Problema

Se tiene un hilo de longitud $2L$ con una densidad de carga lineal λ. Calcular:

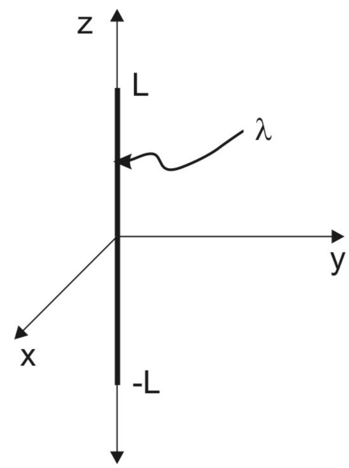
a) El campo eléctrico $\mathbf{E}$ aplicando la ley de Coulomb.

b) El caso $L \to \infty$ para el campo calculado en a). Expresar el resultado en coordenada clíndricas.

Solución

a) Se calcula el campo eléctrico con la fórmula

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\forall \mathbf{r}'} \frac{dq'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{1}$$



En éste caso particular tendremos:

$$\begin{aligned} dq' &= \lambda dz' \\ \mathbf{r} &= (x, y, z) \\ \mathbf{r}' &= (0, 0, z') \\ \mathbf{r}-\mathbf{r}' &= (x, y, z-z') \\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3 &= [x^2+y^2+(z-z')^2]^{3/2} \end{aligned}$$

de manera que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{-L}^{L} \frac{\lambda dz'(x, y, z-z')}{[x^2+y^2+(z-z')^2]^{3/2}} \tag{2}$$

Esta última ecuación representa tres ecuaciones, una para cada componente de $\mathbf{E}$, las cuales deben calcularse ahora por separado.

i)

$$E_x(\mathbf{r}) = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{[x^2+y^2+(z-z')^2]^{3/2}} \tag{3}$$

Para simplificar la notación se define $a^2 \equiv x^2+y^2$. Luego se sustituye $u = z - z'$, con lo cual queda

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}) &= -\frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{z+L}^{z-L} \frac{du}{[a^2+u^2]^{3/2}} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-L}^{z+L} \frac{du}{[a^2+u^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} \Big|_{z-L}^{z+L} \right] \\ &= \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{a^2+(z+L)^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{a^2+(z-L)^2}} \right] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2+y^2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{x^2+y^2+(z+L)^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2}} \right] \end{aligned}$$

ii) Procediendo de forma similar se obtiene

$$E_y(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{x^2+y^2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{x^2+y^2+(z+L)^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2}} \right]$$

iii) Por último,

$$\begin{aligned}
E_z(\mathbf{r}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{(z-z')dz'}{[x^2+y^2+(z-z')^2]^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{z-L}^{z+L}\frac{udu}{[a^2+u^2]^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}|_{z-L}^{z+L}\right] \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+L)^2}}\right]
\end{aligned}$$

b) En este caso $L \to \infty$ significa que la longitud del hilo es mucho mayor que las coordenadas del punto de observación, o sea, $L >> x$, $L >> y$ y $L >> z$ o bien $\frac{x}{L} << 1$, $\frac{y}{L} << 1$ y $\frac{z}{L} << 1$
Se analizan primero algunos términos que intervienen en las fórmulas de los campos:

- $$\begin{aligned}
\frac{z+L}{\sqrt{x^2+y^2+(z+L)^2}} &= \frac{L(\frac{z}{L}+1)}{\sqrt{x^2+y^2+L^2(\frac{z}{L}+1)^2}} \\
&= \frac{L(\frac{z}{L}+1)}{L\sqrt{(\frac{x}{L})^2+(\frac{y}{L})^2+(\frac{z}{L}+1)^2}} \\
&\approx 1
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\frac{z-L}{\sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2}} &= \frac{L(\frac{z}{L}-1)}{\sqrt{x^2+y^2+L^2(\frac{z}{L}-1)^2}} \\
&= \frac{L(\frac{z}{L}-1)}{L\sqrt{(\frac{x}{L})^2+(\frac{y}{L})^2+(\frac{z}{L}-1)^2}} \\
&\approx -1
\end{aligned}$$

Entonces quedan

$$E_x(\mathbf{r}) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{x^2+y^2}2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{x}{x^2+y^2} \tag{4}$$

$$E_x(\mathbf{r}) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{y}{x^2+y^2}2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{5}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z\pm L)}^2} &\approx \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+L^2}} \\
&\approx \frac{1}{L}
\end{aligned}$$

de manera que

$$E_z(\mathbf{r}) \approx 0 \tag{6}$$

De esta manera,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + y^2} (x, y, 0) \tag{7}$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}$$

resulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho^2} (\rho\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\varphi, 0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, 0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \hat{\rho} \tag{8}$$