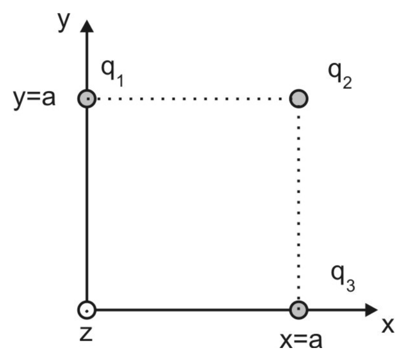
Problema

Tres cargas puntuales de valor $q = 3 \times 10^{-9}$c se sitúan en los los vértices de un cuadrado de lado $a = 15$cm dejando el cuarto vértice libre. Hallar la magnitud, la dirección y el sentido del campo eléctrico en el vértice vacante del cuadrado.

Solución

Se ubica el sistema de coordenadas de forma que el vértice vacante del cuadrado quede en el origen de coordenadas como indica la figura.



El campo eléctrico en el vértice libre se podrá hallar superponiendo los campos generados en el origen por cada una de las cargas: $\mathbf{E}(0,0,0) = \mathbf{E}_1(0,0,0) + \mathbf{E}_2(0,0,0) + \mathbf{E}_3(0,0,0)$. Cada uno de los campos se calculará a partir de la ley de Coulomb:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

donde q es la carga fuente del campo eléctrico, $\mathbf{r}'$ es su posición (punto fuente), $\mathbf{r}$ es el punto donde se calcula el campo (punto campo) y ϵ_0 es la permitividad del vacío. Para todos los casos se tendrá $\mathbf{r} = (0,0,0)$. Por comodidad en la notación usaremos $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv k$.

$\mathbf{E}_1$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_1 &= (0,a,0)\\
\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1 &= (0,-a,0)\\
|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1|^3 &= a^3\\
\mathbf{E}_1(0,0,0) &= \frac{kq}{a^3}(0,-a,0) = \frac{kq}{a^2}(0,-1,0)
\end{aligned}$$

$\mathbf{E}_2$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_2 &= (a,a,0)\\
\mathbf{r}-\mathbf{r}'_2 &= (-a,-a,0)\\
|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_2|^3 &= a^3\sqrt{8}\\
\mathbf{E}_2(0,0,0) &= \frac{kq}{a^3\sqrt{8}}(-a,-a,0) = \frac{kq}{a^2\sqrt{8}}(-1,-1,0)
\end{aligned}$$

$\mathbf{E}_3$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_3 &= (a,0,0)\\
\mathbf{r}-\mathbf{r}'_3 &= (-a,0,0)\\
|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_3|^3 &= a^3\\
\mathbf{E}_3(0,0,0) &= \frac{kq}{a^3}(-a,0,0) = \frac{kq}{a^2}(-1,0,0)
\end{aligned}$$

Superponiendo los campos resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(0,0,0) &= \frac{kq}{a^2}(0,-1,0)+\frac{kq}{a^2\sqrt{8}}(-1,-1,0)+\frac{kq}{a^2}(-1,0,0)\\ &= \frac{kq}{a^2}(-1-\frac{1}{\sqrt{8}},-1-\frac{1}{\sqrt{8}},0)\end{aligned}$$

Para separa módulo y dirección del campo eléctrico se normaliza el vector:

$$\|(-1-\frac{1}{\sqrt{8}},-1-\frac{1}{\sqrt{8}},0)\| = \sqrt{2}(1+\frac{1}{\sqrt{8}})$$

y se escribe:

$$\begin{aligned}(-1-\frac{1}{\sqrt{8}},-1-\frac{1}{\sqrt{8}},0) &= \sqrt{2}(1+\frac{1}{\sqrt{8}})(\frac{-1-\frac{1}{\sqrt{8}}}{\sqrt{2}(1+\frac{1}{\sqrt{8}})},\frac{-1-\frac{1}{\sqrt{8}}}{\sqrt{2}(1+\frac{1}{\sqrt{8}})},0)\\ &= \sqrt{2}(1+\frac{1}{\sqrt{8}})(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)\\ &= (\sqrt{2}+\frac{1}{2})(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)\\ &\simeq 1{,}914(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)\end{aligned}$$

de modo que:

$$\mathbf{E}(0,0,0) = \frac{kq}{a^2}1{,}914(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

y se puede evaluar el módulo:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{E}(0,0,0)\| &= \frac{kq}{a^2}1{,}914=\frac{8{,}9874\times10^9\times3\times10^{-9}}{0{,}15^2}1{,}914\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\mathrm{C}\frac{1}{\mathrm{m}^2}\\ &\simeq 2294\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\end{aligned}$$