = d\vec{r} = dr \hat{r}$. Aquí es importante destacar un error muy común; muchas personas dicen: “Estamos yendo de derecha a izquierda, por lo tanto el elemento de camino debería ser escrito con un signo menos delante”. Esto **NO** es correcto. La mención a que el recorrido es de derecha a izquierda ya está contemplada en los límites de la integral. El camino es a lo largo de la dirección radial y son los límites los que dan el signo correcto. Si esta explicación es insuficiente vamos a verlo desde otro punto de vista. El movimiento de q_0 es tal que nos acercamos a Q . Dado que actúa una fuerza repulsiva entre ambas por ser del mismo signo, el trabajo realizado por nosotros es positivo (verificarlo). Esto está confirmado por el signo de la (37) dado que el factor delante del paréntesis es positivo, además dado que $r_f < r_i$, también el paréntesis es positivo. **CUIDADO:** r_i y r_f son los módulos de \vec{r}_i y \vec{r}_f respectivamente. La (37) es por lo tanto un escalar, que es lo correcto puesto que se trata de un trabajo.

Este fue un ejemplo fácil; vamos a considerar uno más complicado. Los puntos de partida y de llegada no se encuentran sobre una recta que pase por Q (figura 35). Somos libres de tomar el camino que más nos plazca.

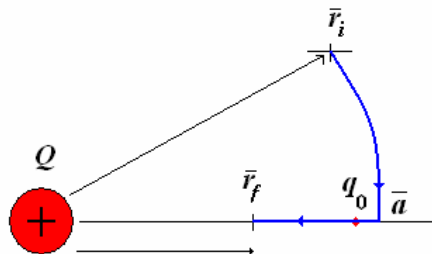


Figura 35. Un camino más complicado

Esta libertad de elegir el camino es maravillosa, vamos a proponer la solución del hombre vago y tomamos el camino también mostrado en la figura: el trayecto desde \vec{r}_i hasta \vec{a} es un arco de circunferencia con centro en Q . Luego, desde \vec{a} hasta \vec{r}_f retomamos el recorrido radial del primer ejemplo. El trabajo realizado en el primer tramo es nulo porque el campo es perpendicular al desplazamiento. El trabajo realizado en el segundo tramo queda entonces dado por la (37), pero notamos que $a=r_i$, por lo que el trabajo realizado vuelve a tener la misma expresión que antes aunque los puntos estaban ubicados de otra manera.

¿Es pura casualidad? ¿Qué sucede con otros caminos?

En lugar de probar infinitas posibilidades es mejor recordar que el trabajo es un caso particular de la circulación de un vector a lo largo de una curva. La herramienta que nos facilita la tarea es el cómputo del rotor del vector (recordar teorema de Stokes).

En coordenadas esféricas el rotor está dado por:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{E}) = & \frac{1}{r \sin(\varphi)} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin(\varphi) E_\theta) - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \theta} \right] \hat{r} + \\ & \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \right] \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \hat{\theta} = 0; \quad r \neq 0 \end{aligned} \quad (38)$$

El resultado se obtiene a partir de notar que $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$ y $E_\theta = E_\varphi = 0$

El rotor del campo eléctrico generado por una carga puntual es nulo en todo punto que no coincida con la carga. Esto nos dice que la circulación del campo eléctrico en un camino cerrado es cero ($\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$) y por lo tanto se trata de un campo conservativo. Esto no es

sorprendente porque la ley de Coulomb tiene la misma forma matemática que la ley de gravitación de Newton, así que ambas comparten las mismas propiedades matemáticas y recordamos de Física I que las fuerzas gravitatorias son conservativas.

En virtud del principio de superposición, lo determinado para una carga puntual puede ser extendido a un conjunto de cargas. Llegamos a la importante conclusión que el campo eléctrico generado por una distribución estática de cargas (electrostático) es conservativo. Este descubrimiento es muy valioso porque nos dice que el trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas que da disponible en el sistema para poder ser utilizado posteriormente. En este sentido es idéntico al caso de elevar un peso realizando un trabajo. Sabemos que este queda almacenado como energía potencial gravitatoria y lo podemos utilizar en otras aplicaciones. A nadie sorprenderá que dentro de unos párrafos introduzcamos el concepto de energía electrostática.

Pero volvamos ahora sobre un argumento que ya utilizamos al definir el campo eléctrico. Al observar la (36) notamos que hay una dependencia lineal trivial del trabajo realizado con el valor de la carga de prueba q_0 . Podemos repetir lo hecho y concebir el trabajo realizado por unidad de carga. Esta cantidad es útil porque, una vez evaluada, para obtener el trabajo realizado para un valor particular de q_0 nos basta con efectuar un producto. Esta magnitud recibe el nombre de diferencia de potencial V . Por lo dicho queda definida por:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{W_{\vec{r}_f, \vec{r}_i}}{q_0} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (39)$$

Los términos del medio y de la derecha de la (39) son de interpretación directa. Distinto es el caso con el de la izquierda. Lo hemos escrito como la diferencia de dos magnitudes evaluadas en dos posiciones diferentes. Esto es válido porque hemos demostrado que el campo eléctrico es conservativo. Por lo tanto la circulación del mismo entre dos puntos es independiente del camino y eso se traduce en que dicha circulación puede ser evaluada como la diferencia de una función escalar, llamada potencial (en sentido matemático, no eléctrico). La unidad MKS de la diferencia de potencial se denomina Volt (V), en homenaje a Alessandro Volta quien aportó mucho a nuestro conocimiento de los fenómenos eléctricos. Obviamente $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.

Para el caso de la (37) la diferencia de potencial es:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \quad (40)$$

Vamos a reescribir (39), previa diferenciación, en una forma alternativa:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -(E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (41)$$

Por otro lado sabemos que (lo enseñan en Análisis II):

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (42)$$

Finalmente, comparando (41) y (42):

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) = -\text{grad}(V) \quad (43)$$

La (43) contiene la misma información que la (39). Podemos, ligeramente, decir que una representa la “ida” y la otra la “vuelta”. Conocido uno cualquiera, podemos computar el otro. Una curiosidad matemática a futuro; si combinamos la (26) con la (43) resulta:

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div}[-\text{grad}(V)] = -\nabla^2(V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (44)$$

La (44) se denomina ecuación de Poisson (El operador ∇^2 recibe el nombre de laplaciano). Es una ecuación diferencial a derivadas parciales de segundo orden. Las técnicas para resolver estas ecuaciones son temario de Análisis III y no todos los alumnos deben cursar esa materia, por lo que no podemos ahondar en ella. Solo diremos que, a pesar de la complejidad aparente, hay más métodos para resolver ecuaciones diferenciales como la (44) que ecuaciones integrales como las que propone la ley de Gauss. De hecho, los programas tales como el QuickField (y muchos otros), resuelven en forma numérica la (44) con mucha rapidez. De todas formas, en nuestra materia nos restringiremos a las formas integrales, aplicadas a las formas más simples, de forma tal de mantener la complejidad matemática dentro de un rango “razonable”.

El problema de la referencia. La maldición de “El potencial”

Hasta aquí tenemos definida la diferencia de potencial entre dos puntos. Siempre surge la pregunta: ¿Dónde está el cero? Respuesta: Donde nos plazca. Así como el nivel de referencia para la energía potencial gravitatoria es el que nos quede más cómodo para un problema en particular, lo mismo sucede en este caso. El tema no daría para más si no se hubiera popularizado la siguiente convención que, si bien es cómoda, ha traído muchos disgustos.

Volvamos a la situación en que la fuente de campo sea una única carga Q e imaginemos que la posición inicial \vec{r}_i de q_0 estuviera extraordinariamente alejada (en el infinito, $\vec{r}_i \rightarrow \infty$).

Hagamos de ese lugar el de referencia y asignémosle un valor nulo: $V(\infty)=0$. Ahora que tenemos un lugar y valor de referencia (totalmente arbitrario por cierto), obtenemos una función potencial definida en cualquier punto. Por ejemplo, la (40) se transforma en:

$$\lim_{\vec{r}_i \rightarrow \infty} [V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)] = V(\vec{r}_f) - 0 = V(\vec{r}_f) = \lim_{\vec{r}_i \rightarrow \infty} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_f} \quad (45)$$

$$V(\vec{r}_f) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_f}$$

Esta expresión no solo es cómoda matemáticamente sino que, como veremos más adelante, nos facilita el cálculo de la cantidad de energía almacenada en un sistema de cargas.

Igualmente **NO** hay que olvidar que la (45) representa una elección **ARBITRARIA** del lugar de referencia y el valor correspondiente. Esta asignación se hace tantas veces que degenera en un vicio: el de hablar del potencial de un punto cualquiera. Veámoslo con un ejemplo. Supongamos que en la (45) la carga Q es de 1 nC y la distancia r_f de 1m. El valor numérico que obtenemos es $V(r_f) \approx 9$ V. Es aquí cuando muchas personas se expresan descuidadamente y dicen solamente: “El potencial del punto r_f es aproximadamente 9 V”. Si la oración termina aquí es, cuando menos, incompleta y conduce a razonamientos generalmente erróneos. La oración correcta, aunque muy larga, es: “El potencial del punto r_f es aproximadamente 9 V, tomando como punto de referencia al infinito y asignándole a este un valor nulo”. Esta forma es intolerablemente larga, pero enfatiza la importancia de informar el punto de referencia utilizado.

A esta altura tantas recomendaciones pueden parecer exageradas, pero ilustraremos con un ejemplo los problemas de automatizar la elección del punto de referencia.

El objetivo es calcular la diferencia de potencial entre dos puntos si el objeto cargado es el plano infinito de la figura 28. Supongamos que dicho plano coincide con el xy y que los puntos de observación corresponden a la región $z > 0$ para hacer todo más fácil.

El campo vale $E(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k}$ (el versor normal al plano apunta a lo largo del eje z). Los puntos

son $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ y $\vec{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$ y el camino de integración (que lo elegimos a nuestra conveniencia) lo hacemos primero a lo largo de una recta desde (x_i, y_i, z_i) hasta (x_i, y_i, z_f) y luego otro tramo recto desde (x_i, y_i, z_f) hasta (x_f, y_f, z_f) . Para el primer recorrido el elemento de camino vale $d\vec{l} = dz \hat{k}$, por lo que obtenemos:

$$V(x_i, y_i, z_f) - V(x_i, y_i, z_i) = - \int_{x_i, y_i, z_i}^{x_i, y_i, z_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{x_i, y_i, z_f}^{x_f, y_f, z_f} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k} \cdot dz \hat{k} = - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (z_f - z_i) \quad (46)$$

Si pasamos ahora al segundo tramo, notamos que el camino es perpendicular a las líneas de campo, por lo que la diferencia de potencial es cero. La conclusión es que la (46) es la diferencia de potencial total entre los puntos inicial y final. El resultado era de esperar porque las líneas de campo están a lo largo del eje z y entonces solo importan cambios de posición en esa dirección. Ahora vamos a lo dramático: ¿Qué pasa si insistimos con el criterio de elección para el punto de referencia? Muy pronto vemos que no podemos porque deberíamos hacer tender z_i a infinito y la expresión diverge.

¿Qué sucedió? La respuesta es simple; hemos exagerado tanto para conseguir un cómputo simple del campo eléctrico que terminamos con un objeto (el plano cargado) que contiene una cantidad total de carga infinita. No es de sorprender que el problema se torne divergente. El mismo problema existe con el alambre infinito porque nuevamente la cantidad de carga

almacenada es infinita. En el mundo real los alambres y planos son de extensión finita, por lo tanto, al alejarnos mucho en el intento de llevar el punto de referencia al infinito, la ley de variación del campo se aparta notoriamente de la obtenida bajo la suposición que el sistema es ilimitado y expresiones como la (46) deben ser recalculadas (lamentablemente la expresión del campo se vuelve mucho más difícil). En los casos “exagerados” (plano o alambre infinitos) es **INÚTIL**, buscar un punto de referencia y un valor que arreglen el problema. Es una intención destinada al fracaso porque el problema es intrínsecamente divergente.

Sin embargo, los casos “fáciles” son demasiado atractivos como para despreciarlos. Además existen muchos objetos del mundo real que se aproxima a los idealizados. No habrá hilos infinitos, pero sí cables muy largos y lo mismo sucede con placas planas. Para estas situaciones podemos calcular la diferencia de potencial siempre y cuando los puntos inicial o final no involucren al infinito.

Calculemos ahora el otro caso “fácil”: la diferencia de potencial entre dos puntos debida a un hilo homogéneamente cargado y de largo infinito.

El campo ya lo conocemos y está dado por la (32): $\vec{E} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$

Dada la forma funcional del campo vemos que solo es relevante la diferencia en las coordenadas radiales de los puntos inicial y final, por lo que los podemos suponer ubicados sobre una recta que pasa por el hilo y es normal a este.

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_i}^{r_f} \left(\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r} \right) \cdot (dr \hat{r}) = - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_f}{r_i}\right) \quad (47)$$

Como se puede apreciar, nuevamente estamos en problemas si cualquiera de las posiciones tiende a infinito (o r_i a cero). Si embargo, tanto el caso del plano (46) como el hilo (47), brindan respuestas “buenas” para posiciones acotadas. Además, veremos que en varias circunstancias nos encontraremos con objetos cargados que siguen razonablemente estas últimas expresiones

En síntesis: debemos hablar de diferencias de potencial y tratar de evitar a toda costa decir “el potencial” sin especificar la referencia porque puede traer confusiones graves.

Diferencia de potencial con varias cargas

Hasta ahora los ejemplos se han limitado a una carga simple y los casos “malos”. Pasemos al análisis con varias cargas (figura 36). Queremos calcular la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final; no dibujamos el camino porque ya sabemos que no es relevante.

La primera idea es la de computar el campo eléctrico para un punto genérico del espacio, para luego pensar un camino “ingenioso” que permita resolver la (39) con el menor sufrimiento posible.

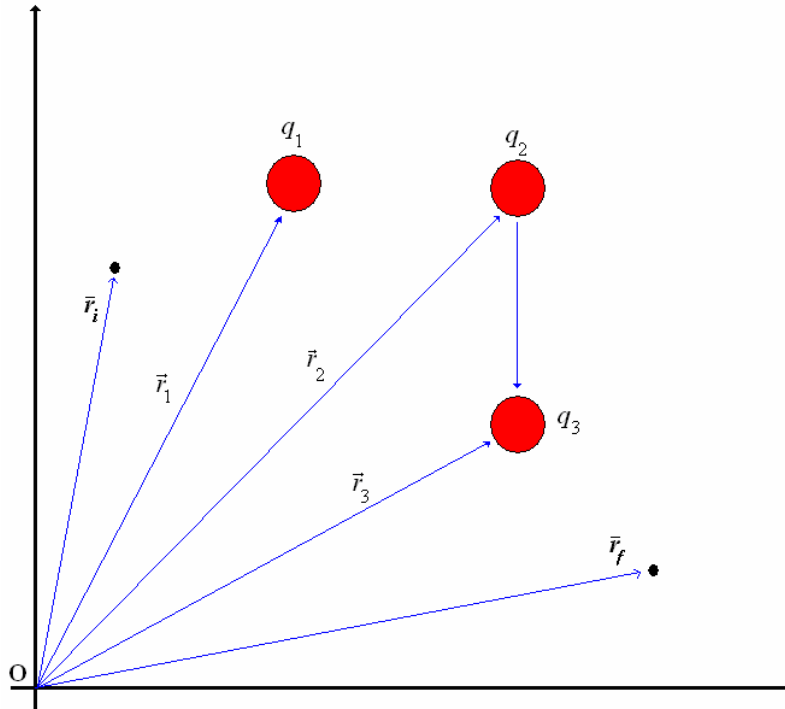


Figura 36. Diferencia de potencial en un sistema de varias cargas

La idea es impecable porque apunta a la aplicación directa de la definición. Lamentablemente no siempre es la mejor porque involucra dos pasos: 1) determinar el campo eléctrico (con sus tres componentes), 2) integrar desde el punto de partida al de llegada. Mucho esfuerzo.

Mejor es volver al principio de superposición y considerar que solo existe q_1 . En tal situación la diferencia de potencial vale (a partir de la (40)):

$$[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)]_{q_1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|} \right] \quad (48)$$

En esta expresión aparece explícitamente la posición de q_1 (\vec{r}_1) porque ella no se encuentra en el origen de coordenadas.

Repetiendo para q_2 y q_3 tenemos:

$$[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)]_{q_2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_2|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_2|} \right] \quad (49)$$

$$[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)]_{q_3} = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_3|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_3|} \right]$$

Ahora solo queda sumar los tres aportes debidos a q_1 , q_2 y q_3 .

$$[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)]_{q_1, q_2, q_3} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|} \right] + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_2|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_2|} \right] + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_3|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_3|} \right] \quad (50)$$

Sin dudas es mucho menos trabajo que el método basado en la integración.

Si queremos volver a definir al infinito como el punto inicial de referencia obtenemos una expresión simplificada:

$$[V(\vec{r}_f)]_{q_1, q_2, q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_f - \vec{r}_2|} + \frac{q_3}{|\vec{r}_f - \vec{r}_3|} \right] \quad (V(\infty)=0) \quad (51)$$

Obviamente, si bien presentamos tres cargas, el método se puede extender fácilmente a un conjunto discreto de cargas.

Un poquito más de trabajo requiere el caso de tener una distribución continua de cargas; pero la clave está en generalizar la ecuación (50). Volvemos sobre la distribución unidimensional de carga, aunque después lo generalizaremos (ver figura 37)

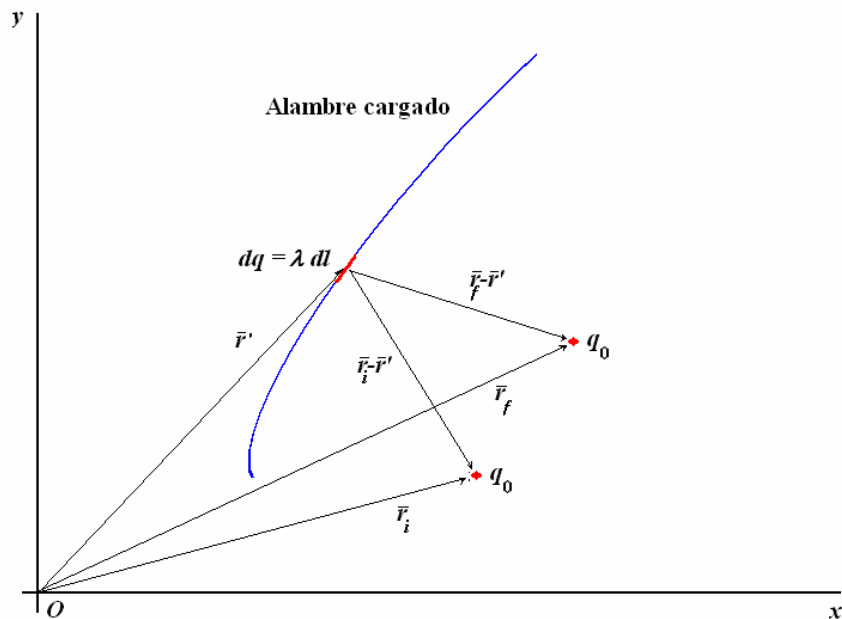


Figura 37. Diferencia de potencial entre dos puntos debido a un alambre cargado

Como siempre, la carga de prueba q_0 es desplazada desde el punto inicial al final (mantenemos la nomenclatura previa). La idea tomada “prestada” de la (50) es que dividimos el sistema en un gran número de partes (luego tomamos el límite hacia infinito). Si centramos nuestra atención en el tramo rojo con carga dq , podemos calcular el diferencial de diferencia de potencial (suena a trabalenguas) como:

$$d[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)] = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \right] \quad (52)$$

Nótese que la posición \vec{r}_i de la i -ésima carga ha sido reemplazada por la posición genérica \vec{r}' del elemento rojo.

Ahora solo resta aplicar el principio de superposición integrando sobre todas las contribuciones para obtener:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \int_{\text{Cable}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \right] = \int_{\text{Cable}} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \right] \quad (53)$$

La extensión a sistemas 2-D y 3-D es directa (¿se animan a escribirlas?)

La expresión (53) se simplifica si hacemos del infinito el punto de referencia:

$$V(\vec{r}_f) = \int_{\text{Cable}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} \right] = \int_{\text{Cable}} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} \right] \quad (V(\infty)=0) \quad (54)$$

La expresión anterior, y sus equivalentes bi o tridimensionales, son aplicables en la medida en que el objeto cargado no sea de dimensiones infinitas porque caeríamos en el problema ya comentado.

Ilustremos con un ejemplo. Una distribución uniforme de cargas con forma de anillo de radio a se encuentra en el plano xy con su centro en el origen de coordenadas. Se desea conocer la diferencia de potencial entre los puntos inicial $(0,0,2a)$ y final $(0,0,-a)$ (figura 38).

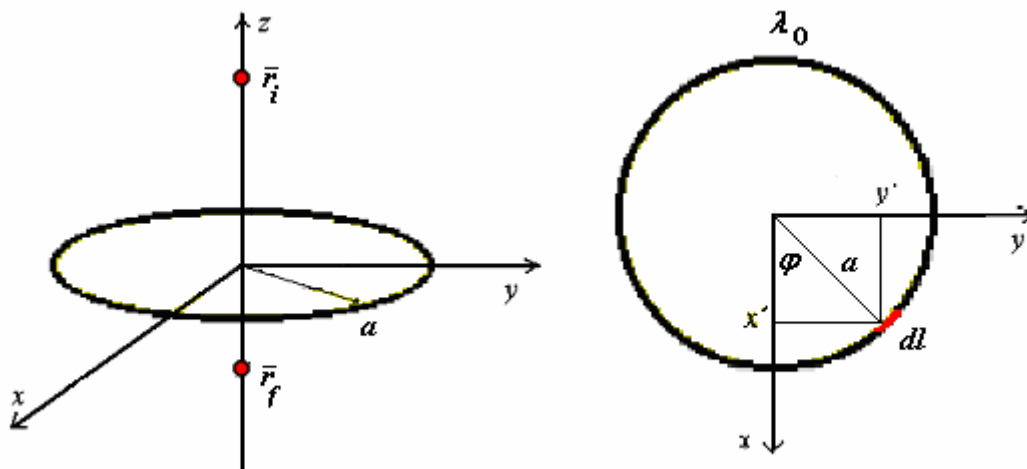


Figura 38. Diferencia de potencial entre dos puntos generada por un anillo cargado

Comencemos asignando variables: $\vec{r}_i = (0,0,2a)$; $\vec{r}_f = (0,0,-a)$

La posición del elemento cargado genérico es: $\vec{r}' = (x', y', 0) = (a \cos(\varphi), a \sin(\varphi), 0)$

El elemento de camino dl lo obtenemos por derivación de la curva paramétrica anterior:

$$d\vec{l} = (-a \sin(\varphi) d\varphi, a \cos(\varphi) d\varphi, 0); \quad dl = \sqrt{a^2 \sin^2(\varphi) + a^2 \cos^2(\varphi)} d\varphi = a d\varphi$$

Ahora podemos armar los distintos términos de la (53)

$$|\vec{r}_i - r'| = |(0,0,2a) - (a \cos(\varphi), a \sin(\varphi), 0)| = |(-a \cos(\varphi), -a \sin(\varphi), 2a)| = \sqrt{5}a$$

$$|\vec{r}_f - r'| = |(0,0,-a) - (a \cos(\varphi), a \sin(\varphi), 0)| = |(-a \cos(\varphi), -a \sin(\varphi), -a)| = \sqrt{2}a$$

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \int_{\text{Anillo}} \frac{\lambda_0 dl}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \right] = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 a d\varphi}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{5}a} - \frac{1}{\sqrt{2}a} \right] = \frac{\lambda_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Como se puede apreciar la complejidad del desarrollo se redujo bastante comparado con la que nos habríamos enfrentado en el caso de computar primero el campo y luego integrarlo a lo largo de algún camino.

No todos los casos se ven beneficiados por esta aproximación. Cuando la forma funcional del campo es fácilmente calculable (como en los ejemplos desarrollados a partir de la ley de Gauss) la aplicación directa de la (39) es más simple.

Consideremos, por ejemplo, el caso ya tratado de una esfera de radio a uniformemente cargada en volumen con densidad ρ_0 (ecuaciones 29 y 31). Tenemos tres alternativas posibles: 1) los puntos inicial y final se encuentran fuera de la esfera, 2) uno se encuentra fuera y otro dentro, 3) ambos se encuentran dentro. Tratar todos los casos es largo y solo queremos puntualizar ventajas de un método u otro. Tomemos, arbitrariamente, la segunda opción con $r_i > a$ y $r_f < a$.

Dado el carácter radial de las líneas de campo, solo es relevante la diferencia en dicha coordenada entre los puntos inicial y final. Por lo tanto, aunque no se encuentren en una recta que pase por el centro de la esfera, los podemos imaginar en tal situación. La diferencia de potencial por integración directa brinda:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \left(\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} + \int_a^{\vec{r}_f} \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r} \cdot dr \hat{r} \right) = - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left\{ \left[a^3 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_i} \right) \right] + \frac{1}{2} (r_f^2 - a^2) \right\}$$

Es importante notar que la integración tiene dos sumandos, correspondientes a las dos regiones diferentes.

Si optamos por una ecuación análoga a la (53) resulta:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \int_{\text{Esfera}} \frac{\rho_0 dv}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \right]$$

Acá nos enfrentamos con un problema operativo: Por la forma del objeto cargado parece natural utilizar un sistema de coordenadas esférico. Lamentablemente, en este sistema, las diferencias de vectores son expresiones complicadas. A pesar de lo horrible que parece conviene pasar a un sistema cartesiano, pero claramente los límites de integración resultan terriblemente complejos. Conclusión: a pesar de ser un problema simple, es preferible recurrir a la integración del campo antes que recurrir al cómputo a través de la (53).

El resumen de estos ejemplos nos ilustra que hay que evitar el modo automático y meditar antes de actuar. En algunos casos es preferible calcular la diferencia de potencial a través de la

(39) y en otros por la (53). ¿Cómo lo sabemos? Practicando un poco hasta adquirir la habilidad para reconocer el mejor camino.

Equipotenciales

Volvamos por ahora a la situación en que la elección de la referencia estándar no acarrea dramas. En tal situación todo punto \vec{r} del espacio tiene asignado un potencial $V(\vec{r})$. Las regiones de $V(\vec{r}) = cte$ definen las llamadas curvas o superficies equipotenciales las que, en virtud de la (43), resultan ser perpendiculares a las líneas de campo como muestra la figura 39 para el caso de una carga positiva.

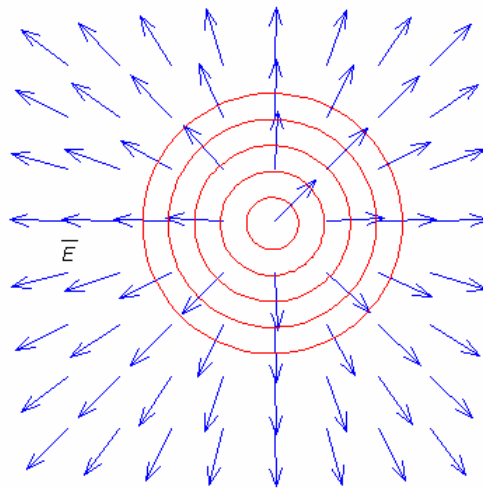


Figura 39. Líneas de campo (azul) y equipotenciales (rojo) de una carga positiva.

Dada la conexión entre campo eléctrico y potencial ya mencionada (43) no es usual dibujar ambos porque el dibujo se vuelve confuso (particularmente en blanco y negro). Las curvas equipotenciales son de interés porque al desplazarnos sobre ellas no se realiza trabajo. En breve veremos que desplazar cargas dentro de un metal no requiere de trabajo alguno, por lo que son objetos equipotenciales. Por último, y contando algo antes de tiempo, vale la pena mencionar que las pilas comunes son dispositivos que transportan carga entre los bornes de entrada y salida con la peculiaridad que la cantidad de trabajo que realiza por unidad de carga (diferencia de potencial) es un valor constante; por ejemplo 1.5 V. Ya volveremos sobre las pilas.

Un segundo ejemplo será de ayuda. Dos cargas de igual valor Q y distinto signo (se denomina dipolo a esta configuración) se encuentran ubicadas sobre el eje x en las posiciones $+d/2$ y $-d/2$. La herramienta directa es la (51) con:

$$\vec{r}_1 = (+d/2, 0); \vec{r}_2 = (-d/2, 0)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right]$$

Claramente $V(0)=0$ porque dicho punto se encuentra a igual distancia de ambas cargas. Lo mismo ocurre con los puntos sobre el eje y . Con un poco de álgebra (o computadora) se pueden encontrar otras curvas equipotenciales como las que muestra la figura 40

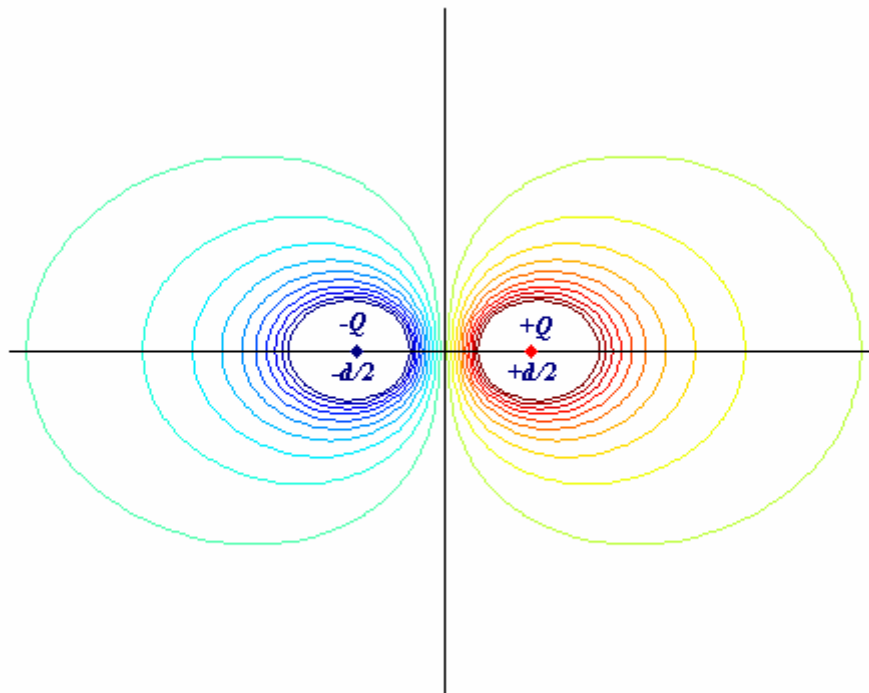


Figura 40. Líneas equipotenciales para un dipolo

La energía almacenada en una distribución de cargas

Conjunto discreto

Una distribución cualquiera de cargas eléctricas tiene una cierta cantidad de energía asociada. Esto es particularmente fácil de ver en el caso de contar con N cargas Q_i ubicadas en las posiciones \vec{r}_i . Consideramos que este sistema es armado trayendo sucesivamente cada una de las cargas desde una distancia muy grande. Así, para traer la primera (Q_1) hasta su posición \vec{r}_1 no efectuamos trabajo alguno dado que sobre la misma no actúan fuerzas eléctricas. Luego, para poner la segunda carga (Q_2) en su posición final \vec{r}_2 debemos hacer un trabajo W_{21} .

$$W_{21} = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Si ahora movemos imaginariamente la tercera carga (Q_3) hasta \vec{r}_3 podemos calcular el trabajo realizado computando los términos entre la carga 1 y la 3 y luego entre la 2 y la 3 gracias al principio de superposición.

$$W_{31} = \frac{Q_3 Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|}; W_{32} = \frac{Q_3 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

Podemos continuar así con las demás cargas hasta haber conformado toda la distribución de cargas. La cantidad total de trabajo realizado (y por lo tanto la energía almacenada) es simplemente la suma de los términos anteriormente mencionados.

$$W = \sum_{\substack{\text{Todos} \\ \text{los pares}}} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad i \neq j \quad (55)$$

En la última expresión incluimos el factor $\frac{1}{2}$ para evitar contabilizar dos veces el mismo término al recorrer las sumatorias todos los valores de i y j .

Distribución continua de cargas

Cuando tenemos una distribución continua de cargas las sumas anteriores deben ser reemplazadas por integrales. Así, si consideramos que cada elemento de volumen dv tiene una cantidad de carga $dQ = \rho dv$ obtenemos:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\substack{\text{Todo} \\ \text{el espacio}}} \int_{\substack{\text{Todo} \\ \text{el espacio}}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dv_1 dv_2 \quad (56)$$

Donde tenemos ahora dos integrales que recorren toda la distribución de cargas (por eso mantenemos el factor $\frac{1}{2}$ al comienzo).

Si nos concentramos en la integral sobre dv_2 observamos lo siguiente:

$$\int_{\substack{\text{Todo} \\ \text{el espacio}}} \frac{\rho(2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dv_2 = V(1) \quad (57)$$

Observamos que la misma devuelve el potencial generado en la posición 1 por toda la distribución 2 (tomando como punto de referencia el infinito), por lo que podemos reducir la expresión (57) a:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\substack{\text{Todo} \\ \text{el espacio}}} \rho(1) V(1) dv_1 \quad (58)$$

El uso del subíndice para indicar la región es entonces innecesario puesto que no quedan variables de la región 2 en la expresión. Entonces reducimos a:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\substack{\text{Todo} \\ \text{el espacio}}} \rho V dv \quad (59)$$

Esta es la relación final que nos permite computar la cantidad de energía almacenada en el sistema.