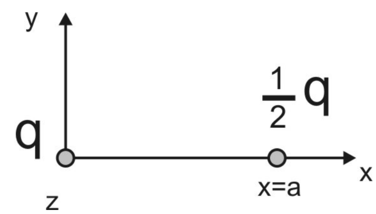
Problema

Dos cargas puntuales, $-q$ y $\frac{1}{2}q$ se sitúan en el origen y en el punto $(a, 0, 0)$ respectivamente. ¿En que punto del eje x se anula el campo eléctrico?

Solución

El campo eléctrico en un punto cualquiera del eje x será:
$\mathbf{E}(x, 0, 0) = \mathbf{E}_1(x, 0, 0) + \mathbf{E}_2(x, 0, 0)$.
donde $\mathbf{E}_1$ es el campo debido a la carga en el origen y $\mathbf{E}_2$ es el campo debido a la carga restante.



Cada uno de los campos se calculará a partir de la ley de Coulomb:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kq\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

donde q es la carga fuente del campo eléctrico, $\mathbf{r}'$ es su posición (punto fuente), $\mathbf{r}$ es el punto donde se calcula el campo (punto campo) y $k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, siendo ϵ_0 la permitividad del vacío.

$\mathbf{E}_1$**:**

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, 0, 0) \\ \mathbf{r}'_1 &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{E}_1(x, 0, 0) &= -\frac{kq}{|x|^3}(x, 0, 0) \end{aligned}$$

$\mathbf{E}_2$**:**

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, 0, 0) \\ \mathbf{r}'_2 &= (a, 0, 0) \\ \mathbf{E}_2(x, 0, 0) &= \frac{kq}{2|x-a|^3}(x-a, 0, 0) \end{aligned}$$

Luego, el campo total es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, 0, 0) &= -\frac{kq}{|x|^3}(x, 0, 0) + \frac{kq}{2|x-a|^3}(x-a, 0, 0) \\ &= kq(-\frac{x}{|x|^3} + \frac{x-a}{2|x-a|^3}, 0, 0) \end{aligned}$$

Entonces, será $\mathbf{E}(x, 0, 0) = \mathbf{0}$ en el punto $x/$

$$-\frac{x}{|x|^3} + \frac{x-a}{2|x-a|^3} = 0 \tag{1}$$

Para resolver la ecuación (1) hay que analizar con cuidado el signo de las magnitudes con módulo. Se pueden presentar tres casos:

$x < 0$ **:** en este caso,

$$\begin{aligned}|x| &= -x \Rightarrow |x|^3 = -x^3 \\ |x-a| &= -(x-a) \Rightarrow |x-a|^3 = -(x-a)^3\end{aligned}$$

con lo cual hay que resolver

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2(x-a)^2} = 0 \Rightarrow (\frac{x-a}{x})^2 = \frac{1}{2}$$

i)

$$\frac{x-a}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

pero esta solución es incompatible con la condición $x < 0$

ii)

$$\frac{x-a}{x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

y ocurre lo mismo que en i)

$0 < x < a$ **:**

$$\begin{aligned}|x| &= x \Rightarrow |x|^3 = x^3 \\ |x-a| &= -(x-a) \Rightarrow |x-a|^3 = -(x-a)^3\end{aligned}$$

con lo cual hay que resolver

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2(x-a)^2} = 0$$

donde puede verse que la expresión del lado izquierdo será < 0 $\forall x$, de modo que la ecuación no tiene solución.

$x > a$ **:**

$$\begin{aligned}|x| &= x \Rightarrow |x|^3 = x^3 \\ |x-a| &= x-a \Rightarrow |x-a|^3 = (x-a)^3\end{aligned}$$

con lo cual hay que resolver

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(x-a)^2} = 0 \Rightarrow (\frac{x-a}{x})^2 = \frac{1}{2}$$

i)

$$\frac{x-a}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

siendo esta solución compatible con la condición $x > a$

ii)

$$\frac{x-a}{x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

pero esta solución es incompatible con la condición $x > a$