**Problema**

Para la configuración de la figura 1, con $\sigma(\rho) = A\rho^2 \frac{C}{m^2}$, donde $A > 0$ es una constante conocida.
Se pide calcular:

**a)** El campo eléctrico para todo punto del eje z.

**b)** El potencial electrostático para todo punto del eje z.

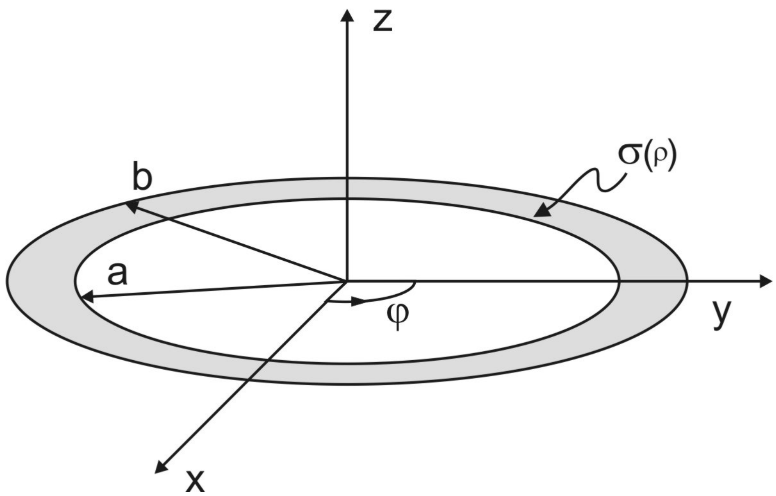


Figura 1:

**Solución**

**a)** Calculamos el campo electrostático por superposición, usando la fórmula

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\forall \mathbf{r'}} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r'})dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3} \tag{1}$$

En (1) las variables primadas (') indican puntos fuente y las sin primar puntos campo.
Para este problema en particular se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (0, 0, z) \\ \mathbf{r'} &= (\rho' cos\varphi', \rho' sen\varphi', 0) \\ dq' &= \sigma ds' = A\rho'^2 \rho' d\rho' d\varphi' = A\rho'^3 d\rho' d\varphi' \end{aligned}$$

Con lo cual resultan

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r'} &= (-\rho' cos\varphi', -\rho' sen\varphi', z) \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r'}| &= \sqrt{\rho'^2 + z^2} \end{aligned}$$

Reemplazando todo lo anterior en (1) se obtiene

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{(-\rho' cos\varphi', -\rho' sen\varphi', z)A\rho'^3 d\varphi' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

Se calculan fácilmente las componentes $E_x(z)$ y $E_y(z)$:

$$\begin{aligned} E_x(z) &= \frac{A}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{-\rho'^4 d\rho'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} cos\varphi' d\varphi' = 0 \\ E_y(z) &= \frac{A}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{-\rho'^4 d\rho'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} sen\varphi' d\varphi' = 0 \end{aligned}$$

Pero es más laborioso el cálculo de $E_z(z)$:

$$\begin{aligned} E_z(z) &= \frac{Az}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{-\rho'^4 d\rho'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi' \\ &= \frac{Az}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{-\rho'^4 d\rho'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Az}{2\epsilon_0}\left(\left[\sqrt{\rho'^2+z^2}+\frac{z^2}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}\right]_a^b\right) \\ &= \frac{Az}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{b^2+z^2}+\frac{z^2}{\sqrt{b^2+z^2}}-\sqrt{a^2+z^2}-\frac{z^2}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \end{aligned}$$

De modo que

$$\mathbf{E}(z) = \frac{Az}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{b^2+z^2}+\frac{z^2}{\sqrt{b^2+z^2}}-\sqrt{a^2+z^2}-\frac{z^2}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

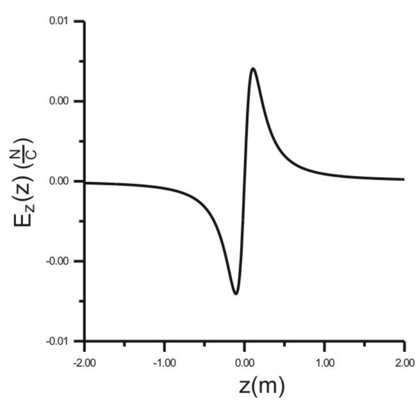


Figura 2: Gráfico de $E_z(z)$ con $\frac{A}{2\epsilon_0}=1$, $a=0{,}1m$ y $b=0{,}2m$

**b)** Tenemos dos formas de calcular la diferencia de potencial electrostático entre un punto $\mathbf{r}_{ref}$ (referencia o cero del potencial) y un punto cualquiera $\mathbf{r}$

**i)** Trayectoria del campo eléctrico

$$V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_{ref}) = -\int_{\mathbf{r}_{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

Entonces, tomando $V(z\to\infty)=0$

$$V(z) - V(z\to\infty) = -\int_\infty^z E(z')\hat{\mathbf{z}}\cdot dz'\hat{\mathbf{z}} = -\int_\infty^z E(z')dz'$$

$$
\begin{aligned}
V(z) &= -\int_{\infty}^{z} \frac{Az'}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{b^2+z'^2}+\frac{z'^2}{\sqrt{b^2+z'^2}}-\sqrt{a^2+z'^2}-\frac{z'^2}{\sqrt{a^2+z'^2}}\right)dz' \\
V(z) &= -\frac{A}{2\epsilon_0}\int_{\infty}^{z}\left(z'\sqrt{b^2+z'^2}+\frac{z'^3}{\sqrt{b^2+z'^2}}-z'\sqrt{a^2+z'^2}-\frac{z'^3}{\sqrt{a^2+z'^2}}\right)dz' \\
&= -\frac{A}{2\epsilon_0}\{[\frac{(b^2+z'^2)^{3/2}}{3}+\frac{(b^2+z'^2)^{3/2}}{3}-b^2\sqrt{b^2+z'^2}- \\
&\quad -\frac{(a^2+z'^2)^{3/2}}{3}-\frac{(a^2+z'^2)^{3/2}}{3}+a^2\sqrt{a^2+z'^2}]_{\infty}^{z}\} \\
&= -\frac{A}{2\epsilon_0}\left\{\left[2\frac{(b^2+z'^2)^{3/2}}{3}-b^2\sqrt{b^2+z'^2}-2\frac{(a^2+z'^2)^{3/2}}{3}+a^2\sqrt{a^2+z'^2}\right]_{\infty}^{z}\right\} \\
&= -\frac{A}{2\epsilon_0}\left\{\left[\sqrt{b^2+z'^2}\left(\frac{2}{3}(b^2+z'^2)-b^2\right)-\sqrt{a^2+z'^2}\left(\frac{2}{3}(a^2+z'^2)-a^2\right)\right]_{\infty}^{z}\right\} \\
&= -\frac{A}{6\epsilon_0}\left[\sqrt{b^2+z^2}(2z^2-b^2)-\sqrt{a^2+z^2}(2z^2-a^2)\right]
\end{aligned}
$$

Hay que mirar con más detalle en la expresión anterior el cálculo de

$$
\lim_{z\to\infty}\sqrt{b^2+z^2}(2z^2-b^2)-\sqrt{a^2+z^2}(2z^2-a^2)
$$

$z\to\infty$ significa en este caso $z\gg b$ y $z\gg a$ de modo que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{b^2+z^2} &\approx \sqrt{z^2}=|z| \\
2z^2-b^2 &\approx 2z^2 \\
\sqrt{a^2+z^2} &\approx \sqrt{z^2}=|z| \\
2z^2-a^2 &\approx 2z^2
\end{aligned}
$$

con lo cual se tiene

$$
\sqrt{b^2+z^2}(2z^2-b^2)-\sqrt{a^2+z^2}(2z^2-a^2)\approx|z|2z^2-|z|2z^2=0
$$

**ii)** Integral de superposición

$$
V(\mathbf{r})-V(\mathbf{r}_{ref}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\forall\mathbf{r'}}\frac{dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}+C
$$

donde la constante $C$ depende del punto elegido como $\mathbf{r}_{ref}$.
Utilizando para $\mathbf{r}$, $\mathbf{r'}$ y $dq'$ las mismas expresiones que para el cálculo del campo eléctrico, se llega a la integral

$$
\begin{aligned}
V(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{A\rho'^3d\varphi'd\rho'}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}+C \\
&= \frac{A}{2\epsilon_0}\int_a^b\frac{\rho'^3d\rho'}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}+C \\
&= \frac{A}{2\epsilon_0}\left\{\left[\frac{(\rho'^2+z^2)^{3/2}}{3}-z^2\sqrt{\rho'^2+z^2}\right]_a^b\right\}+C \\
&= \frac{A}{2\epsilon_0}\left\{\frac{(b^2+z^2)^{3/2}}{3}-z^2\sqrt{b^2+z^2}-\frac{(a^2+z^2)^{3/2}}{3}+z^2\sqrt{a^2+z^2}\right\}+C \\
&= \frac{A}{2\epsilon_0}\left\{\sqrt{b^2+z^2}\left(\frac{b^2+z^2}{3}-z^2\right)-\sqrt{a^2+z^2}\left(\frac{a^2+z^2}{3}-z^2\right)\right\}+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\epsilon_0}\left\{\sqrt{b^2+z^2}\left(\frac{b^2-2z^2}{3}\right)-\sqrt{a^2+z^2}\left(\frac{a^2-2z^2}{3}\right)\right\}+C \\
&= -\frac{A}{6\epsilon_0}\left[\sqrt{b^2+z^2}(2z^2-b^2)-\sqrt{a^2+z^2}(2z^2-a^2)\right]+C
\end{aligned}
$$

En esta última expresión vemos que para que $V(z\to\infty)=0$ deberá ser $C=0$