Problema

Se tiene un disco de radio R cargado con una densidad de carga uniforme σ.

a) Calcular el campo eléctrico para todo punto del eje z.

b) Analizar los casos $z >> R$ y $z << R$.

Solución

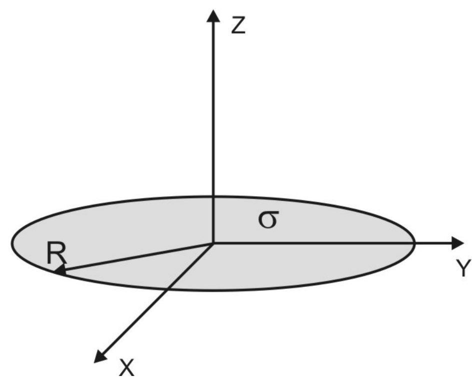

Figura 1: Configuración de cargas y sistema de referencia

a) Se calcula el campo eléctrico con la fórmula:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\forall\mathbf{r}'}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{1}$$

Para este problema en particular se tendrá:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (0,0,z)\\
\mathbf{r}' &= (\rho' cos\varphi', \rho' sen\varphi', 0)\\
\mathbf{r}-\mathbf{r}' &= (-\rho' cos\varphi', -\rho' sen\varphi', z)\\
|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3 &= (\rho'^2+z^2)^{3/2}\\
dq' &= \sigma ds' = \sigma\rho' d\rho' d\varphi'
\end{aligned}$$

Reemplazando en (1) resulta:

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{(-\rho' cos\varphi', -\rho' sen\varphi', z)\sigma\rho' d\rho' d\varphi'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}} \tag{2}$$

y separando por componentes queda:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{-\rho' cos\varphi'\sigma\rho' d\rho' d\varphi'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\frac{\rho'^2}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} cos\varphi' d\varphi' d\rho' = 0 \tag{3}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{-\rho' sen\varphi'\sigma\rho' d\rho' d\varphi'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\frac{\rho'^2}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} sen\varphi' d\varphi' d\rho' = 0 \tag{4}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{z\sigma\rho' d\rho' d\varphi'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\pi z\sigma\int_0^R\frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}} \tag{5}$$

resolvemos esta última integral por sustitución: $u = \rho'^2 + z^2 \Rightarrow du = 2\rho' d\rho' \Rightarrow$

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\frac{1}{2}\int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}} && (6) \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] && (7) \end{aligned}$$

b) i) Para $z >> R$, si simplemente planteamos

$$z >> R \Rightarrow \sqrt{R^2+z^2} \approx |z| \Rightarrow E_z(z) \approx 0 \qquad (8)$$

no podemos ver la forma funcional con la cual $E_z \to 0$, aún cuando el resultado es correcto. Se procede entonces de la siguiente manera: se reescribe el campo

$$\begin{aligned} E_z(z) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{|z|\sqrt{\left(\frac{R}{z}\right)^2 + 1}}\right] \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{z}\right)^2 + 1}}\right] \end{aligned}$$

como $\dfrac{R}{z} << 1$, se desarrolla en serie de Taylor la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ para $x \approx 0$ hasta el primer orden no nulo

$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

con lo cual queda

$$\begin{aligned} E_z(z) &\approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\left\{1 - \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2\right]\right\} \\ &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\mathrm{Sg}(z)\left(\frac{R}{z}\right)^2 \\ &= \mathrm{Sg}(z)\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

donde $\mathrm{Sg}(z) = \dfrac{z}{|z|} = \begin{cases} 1, & \text{si } z > 0 \\ -1, & \text{si } z < 0 \end{cases}$ es la función signo y $Q = \pi R^2 \sigma$ es la carga total del anillo.

ii) Para el caso $z << R$ si podemos aproximar en forma más simple

$$z << R \Rightarrow \sqrt{R^2+z^2} \approx R \Rightarrow \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R} \approx \frac{1}{|z|}$$

y resulta

$$E_z \approx \mathrm{Sg}(z)\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$