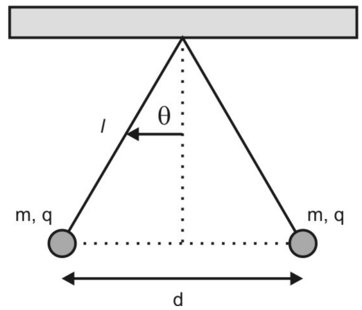
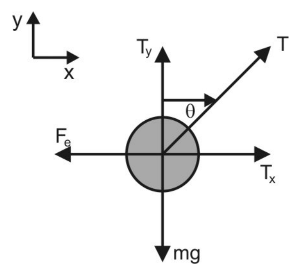
Problema

Dos partículas, cada una de masa m y carga q, se suspenden por cuerdas de longitud l de un punto común. Hallar el ángulo θ que forma cada una de las cuerdas con la vertical.



Solución



Haciendo el diagrama de cuerpo libre de una cualquiera de las masas, por ejemplo la de la izquierda, se obtiene:

$$\begin{aligned} T\cos\theta - mg &= 0 \qquad (1)\\ T\,\mathrm{sen}\,\theta - F_e &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Además, se tiene:

$$\frac{d/2}{l} = \mathrm{sen}\,\theta \tag{3}$$

Usando (2) y (1) se obtiene:

$$F_e = mg\tan\theta \tag{4}$$

Por otro lado, a partir de la ley de Coulomb se tiene:

$$F_e = k\frac{q^2}{d^2} = k\frac{q^2}{4l^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \tag{5}$$

Luego, igualando (4) y (5) resulta:

$$k\frac{q^2}{4l^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = mg\tan\theta$$

o bien

$$\begin{aligned} k\frac{q^2}{4l^2mg} &= \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}\\ &= \tan^3\theta\cos^2\theta = \frac{\tan^3\theta}{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{\tan^3\theta}{\frac{\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta}}\\ &= \frac{\tan^3\theta}{1+\tan^2\theta} \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación, se define (solo para simplificar la notación) $x \equiv \tan\theta$ y $a \equiv k\dfrac{q^2}{4l^2mg}$, quedando para resolver la ecuación

$$x^3 - ax^2 - a = 0 \tag{6}$$

Luego, $\theta = \arctan x$