

ELECTROSTÁTICA

Este capítulo constituye un pre-apunte (o sea, no llega a ser un apunte) cuya única función es facilitar la redacción de los apuntes en clase por parte del alumno. Contiene gráficos, formulas y explicaciones muy elementales de los contenidos que se dictan en la clase teórica a mi cargo, de forma que los participantes de la misma puedan completar en los espacios en blanco lo que consideren necesario. De ninguna manera reemplazan la bibliografía sugerida y se debe tener en cuenta que no han sido corregidos exhaustivamente

ELECTROSTÁTICA Interacciones eléctricas de cargas en reposo

Interacciones: acciones a distancia (Excluimos las de contacto)

Existen 4 interacciones (conocidas) en la naturaleza

gravitatoria (peso, cuerpos celestes; dominante a escala cosmos)

electromagnética (átomos y moléculas, uniones químicas)

nuclear fuerte (cohesión nuclear)

nuclear débil (emisión β radiactiva)

todas las demás son interacciones de contacto

La más conocida: Interacción gravitatoria: expresada por la existencia de fuerzas atractivas entre cuerpos

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

F depende solo de m_i y r

F siempre atractiva

Interacciones eléctricas

Se observa que experimentalmente que

algunos cuerpos interactúan entre sí con $F \neq F_G$

esas interacciones son atractivas o repulsivas ($\neq F_G$)

dependen de una propiedad llamada carga eléctrica (q)

decaen con r de acuerdo a $1/r^2$

O sea

$$F \propto q_1 q_2$$

q_i : cargas puntuales

\vec{F} en dirección $q_1 - q_2$, y $\rightarrow \leftarrow \circ \leftarrow \rightarrow$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Ley de Coulomb

$$\vec{F} \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}$$

++ Repulsiva

-- Repulsiva

+ - Atractiva

Carga eléctrica (q)

Masa: magnitud física, “medida de la cantidad de materia”

En realidad

$$m = \frac{F}{a}$$

Magnitudes físicas: características cuantificables mediante procesos de medición definidos (mediciones objetivas)

Ej.: longitud, masa, conductividad térmica, calor específico, emisividad, dureza, elasticidad, resistencia a la tracción,

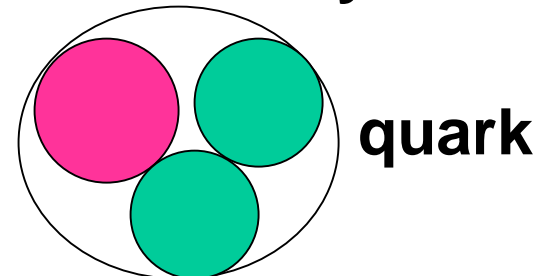
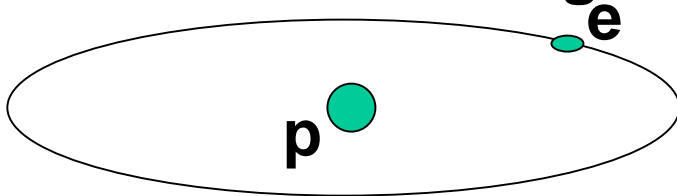
Ej. de características que no lo son: belleza, simpatía, actualidad, valor, interés, influencia,.....

Importancia!

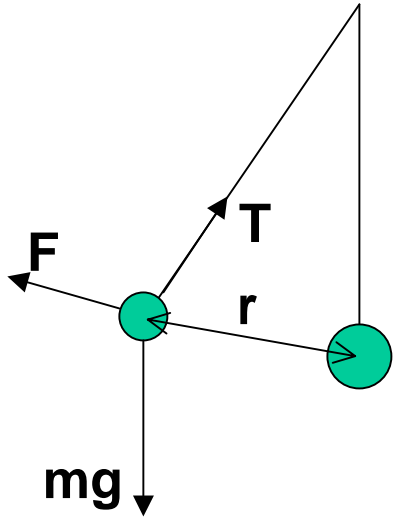
Que es q?

Magnitud física causante de F eléctrica

“Ubicación” de la carga eléctrica? A nivel atómico y nuclear



Como medir q? Por su relación con magnitudes conocidas



$$q \propto r \sqrt{F}$$

Como F atractiva o repulsiva => 2 tipos de q (\pm)

Cuerpo cargado: por desbalance de cargas
(carga electrostática)

Necesidad de unidades $1u = 1m \sqrt{1N}$? Otra + útil (C)

1C a 1m de 1C => F = $9 \cdot 10^9$ N

$$\vec{F} = K \frac{q q}{r^2} \vec{r} \quad K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$$

Carga electrón (e): $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C = - carga protón

Carga mínima medida



“nombre” de la carga define el sentido de la fuerza actuando como signo matemático en la ley de Coulomb

Valores compartivos

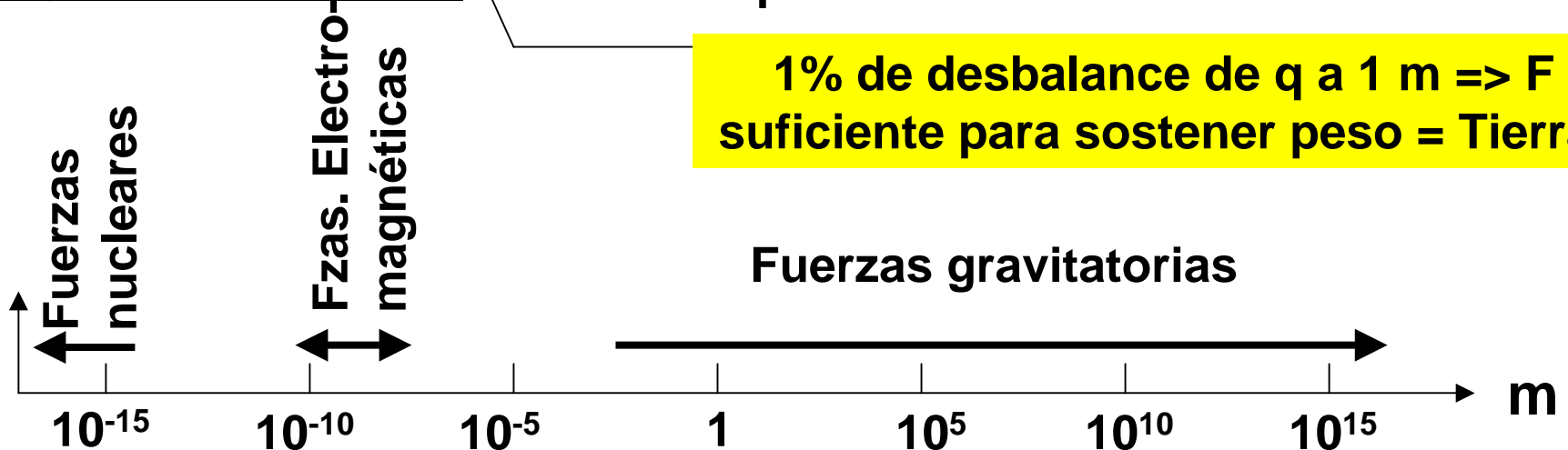
Comparación entre F eléctrica y Fuerza gravitatoria

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{10^{-10}}}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{(9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27})}{10^{-10}}} = 1,38 \cdot 10^{39} \quad !!!$$

A escala cósmica domina la F_G y a escala atómica, la F_E ; que pasa?

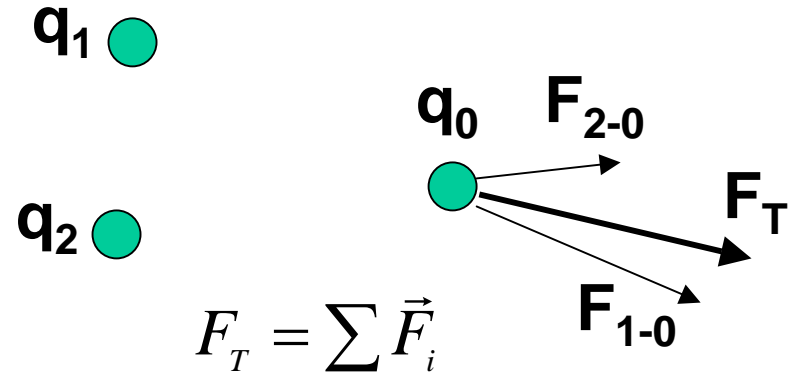
A medida que se acumula masa para formar planetas, estrellas y galaxias se acumula fuerza gravitatoria pero se compensa fuerza eléctrica pues átomos son neutros

Rangos de dominio

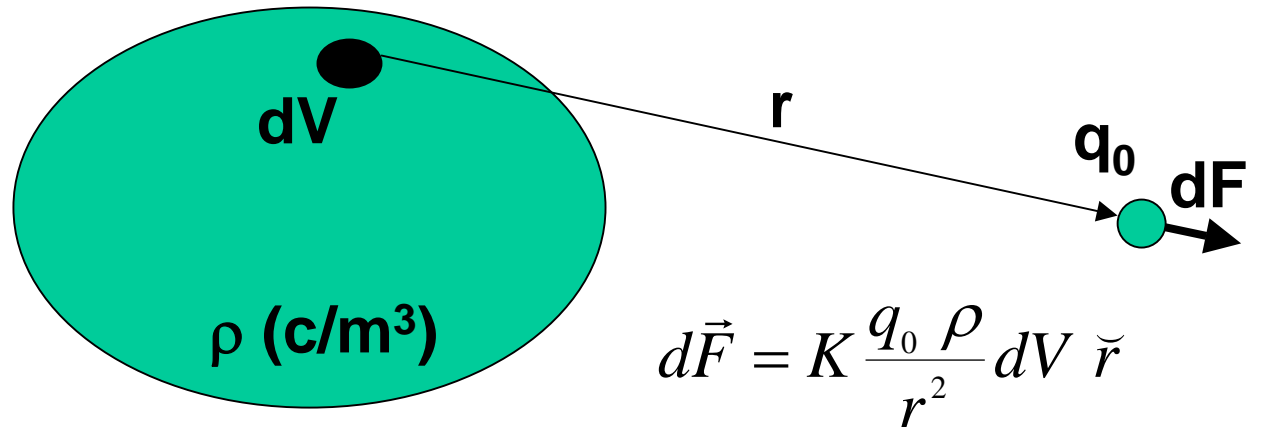


Principio de superposición

Cargas puntuales



Cargas distribuidas



$$d\vec{F} = K \frac{q_0 \rho}{r^2} dV \vec{r}$$

$$\vec{F} = \int_V K \frac{q_0 \rho}{r^2} dV \vec{r}$$

Ejemplos

Hilo infinito

λ C/m

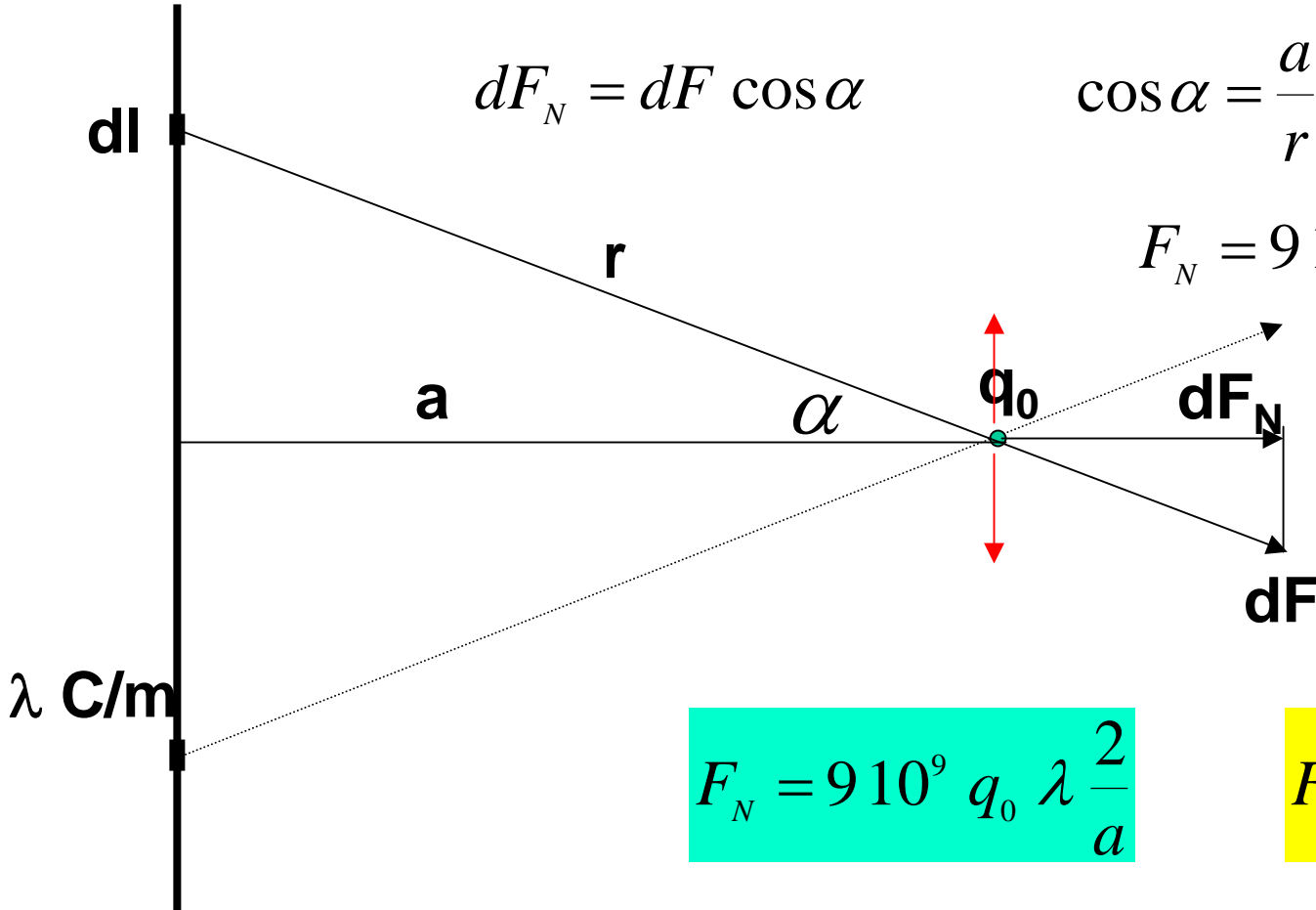
$$d\vec{F} = K \frac{q_0 \rho}{r^2} dV \vec{r} \quad \vec{F} = \int_l 9 \cdot 10^9 \frac{q_0 \lambda}{r^2} dl \vec{r}$$

Componentes // al hilo se anulan

$$dF_N = dF \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}$$

$$F_N = 9 \cdot 10^9 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_0 \lambda a dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$$



$$F_N = 9 \cdot 10^9 q_0 \lambda \frac{2}{a}$$

$$F_N \propto \frac{1}{a}$$

Plano infinito uniformemente cargado

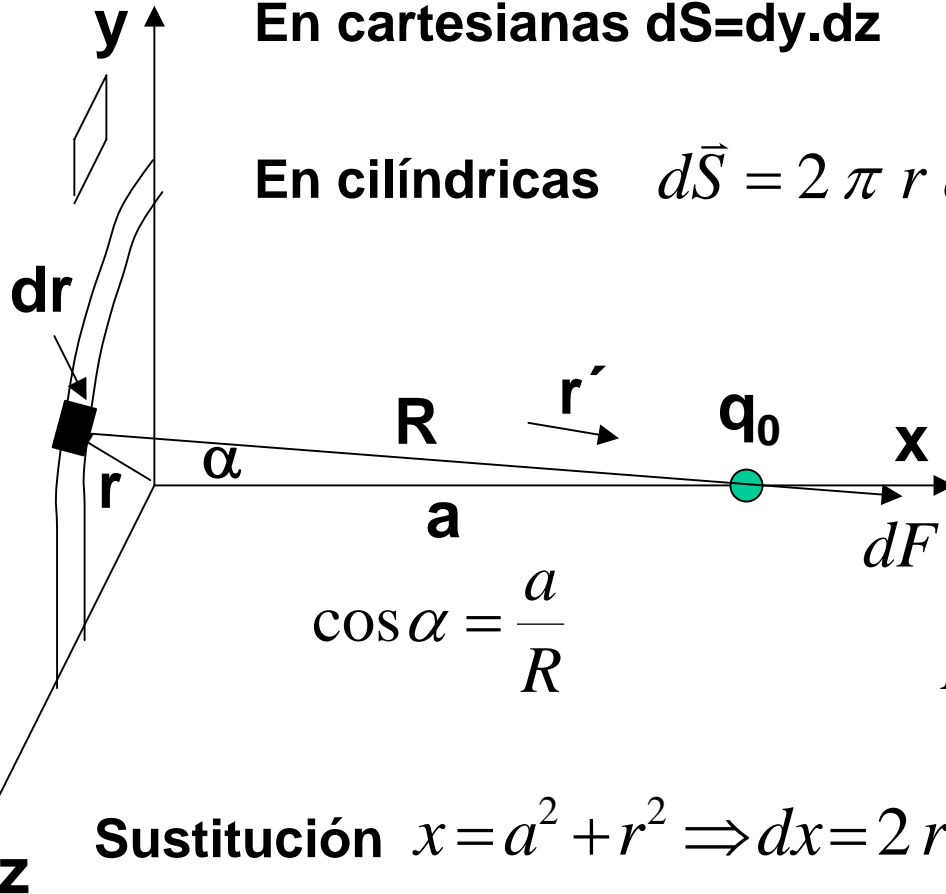
plano yz con σ C/m²

En cartesianas $dS=dy.dz$

$$\vec{F} = 9 \cdot 10^9 \iint_{yz} q_0 \sigma \frac{dy dz}{r'^2} \vec{r}'$$

En cilíndricas $d\vec{S} = 2 \pi r dr$

Componentes // plano se anulan



$$F_N = 9 \cdot 10^9 \int_0^{\infty} q_0 \sigma \frac{2 \pi r dr}{R^2} \frac{a}{R}$$

$$F_N = 9 \cdot 10^9 q_0 \sigma 2 \pi a \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{R}$$

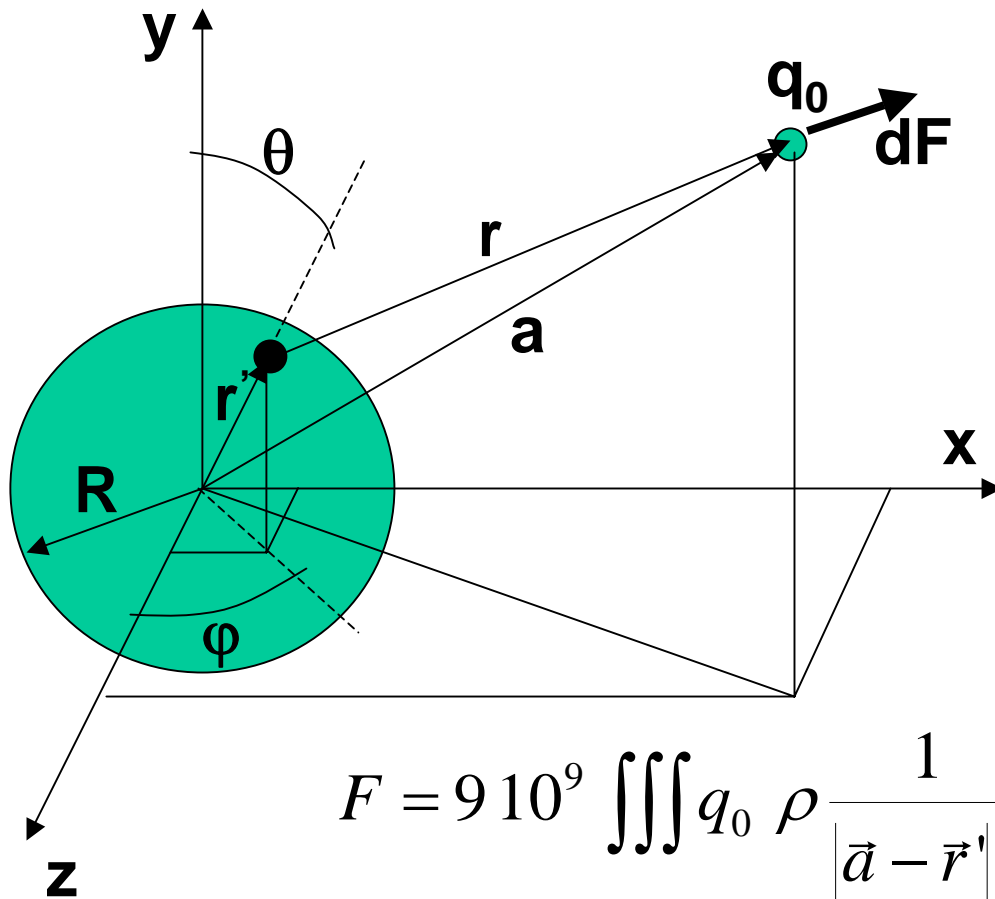
Sustitución $x = a^2 + r^2 \Rightarrow dx = 2 r dr$

$$\int_0^{\infty} \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}$$

$$F_N = 9 \cdot 10^9 2 \pi \sigma q_0$$

F_N independiente de a

Esfera uniformemente cargada (ρ C/m³)



$$dV = r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\varphi$$

$$dF = 9 \cdot 10^9 \frac{q_0 \rho dV}{r^2}$$

$$F = 9 \cdot 10^9 \iiint q_0 \frac{\rho}{r^2} dV$$

$$r^2 = r'^2 + a^2 - r' a \cos(\theta)$$

$$F = 9 \cdot 10^9 \iiint q_0 \rho \frac{1}{|\vec{a} - \vec{r}'|^2} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\varphi$$

$$\iiint \frac{1}{|\vec{a} - \vec{r}'|^2} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{a^2}$$

$$F = 9 \cdot 10^9 \rho q_0 \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{a^2} \vec{a}$$

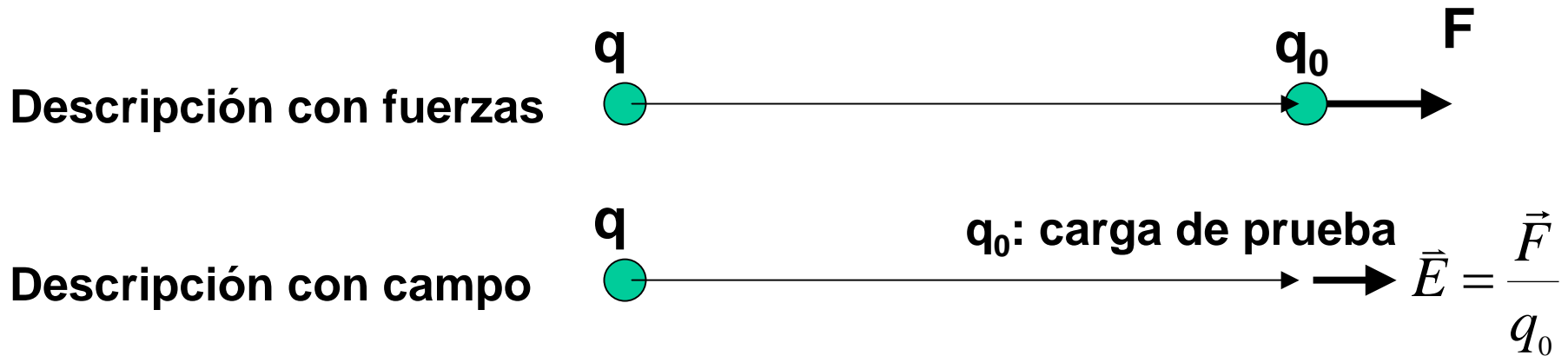
$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho = Q$$

Es la misma fuerza que ejercería toda la carga de la esfera (Q) concentrada en el origen

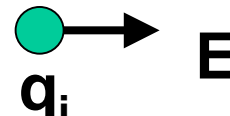
Campo eléctrico

Si cargas quietas, ley de fuerza de Coulomb es sencilla, pero si cargas en movimiento las relaciones son complicadas por el retardo de la interacción (“viaja” a velocidad finita de $\sim 300.000\text{Km/s}$) y por la aceleración

Conviene expresar la electrodinámica a partir del concepto de Campo eléctrico (y magnético)



E: intermediario de la interacción eléctrica

$$\vec{F} = q_i \vec{E}$$


Definición de campo eléctrico

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Para que q_0 no modifique distribución de carga generadora

$$[E] = \frac{N}{C}$$

Así, E producido por una carga o una distribución de cargas, puede pensarse como una propiedad del espacio

En general, Campo es toda magnitud física que toma un valor definido en cada punto del espacio

Ejemplos de campos escalares: de temperatura, de alturas, de presiones,...

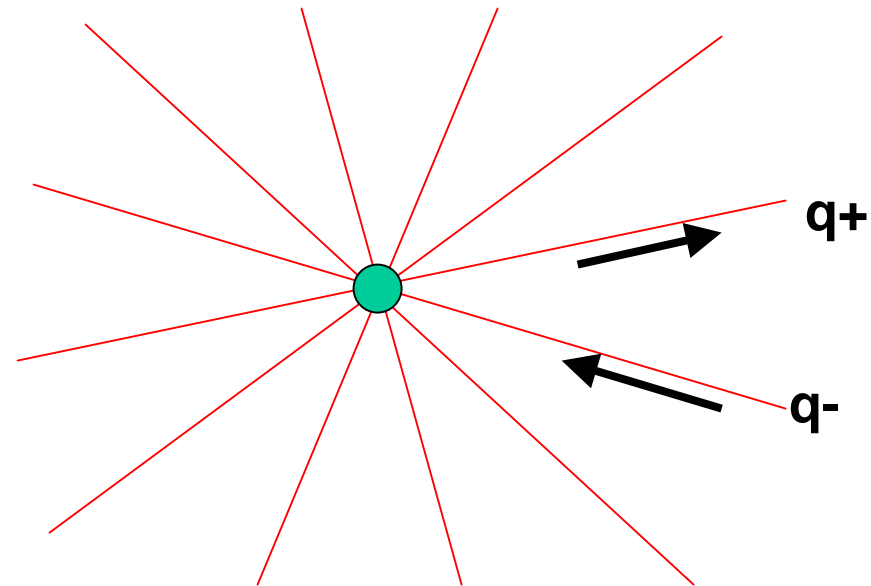
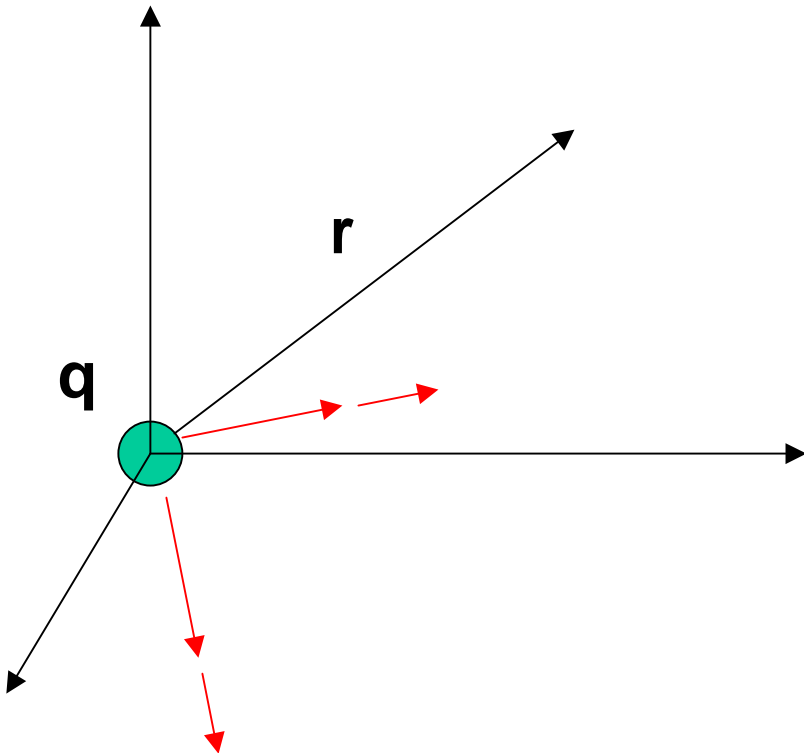
Ejemplos de campos vectoriales: gravitatorio, eléctrico, de velocidades, magnético,....

Ejemplos de cálculo de campo eléctrico

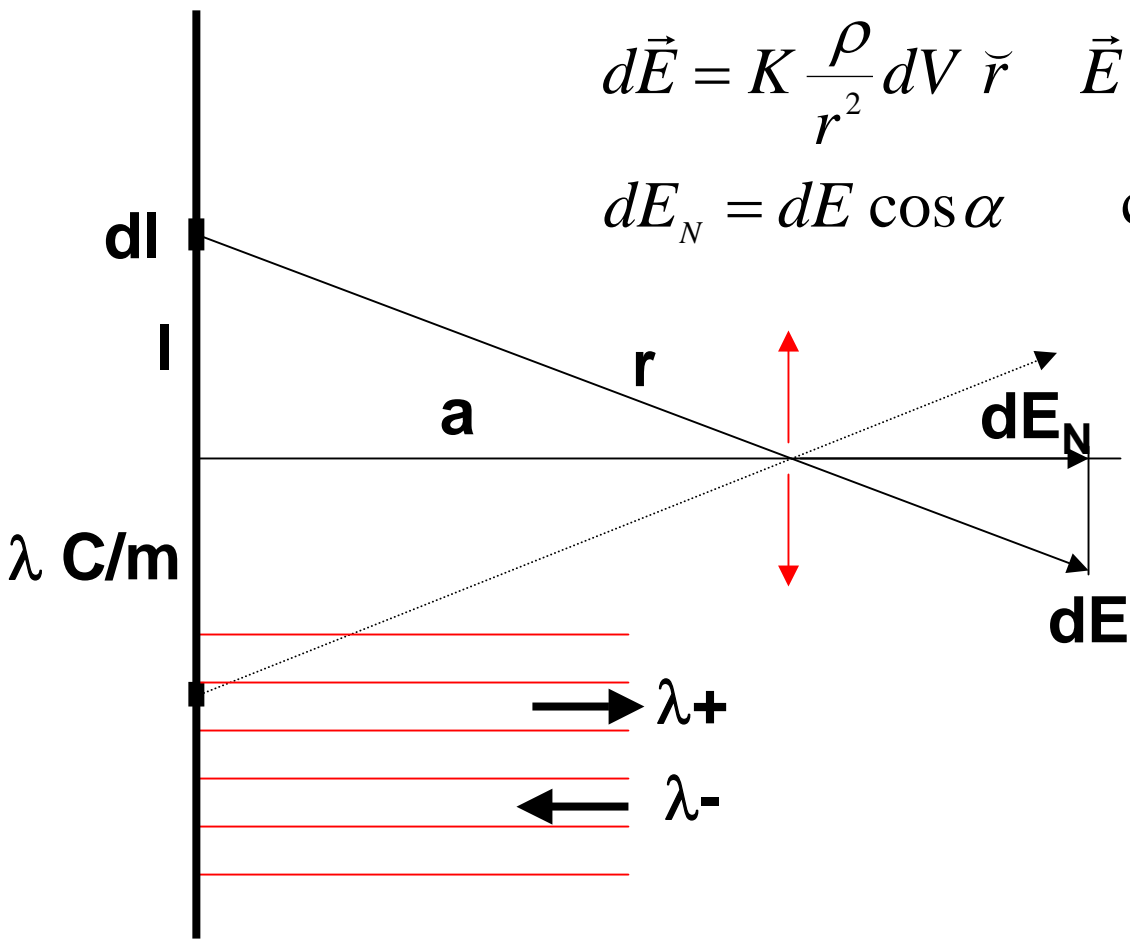
Cargas puntuales:

$$\vec{E} = K \frac{q q_0}{r^2} \frac{1}{q_0} \vec{r} = K \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

Líneas de campo: puntos geométricos tangentes al vector E



Hilo infinito con densidad lineal de carga λ (C/m)



$$d\vec{E} = K \frac{\rho}{r^2} dV \vec{r} \quad \vec{E} = \int_V 9 \cdot 10^9 \frac{\lambda}{r^2} dl \vec{r}$$

$$dE_N = dE \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}$$

$$E_N = 9 \cdot 10^9 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda a dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$$

$$E_N = 9 \cdot 10^9 \lambda \frac{2}{a}$$

$$E_N \propto \frac{1}{a}$$

Plano infinito uniformemente cargado (plano yz con σ C/m²)

En cartesianas $dS=dy.dz$ $\vec{E} = 9 \cdot 10^9 \iint_{yz} \sigma \frac{dy dz}{r'^2} \vec{r}'$

En cilíndricas $d\vec{S} = 2 \pi r dr$

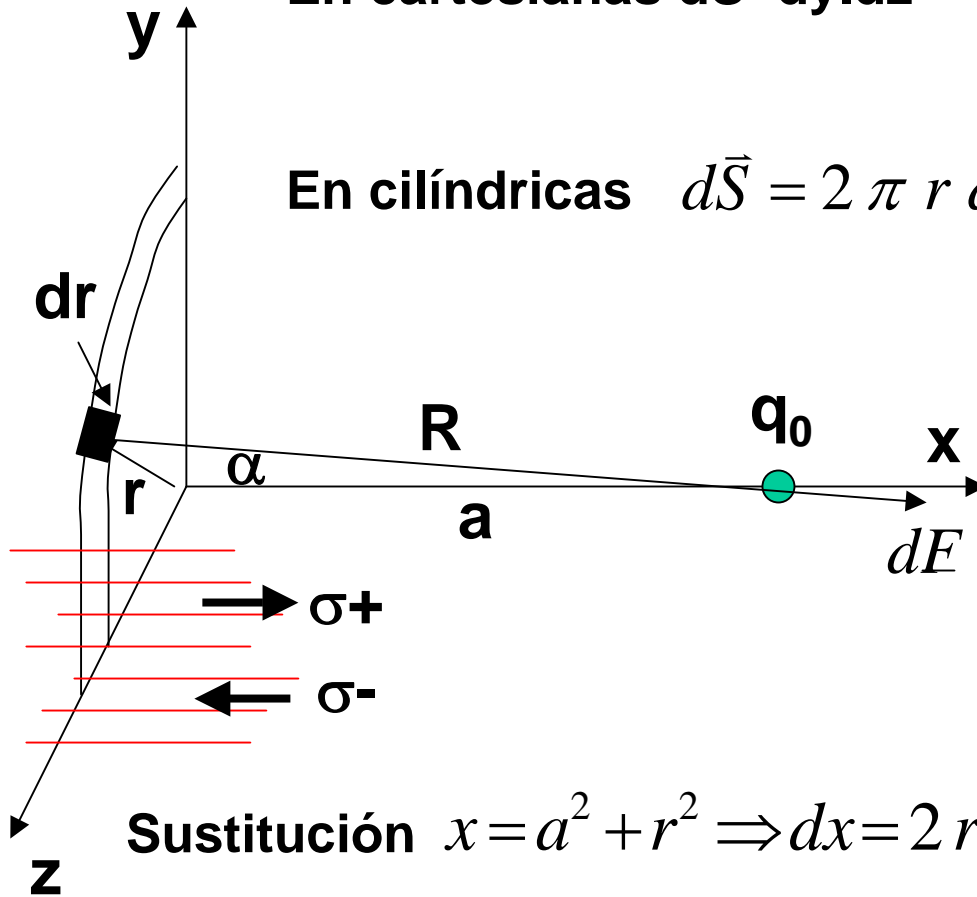
Componentes // plano se anulan

$$\cos \alpha = \frac{a}{R}$$

$$E_N = 9 \cdot 10^9 \int_0^\infty \sigma \frac{2 \pi r dr}{R^2} \frac{a}{R}$$

$$E_N = 9 \cdot 10^9 \sigma 2 \pi a \int_0^\infty \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}$$

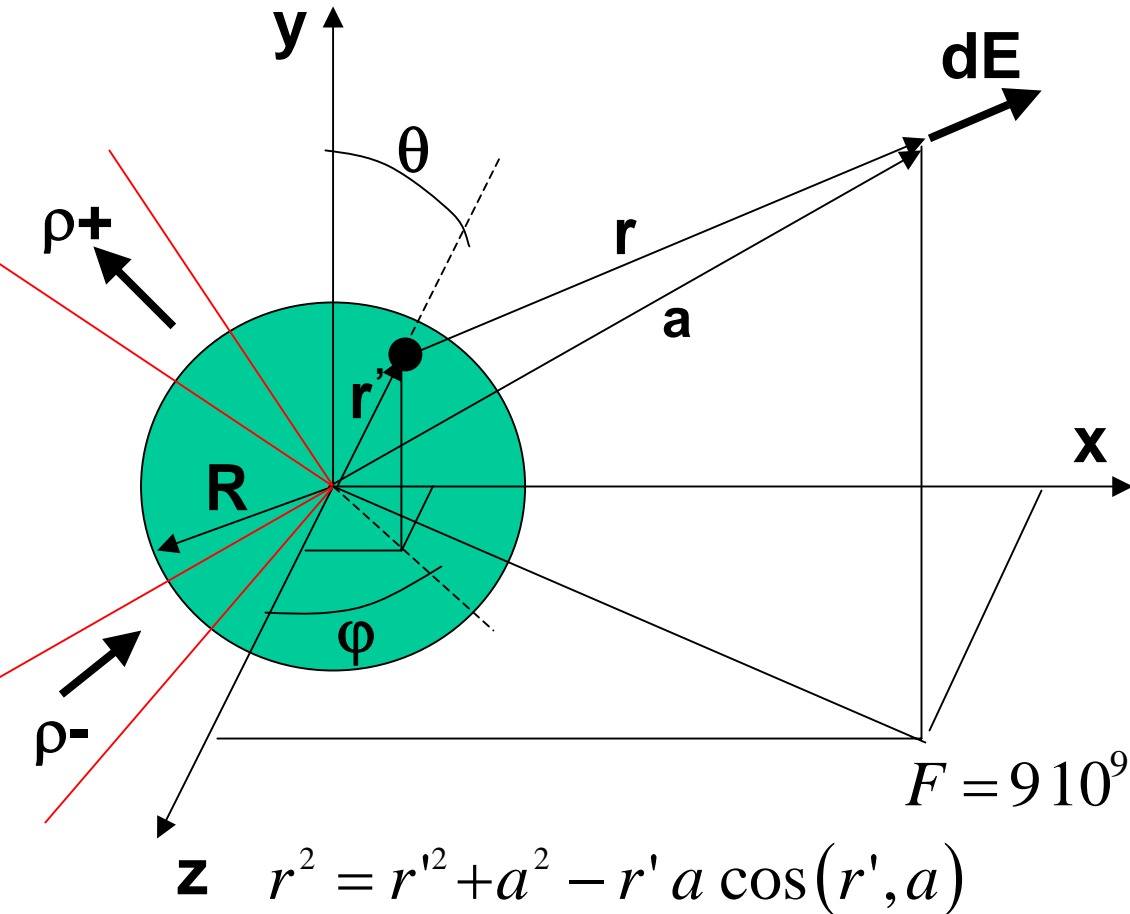


Sustitución $x = a^2 + r^2 \Rightarrow dx = 2 r dr$

$$E_N = 9 \cdot 10^9 2 \pi \sigma$$

E_N independiente de a

E en exterior de esfera uniformemente cargada (ρ C/m³)



$$dV = r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi$$

$$r > R \quad dE = 9 \cdot 10^9 \frac{\rho dV}{r^2}$$

$$E = 9 \cdot 10^9 \iiint \frac{\rho}{r^2} dV$$

$$F = 9 \cdot 10^9 \iiint \rho \frac{1}{|\vec{a} - \vec{r}'|^2} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi$$

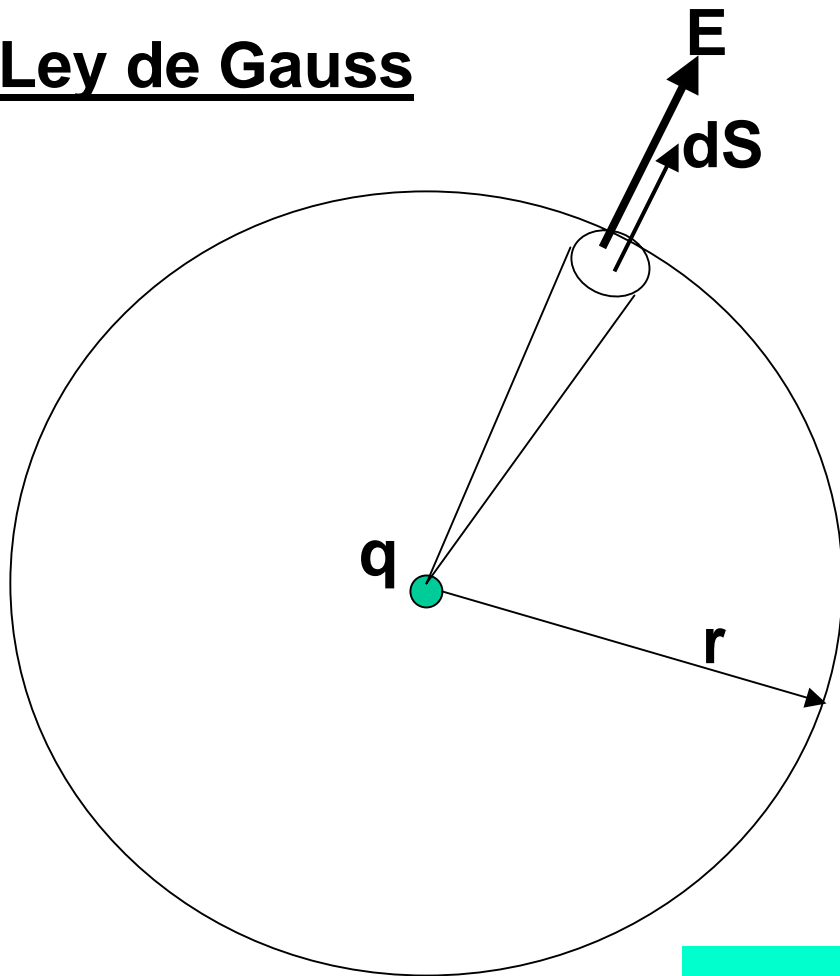
$$\iiint \frac{1}{|\vec{a} - \vec{r}'|^2} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{a^2}$$

$$E = 9 \cdot 10^9 \rho \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{a^2}$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho = Q$$

Es el mismo campo que crearía toda la carga de la esfera (Q) concentrada en el origen

Ley de Gauss



E en r $E = 9 \cdot 10^9 \frac{q}{r^2}$

si $9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \implies$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$$

ϵ_0 : permitividad en vacío

$$E = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \implies E \cdot 4 \pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

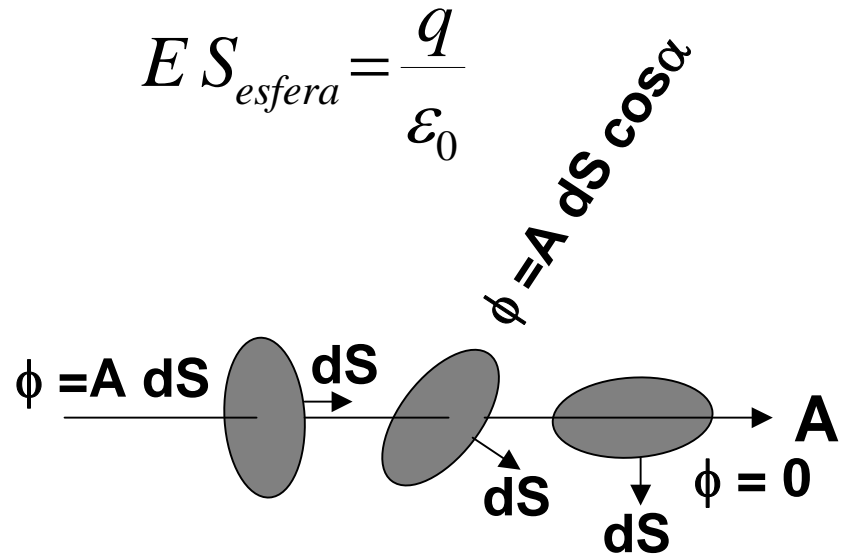
$$E S_{esfera} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En la forma mas general

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

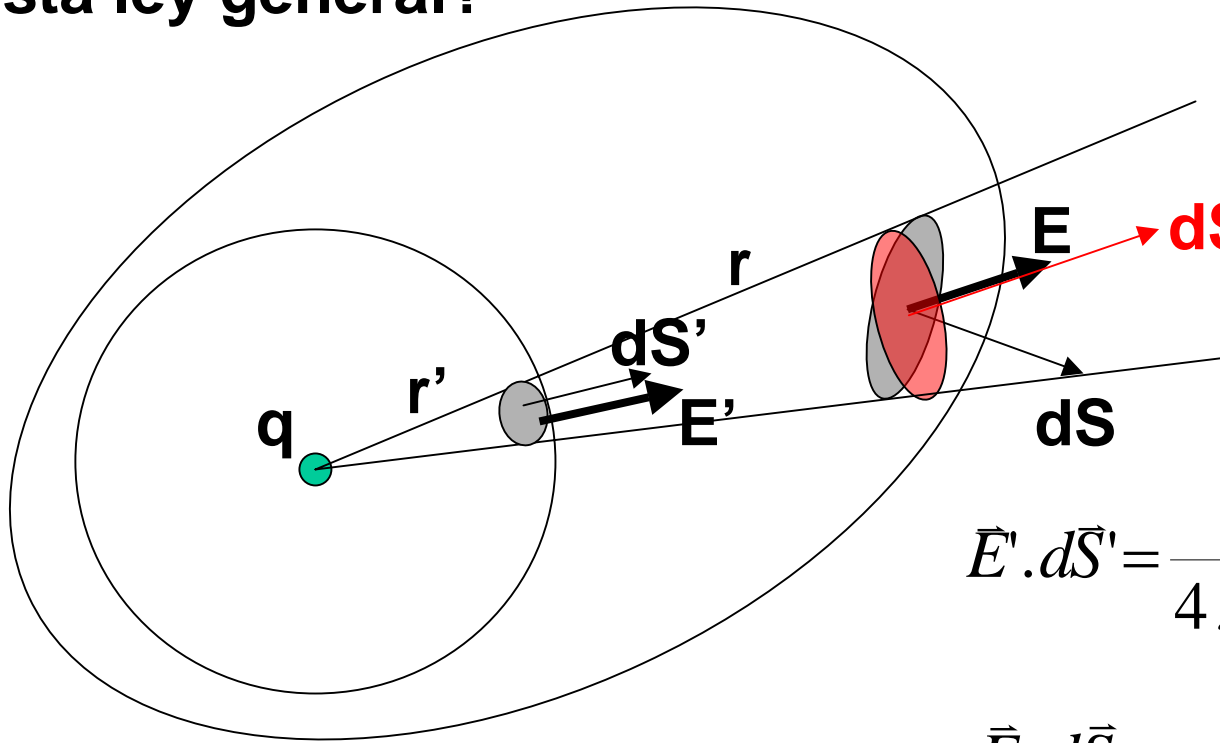
Flujo de un vector

$$\Phi = \iint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



Es esta ley general?

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Ley de Gauss

$$\vec{E}' \cdot d\vec{S}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \vec{r}' \cdot d\vec{S}'$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{\vec{r}' \cdot d\vec{S}'}{r'^2} = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} \Rightarrow \oiint \vec{E}' \cdot d\vec{S}' = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

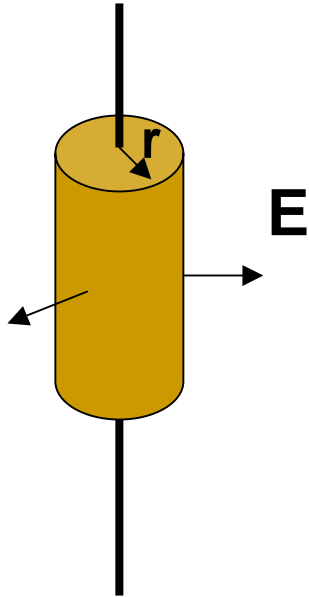
Vale para cualquier superficie cerrada

El flujo del vector campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada por esa superficie dividida por la permitividad en vacío

Ley de Gauss: una de las cuatro ecuaciones de Maxwell

Asemás: útil para calcular E en situaciones de alta simetría

Hilo infinito cargado con λ C/m

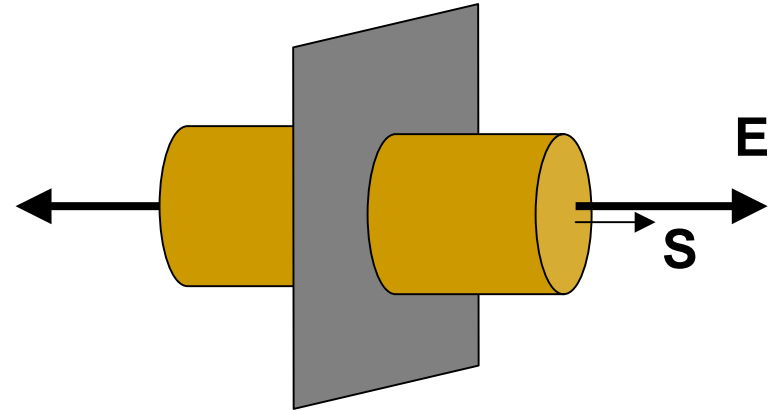


$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Plano infinito con σ C/m²

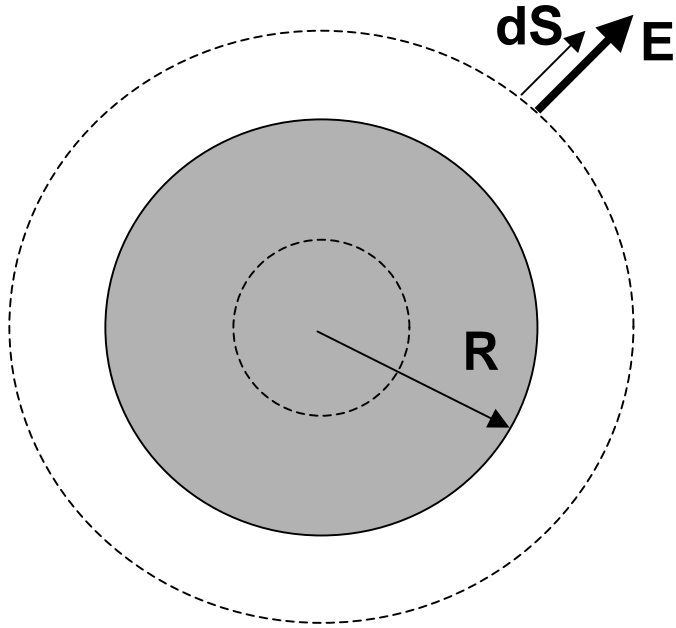


$$E 2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Se pueden excluir las cargas externas a la sup. gaussiana en el cálculo de E porque si el hilo o el plano son infinitos E solo tiene componentes normales a ellos

Esfera cargada uniformemente en volumen ρ (C/m³)



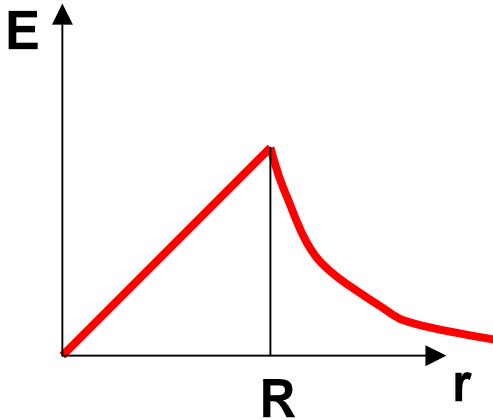
$$r > R \quad E 4 \pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}$$

$$r < R \quad E 4 \pi r^2 = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{r \rho}{3 \epsilon_0}$$

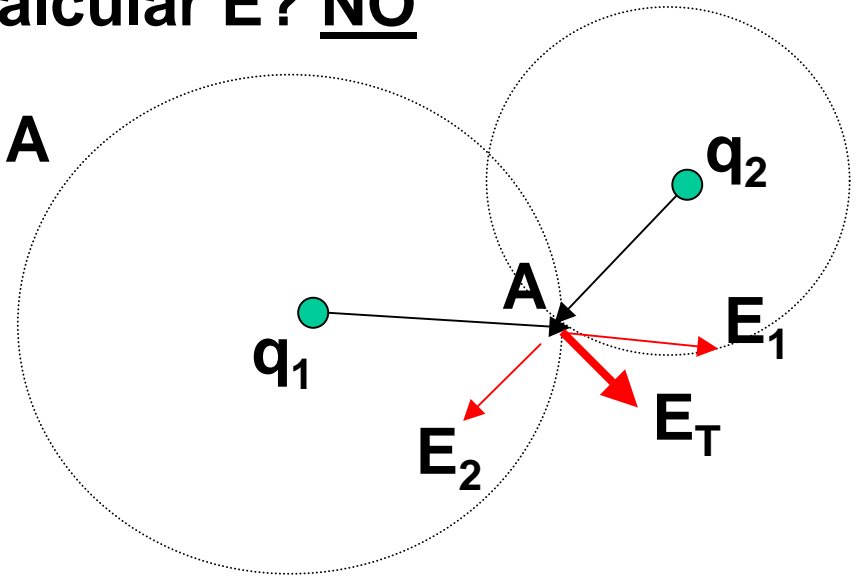
$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$



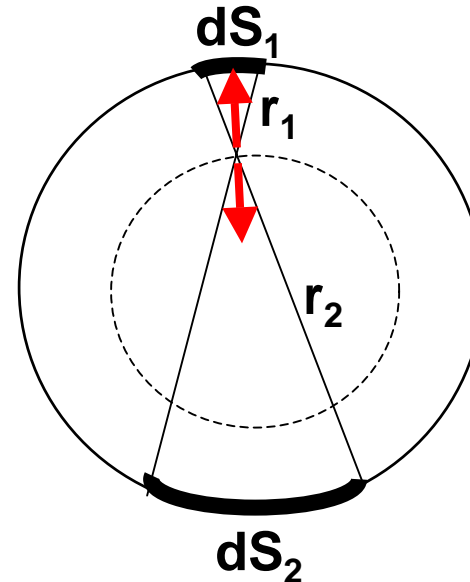
Es esta una forma general de calcular E? **NO**

Ej: E de 2 cargas puntuales en A

E total en A no lo puedo calcular solo usando Gauss con alguna de las cargas



Solo en caso de simetría se puede calcular el E_T usando parte de la distribución de cargas



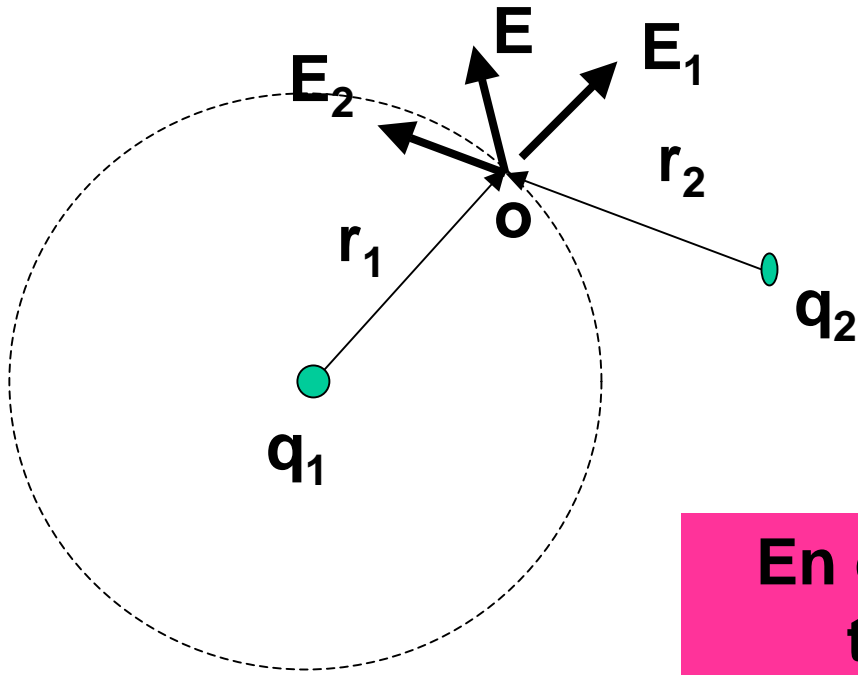
$$dE = K \frac{\sigma dS}{r^2}$$

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$$

Por ejemplo en la esfera, por que se usan solo las cargas interiores a la superficie de integración?

Las cargas "exteriores" a sup. de integración compensan efectos

Empleo de la ley de Gauss para cálculo de E total: caso de 2 cargas



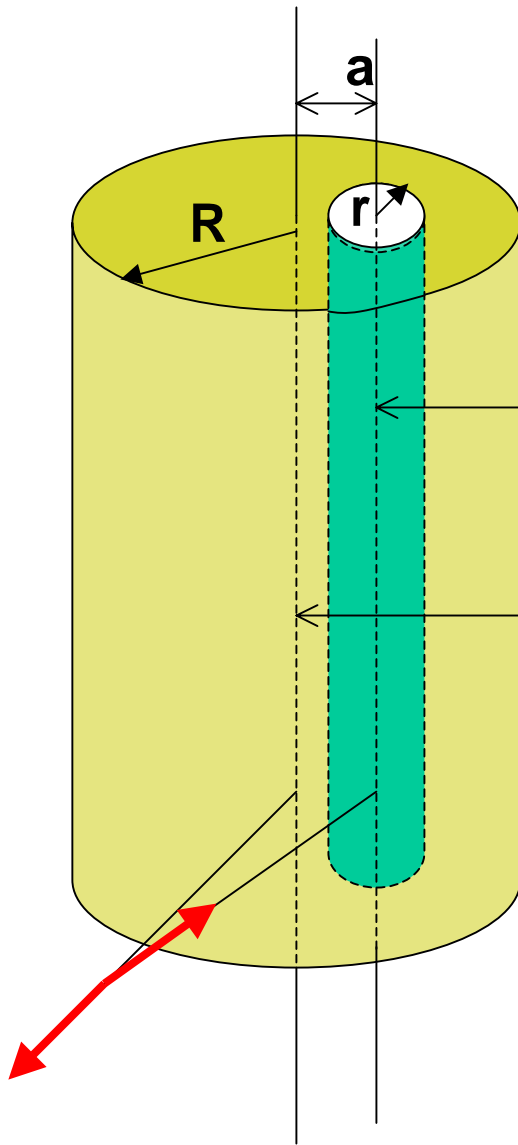
$$E_1 4 \pi r_1^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2}$$

En el punto O el campo total es E y no E_1

En casos de alta simetría, las cargas “exteriores” a la superficie gaussiana se compensan por lo que se puede calcular el E total considerando solo las cargas encerradas en ella. Pero en caso de falta de simetría, el campo total usando Gauss debe calcularse por superposición, o sea, en este caso calculando también E_2 por Gauss y componiendo

Cálculo de E por superposición en geometrías complicadas



$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho \pi R^2 l}{2 \pi b l \epsilon_0}$$

$$E' = \frac{-\rho \pi r^2 l}{2 \pi (b-a) l \epsilon_0}$$

$$\vec{E}' \quad \vec{E}$$

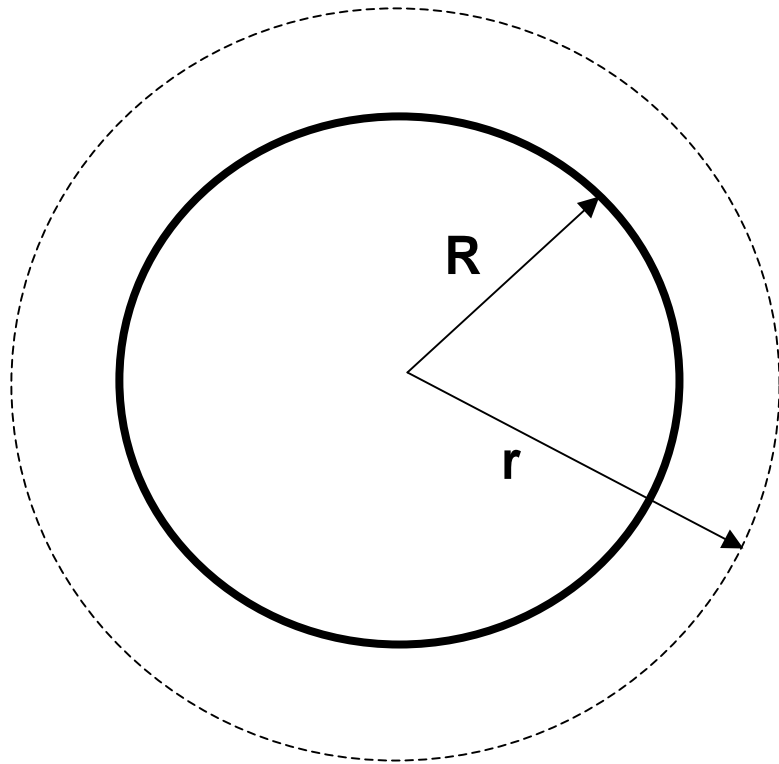
$$E_T = E - E'$$

$$\Rightarrow \vec{E}_T$$

Ojo!

$$\vec{E}_T = \vec{E} - \vec{E}'$$

Esfera uniformemente cargada en superficie σ (C/m²)



$$Q = 4 \pi R^2 \sigma$$

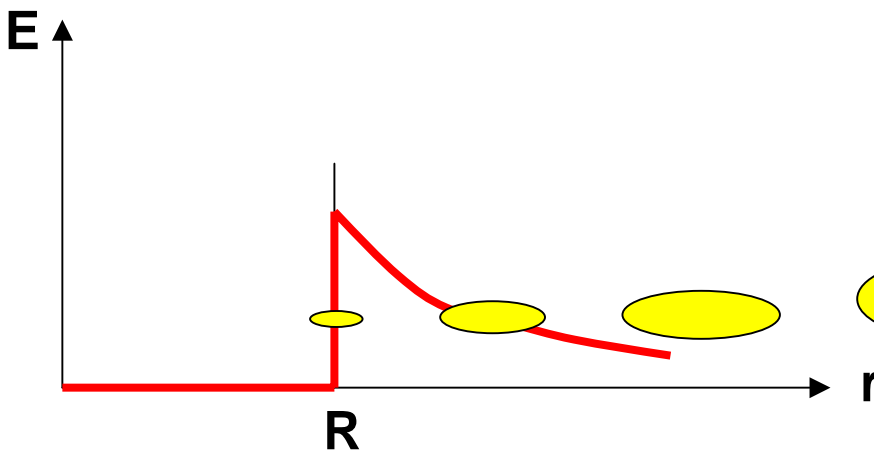
$$r > R \quad E 4 \pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$r < R \quad E = 0$$

$$r > R \quad \vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}$$

Igual al producido por Q en el origen

$$r < R \quad E = 0$$

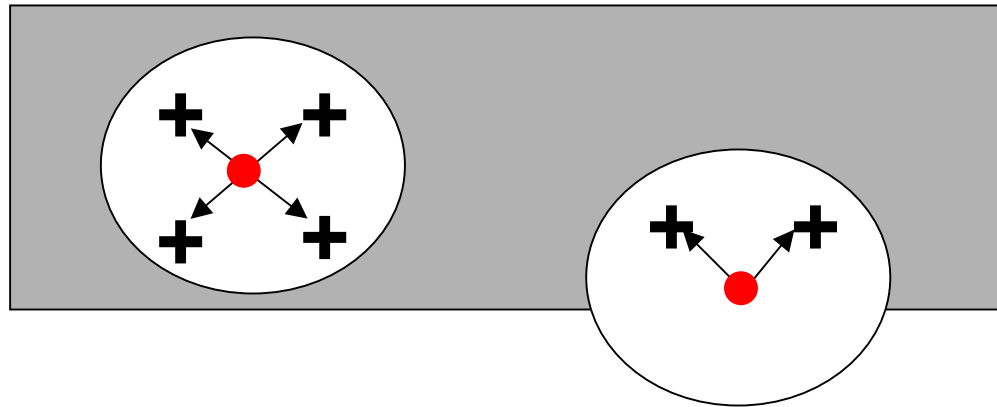


Significado de la discontinuidad

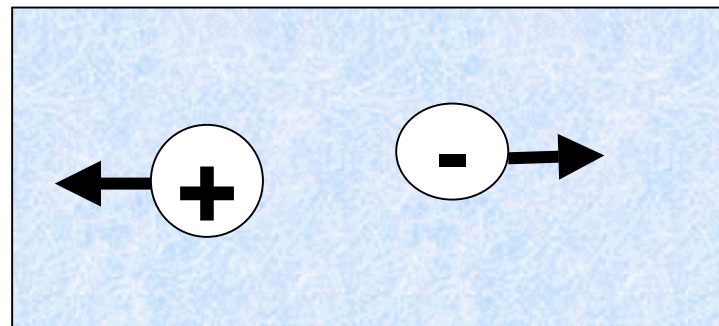
Distinto tipo de comportamiento eléctrico de los materiales

Conductores: Son aquellos que permiten el movimiento de las cargas eléctricas en su interior (electrones débilmente ligados de órbitas exteriores en metales o iones)

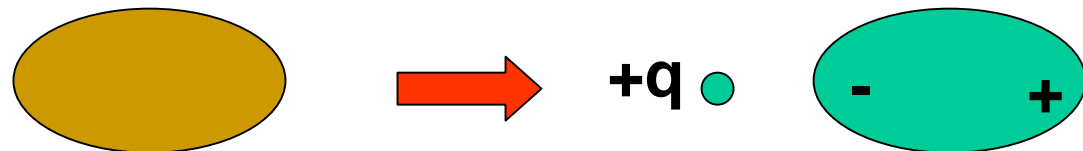
Metales



Electrolitos



Polarización



Aislantes o dieléctricos: materiales que por el tipo de uniones químicas no presentan portadores libres (cargas con capacidad de desplazarse)

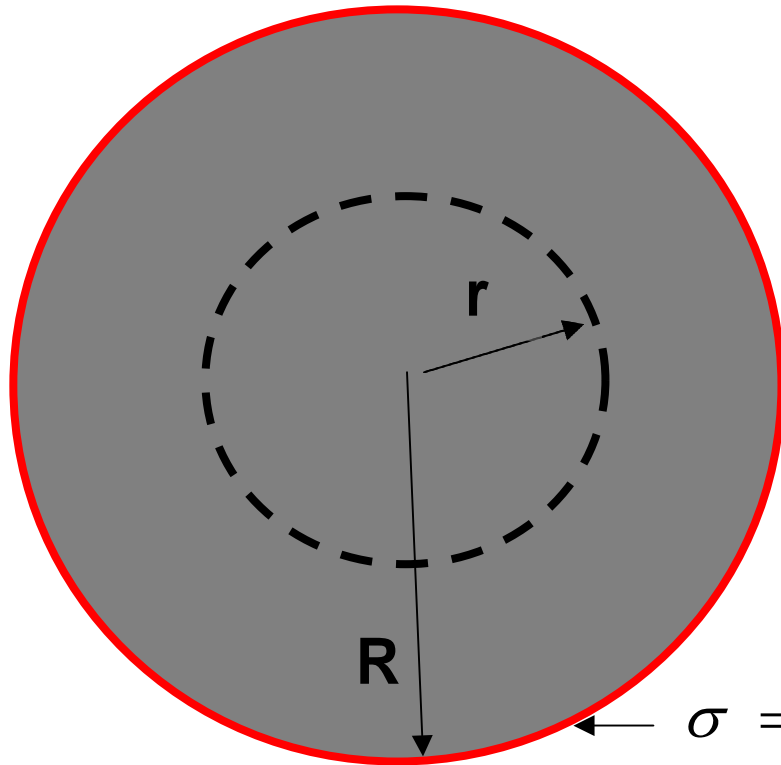
Semiconductores: materiales que en condiciones normales se comportan como aisladores pero que ante determinadas solitudes (potencial eléctrico, radiación,..) se comportan como conductores

Superconductores: materiales que en determinadas condiciones permiten que los electrones se mueven sin ningún tipo de dificultad (no presentan resistencia eléctrica)

Comportamiento electrostático de los conductores

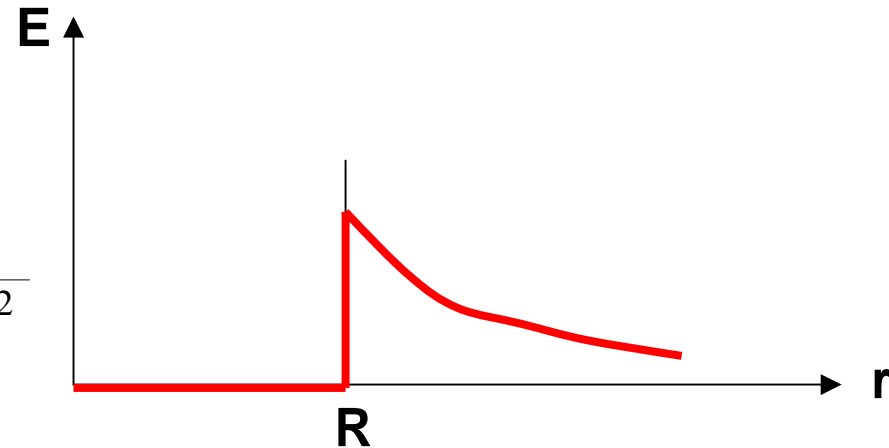
Si hay carga en $r < R \Rightarrow$ hay E en r ,
y si el material es conductor (hay
cargas libres) estas se deben mo-
ver (alejándose) por acción de E

**En situación electrostática, q en
superficie en los conductores**



$$\sigma = \frac{Q}{4 \pi R^2}$$

**$E = 0$ dentro de los
conductores en
situación
electrostática**



**E creado por carga superficial
debe ser normal a S en la
superficie pues sino habría
componente tangencial y cargas
se moverían**

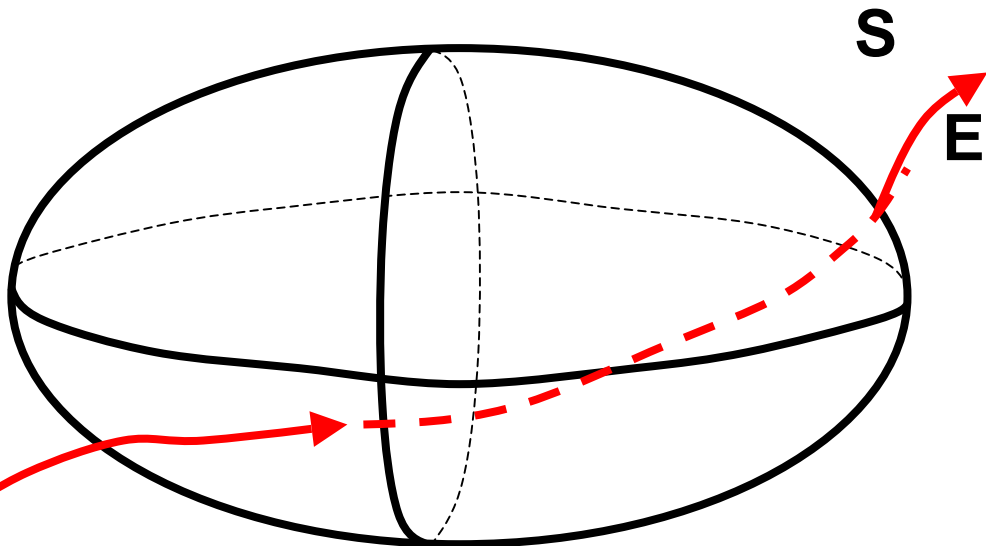
$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Expresión integral de la Ley de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss en forma diferencial

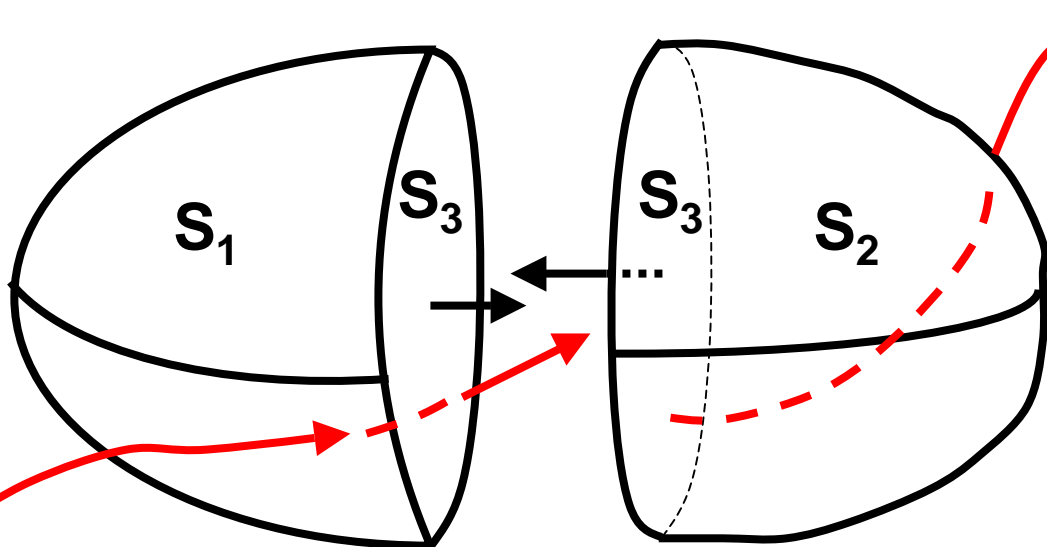
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



$$- \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} \frac{V_i}{V_i}$$

$$\lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V_i} = \nabla \cdot \vec{E}$$



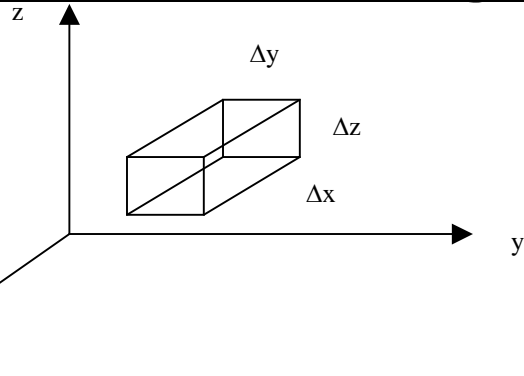
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V_i} V_i$$

$$= \int \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Teorema de la divergencia

Teorema de la Divergencia o de Gauss



$$\text{Div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V_i} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

En dirección x $[E_x)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - E_x)_{x-\frac{\Delta x}{2}}] \Delta y \Delta z$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = [E_x)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - E_x)_{x-\frac{\Delta x}{2}}] \Delta y \Delta z + [E_y)_{y+\frac{\Delta y}{2}} - E_y)_{y-\frac{\Delta y}{2}}] \Delta z \Delta x + [E_z)_{z+\frac{\Delta z}{2}} - E_z)_{z-\frac{\Delta z}{2}}] \Delta x \Delta y$$

$$E_x)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}} = E_x)_{x} \pm \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \right)_x \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} \right)_x \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \pm \dots$$

$$\left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \right)_x \Delta x + \frac{2}{3!} \left(\frac{\partial^3 E_x}{\partial x^3} \right)_x \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 + \dots \right] \Delta y \Delta z + \left[\left(\frac{\partial E_y}{\partial y} \right)_y \Delta y + \frac{2}{3!} \left(\frac{\partial^3 E_y}{\partial y^3} \right)_y \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^3 + \dots \right] \Delta z \Delta x +$$

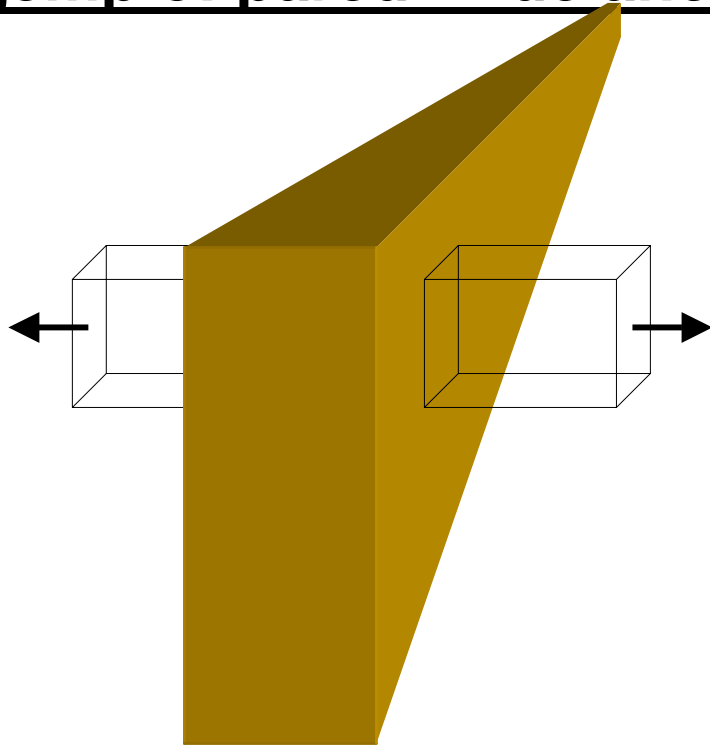
$$\left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_z \Delta z + \frac{2}{3!} \left(\frac{\partial^3 E_z}{\partial z^3} \right)_z \left(\frac{\Delta z}{2} \right)^3 + \dots \right] \Delta x \Delta y$$

$$\left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} \right)_y + \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_z + o(\Delta x^3, \Delta y^3, \Delta z^3) \right]$$

$$\lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V_i} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

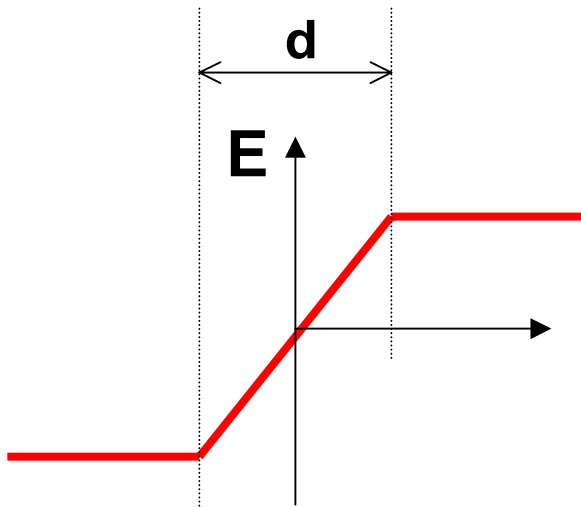
Ejemplo: pared ∞ de ancho d y densidad de carga uniforme ρ

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$|x| > \frac{d}{2} \quad E 2S = \frac{\rho S d}{\epsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{\rho d}{2 \epsilon_0}$$

$$|x| < \frac{d}{2} \quad E 2S = \frac{\rho S 2x}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$



$$\begin{aligned} x > \frac{d}{2} & \quad E = \frac{\rho d}{2 \epsilon_0} \\ -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} & \quad E = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \\ x < -\frac{d}{2} & \quad E = -\frac{\rho d}{2 \epsilon_0} \end{aligned}$$

En $x \pm d/2$ las soluciones convergen

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{d\vec{E}}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



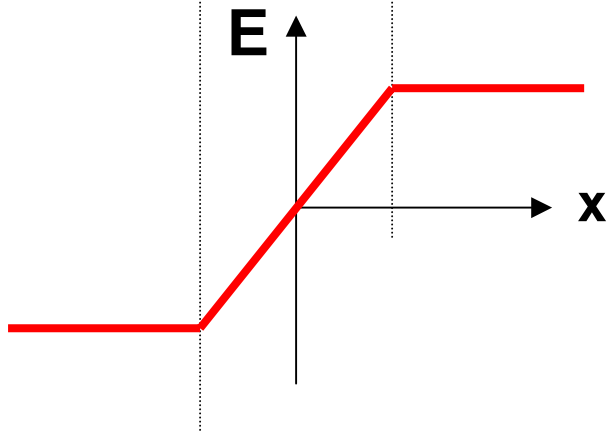
$$x > \frac{d}{2} \quad \frac{dE}{dx} = 0 \quad E = \alpha$$

$$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \quad \frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x + cte$$

$$x < -\frac{d}{2} \quad \frac{dE}{dx} = 0 \quad E = \beta$$

Condiciones de borde $E(0) = 0 \Rightarrow cte = 0$

$$E\left(\pm \frac{d}{2}\right) = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \quad \frac{\rho d}{2 \epsilon_0} = \alpha \quad -\frac{\rho d}{2 \epsilon_0} = \beta \Rightarrow \alpha = -\beta$$



$$x > \frac{d}{2} \quad E = \frac{\rho d}{2 \epsilon_0}$$

$$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \quad E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x$$

$$x < -\frac{d}{2} \quad E = -\frac{\rho d}{2 \epsilon_0}$$

Energía electrostática

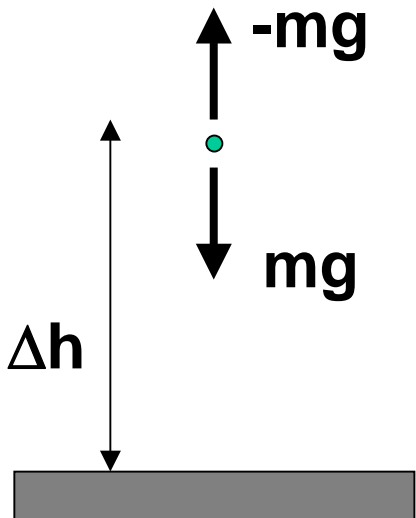
Energía potencial:

gravitatoria $\Delta E_{PG} = m g \Delta h$

elástica $\Delta E_{PE} = \frac{1}{2} k \Delta x^2$

$$\Delta E_p = W (Fzas \text{ Ext}) = -W (Fzas \text{ propias})$$

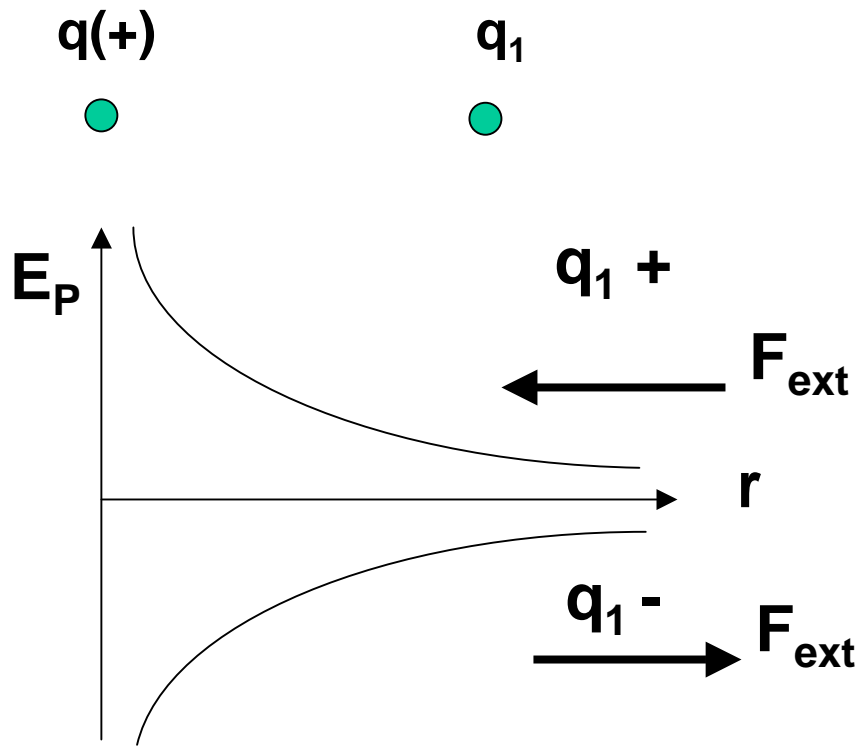
$$W = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = -\int \vec{F}_{int} \cdot d\vec{l}$$



Si cae (acción espontánea que no requiere intervención externa) el sistema (masa-Tierra) pierde energía potencial. Si sube (solo posible por acción de un agente externo) el sistema gana energía potencial

Como medir E_p ? Solo por el trabajo realizado para crear la situación concreta sin el agrado de ningún otro tipo de energía (E_C), o sea con $F = -F(\text{propia})$ y en pasos infinitesimales para no acelerar

Energía electrostática de un sistema de dos cargas



$$\Delta W_{F_{ext}} = \int_{\infty}^r \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r q_1 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta W_{F_{ext}} = - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} q q_1 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$\Delta W_{F_{ext}} = \Delta E_p = \frac{q q_1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r}$$

+ - : (fuerzas atractivas) la energía potencial disminuye cuando acerco las cargas (espontáneo)

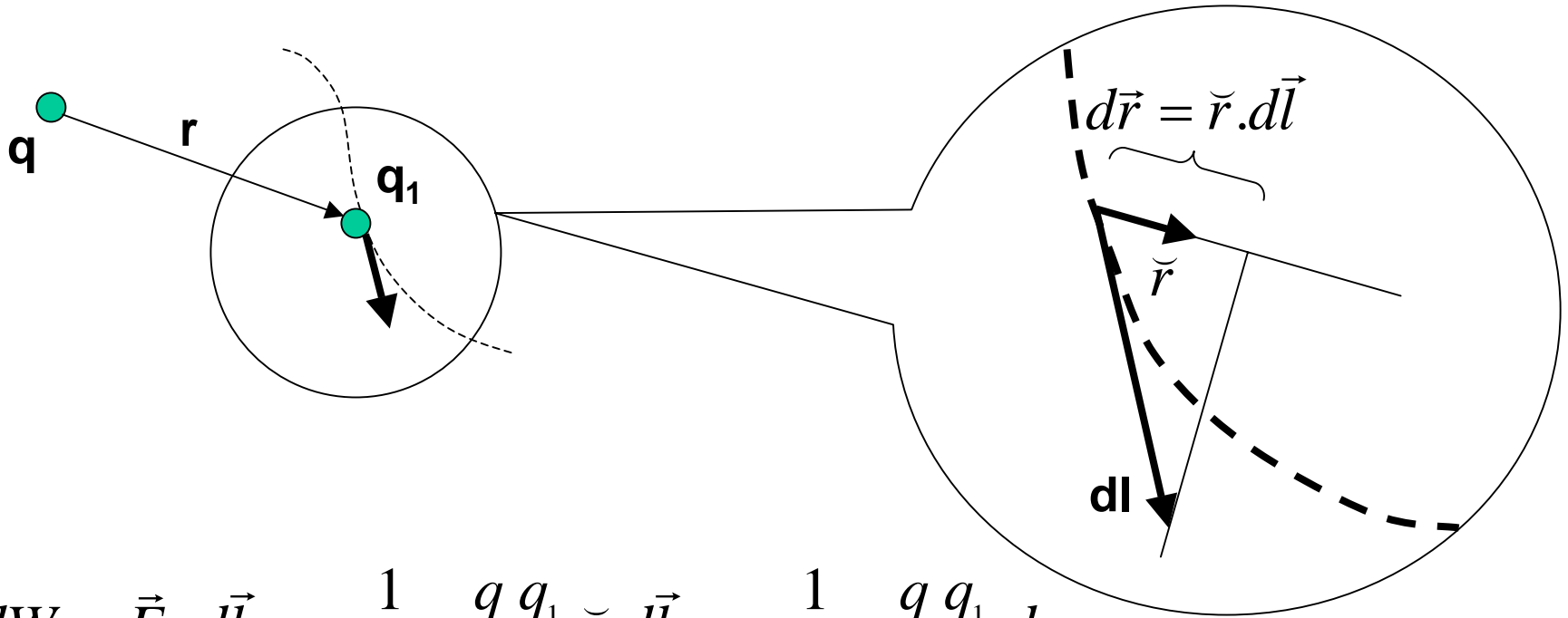
++ o -- : (fuerzas repulsivas) la energía potencial aumenta cuando acerco las cargas (solo posible por acción de un agente exterior)

Si cargas van de r_1 a r_2

$$\Delta E_p = \frac{q q_1}{4 \pi \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$\Delta E > 0$ si ++ o -- y acerco o si +- y alejo y < 0 si ...

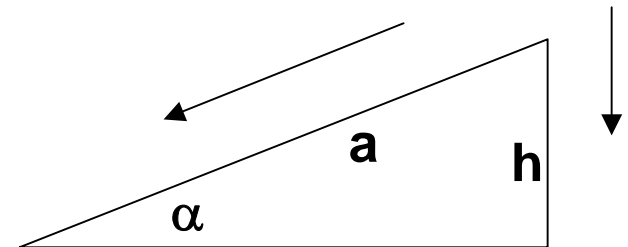
Fuerza de Coulomb es conservativa, o sea el W necesario para mover una carga entre dos puntos es independiente del camino recorrido (Idem fuerzas gravitatorias)



$$dW = \vec{F}_c \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_1}{r^2} \vec{r} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_1}{r^2} dr$$

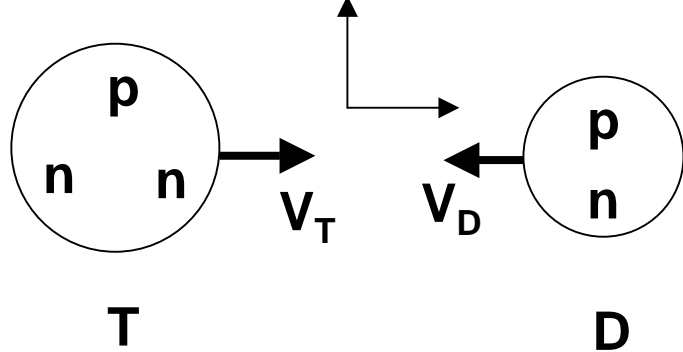
Caso gravitatorio sin f_r

$$\Delta W = m g h = m g a \sin \alpha$$



Ejemplo: v necesaria para acercarse a un núcleo de Tritio y otro de Deuterio a distancia de 10^{-15} m para producir fusión

En sistema CM



$$\frac{1}{2} M_T V_T^2 + \frac{1}{2} M_D V_D^2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_T q_D}{d}$$

$$M_T V_T - M_D V_D = 0 \Rightarrow V_D = \frac{M_T V_T}{M_D}$$

$$q_T = q_D = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e \cdot 2000 \approx m_p \approx \frac{M_T}{3} = \frac{M_D}{2}$$

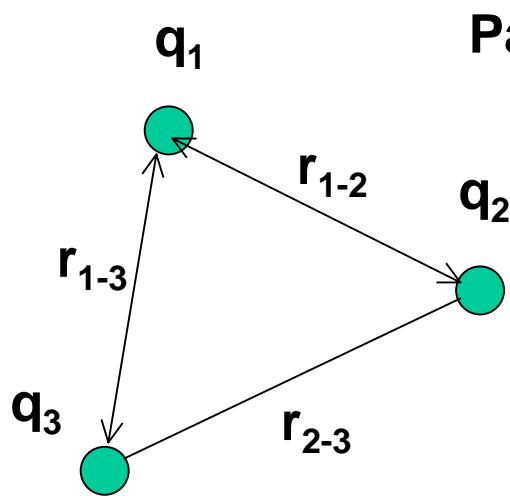
$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$$

$$V_T = 4,3 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$V_D = 6,5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

En un gas velocidad es proporcional al cuadrado de la temperatura; las velocidades anteriores equivalen a temperaturas del orden de 10^7 - 10^8 °K

Energía electrostática de un sistema de cargas



Para traer \$q_1\$ aislada desde \$\infty\$ $\Delta W = 0 \Rightarrow \Delta E_P = 0$

Para traer ahora \$q_2\$ $\Delta E_P = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{1-2}} \right)$

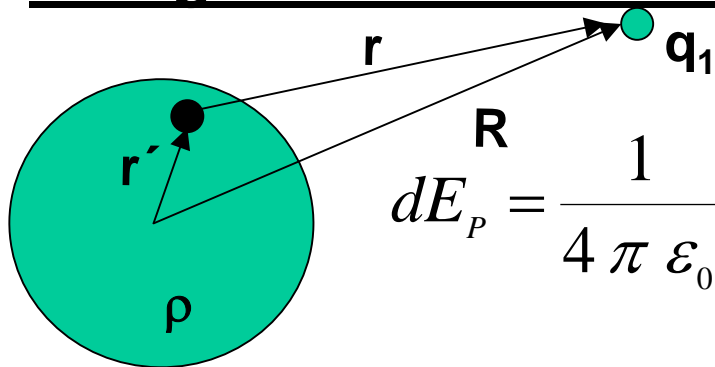
Y para traer \$q_3\$

$$\Delta E_P = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{1-2}} \right) + \frac{q_1 q_3}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{1-3}} \right) + \frac{q_2 q_3}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{2-3}} \right)$$

\$E_P\$ de un sistema de cargas puntuales

$$\Delta E_P = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{i-j}}$$

Energía electrostática de cargas distribuidas



$$dE_P = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 \rho dV}{r} \Rightarrow E_P = \frac{q_1 \rho}{4 \pi \epsilon_0} \iiint \frac{r'^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{|\vec{R} - \vec{r}'|}$$

\$E_P\$ igual al de \$Q\$ en origen

$$E_P = \frac{q q_1}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

Potencial eléctrico

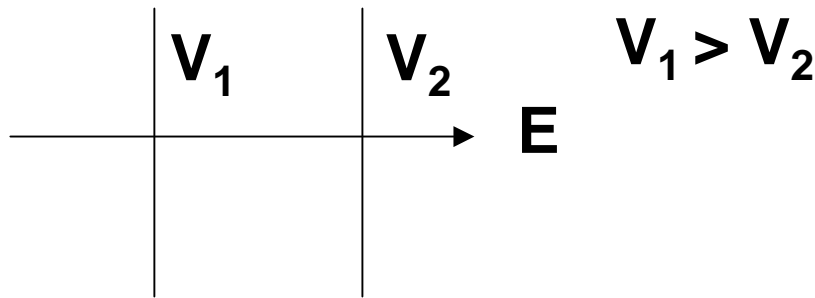
$$F \Rightarrow E = F/q$$

$$E_p \Rightarrow V = E_p/q$$

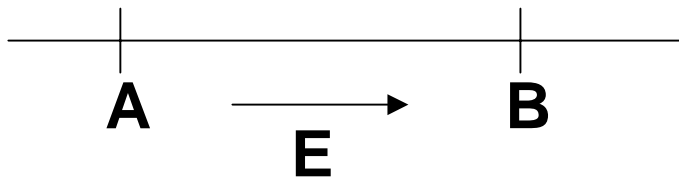
Diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos: cambio de la energía potencial cuando una carga de prueba se mueve entre esos dos puntos dividido el valor de la carga

$$\Delta V_{a-b} = \frac{\Delta E_p}{q} = \frac{W_{b-a}}{q} = \int_a^b \frac{\vec{F}_{ext}}{q} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{(-q \vec{E}) \cdot d\vec{l}}{q}$$

$$\Delta V_{a-b} = V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



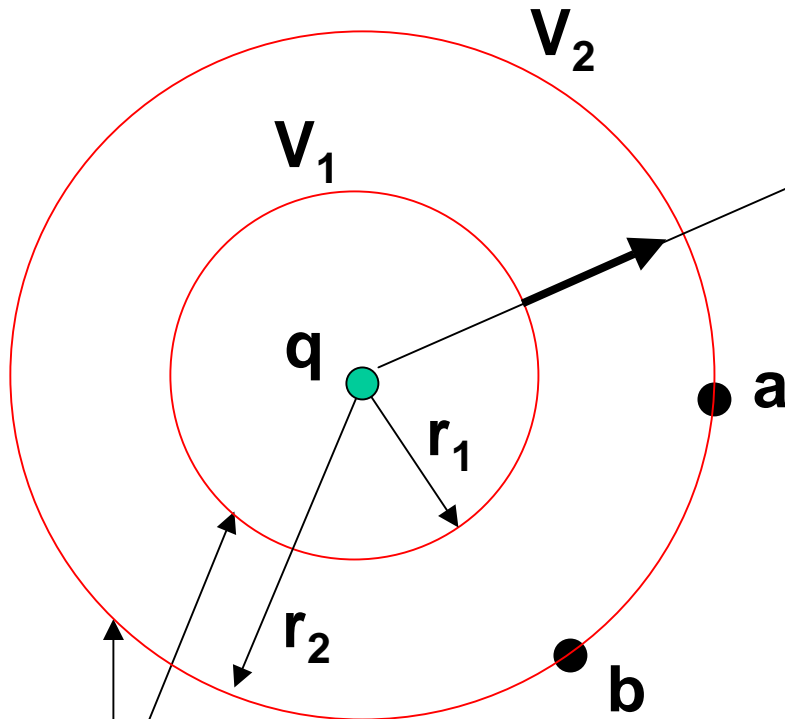
E apunta en la dirección en que V decrece



**De A a B el potencial decrece
de B a A el potencial aumenta**

$$[V] = J/C = \text{Volt (V)}$$

Carga puntual



$$V_2 = V_2 - V_\infty = \frac{\Delta E_{P(\infty-2)}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Delta V_{1-2} = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$q+ \Rightarrow r_1 \rightarrow r_2 \quad \Delta V < 0$$

$$r_2 \rightarrow r_1 \quad \Delta V > 0$$

$$q- \Rightarrow r_1 \rightarrow r_2 \quad \Delta V > 0$$

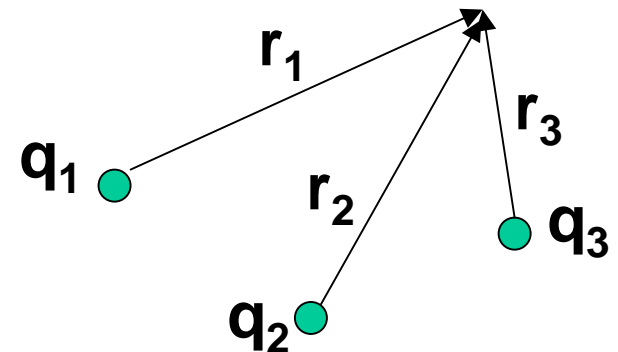
$$r_2 \rightarrow r_1 \quad \Delta V < 0$$

$$\Delta V_{a-b} = V_b - V_a = 0$$

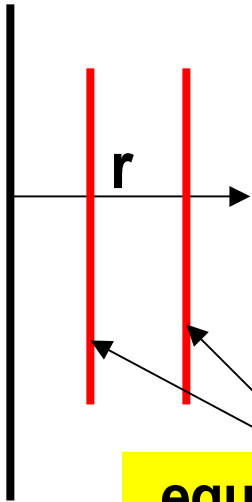
Superficies equipotenciales

Sistema de cargas puntuales

$$V = V - V_\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



Potencial de una linea infinita con carga λ C/m



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{r}$$

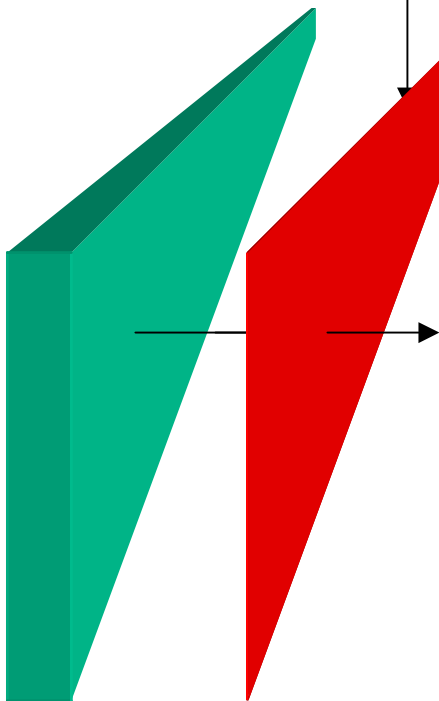
$$\Delta V_{2-1} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$V = 0$ donde?

$V = 0$ en $r = 1$ (arbitrario)

equipotenciales

Idem pared infinita con carga σ C/m²



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

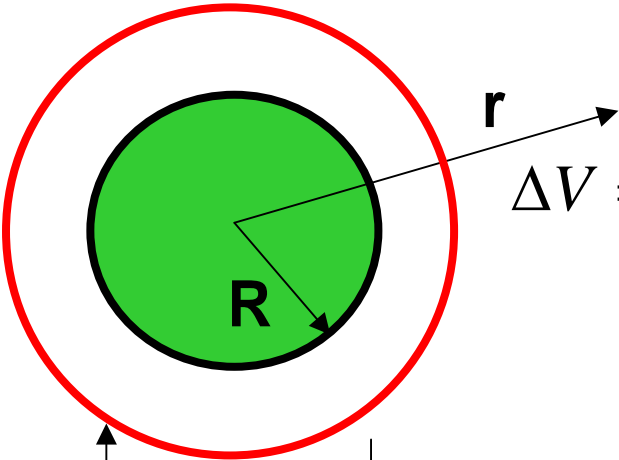
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\Delta V_{2-1} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (r_2 - r_1)$$

$V = 0$ donde?

$V = 0$ en $r = 1$ (arbitrario)

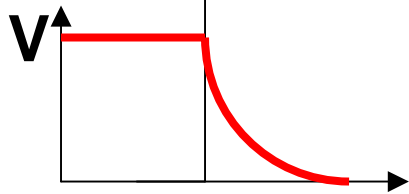
Potencial generado por esfera conductora (Carga en superficie)



$$\Delta V = V_2 - V_1 = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \left\{ \begin{array}{l} r > R \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r} \\ r < R \quad E = 0 \end{array} \right.$$

$$r > R \quad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$r < R \quad \Delta V = 0 \quad (V = cte)$$



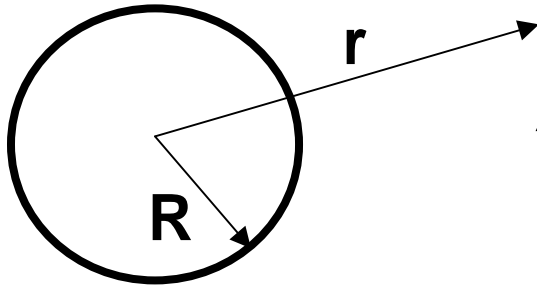
Superficie equipotencial

$$V(r = \infty) = 0$$

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Potencial de esfera cargada uniformemente en V



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$r > R \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

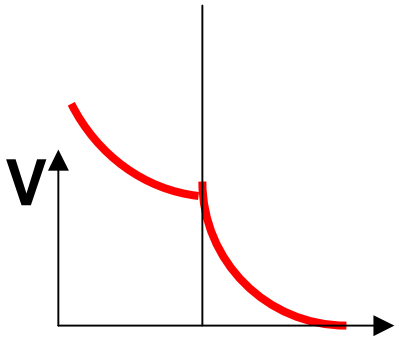
$$r < R \quad E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$r > R \quad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$V(r = \infty) = 0$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$



$$r < R \quad V(r) = -\int_{\infty}^R \vec{E}(r > R) \cdot d\vec{r} - \int_R^r \vec{E}(r < R) \cdot d\vec{r}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2)$$

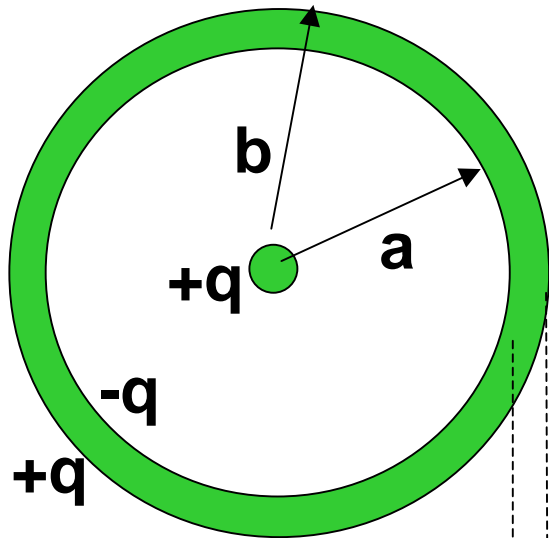
$$r = R \Rightarrow V(R)$$

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \right]$$

$$r = 0 \Rightarrow V = \frac{3V(R)}{2}$$

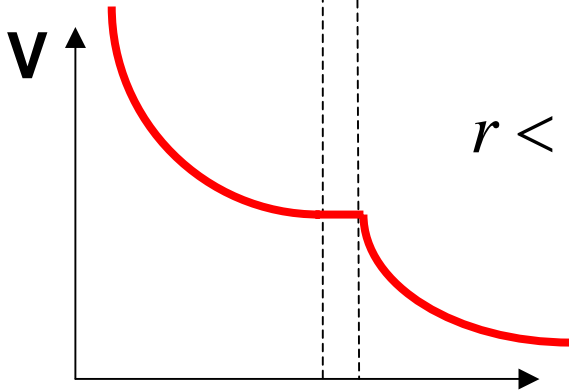
Potencial generado por una carga rodeado de una cáscara conductora



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad r > b \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

$$r > b \quad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

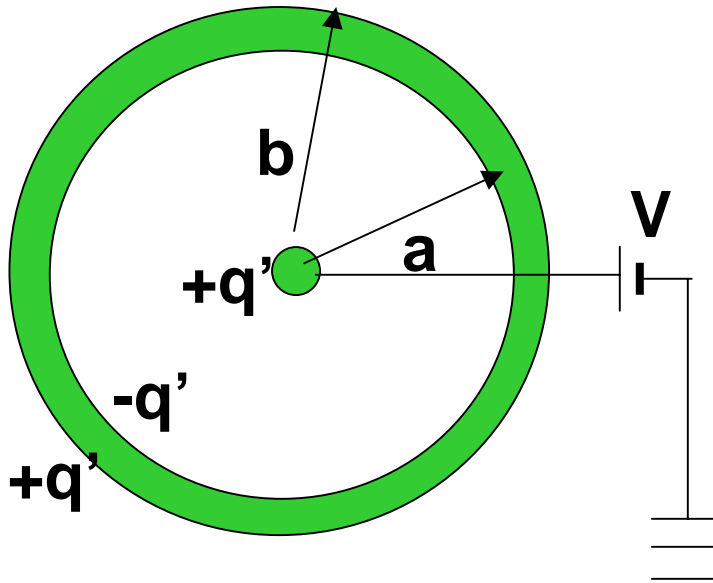
$$V(r = \infty) = 0 \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$



$$r < b \quad V = -\int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

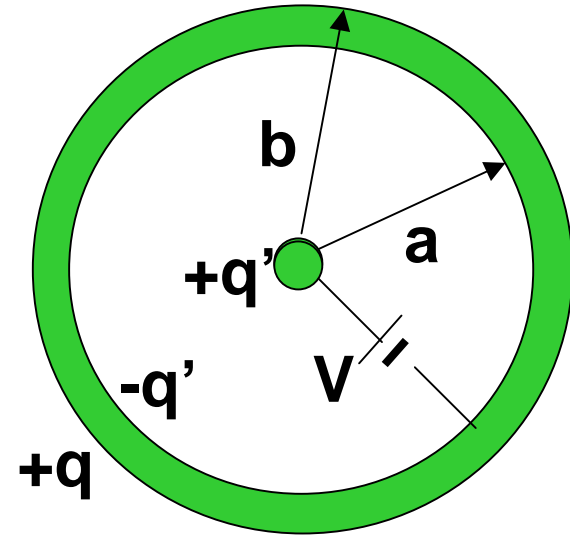
Influencia de V externa sobre la distribución de cargas en conductores



V impone q' en esfera interior, totalmente o modificando una carga existente, y por inducción se generan $-q'$ y $+q'$ en la cáscara de acuerdo a

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{b} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{a} \right)$$

r_i : radio esfera interior

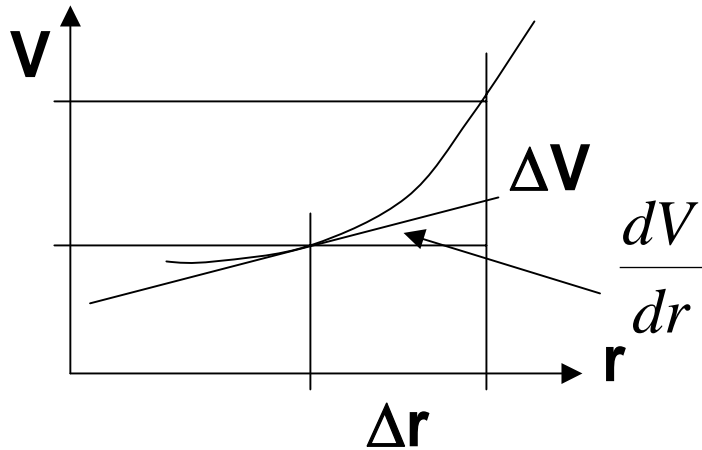


V impone q' en esfera interior de forma que

$$V = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{a} \right)$$

En cáscara conductora $E=0$ por lo que en $r=a$ la carga debe ser $-q'$. En $r=b$ la carga depende de la carga original en la cáscara

Relación entre E y V



$$\Delta V = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Ec. Poisson}$$

$$\text{Si } \rho=0 \quad \nabla^2 V = 0 \quad \text{Ec. Laplace}$$

cartesianas

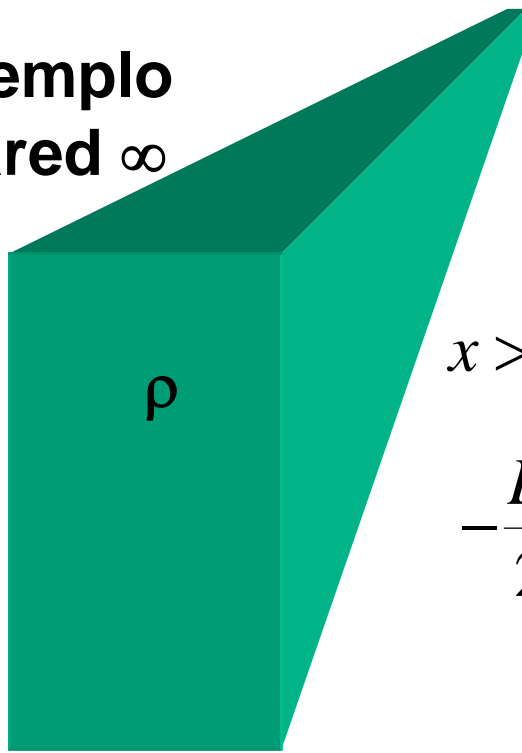
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

E: campo electrostático generado por cargas. Es un campo derivado de fuerzas conservativas ($\sim 1/r^2$), que son aquellas de las cuales pueden derivarse potenciales que son solo función de los estados iniciales y finales

Ejemplo

Pared ∞



Dentro pared Ec. Poisson y fuera Ec. Laplace

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 V = 0$$

$$x > \frac{D}{2} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \Rightarrow E = a \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow V = b x + c$$

$$-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x + d$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow V = -\frac{\rho}{2 \epsilon_0} x^2 + e x + f$$

$$x < -\frac{D}{2} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \Rightarrow E = g \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow V = h x + i$$

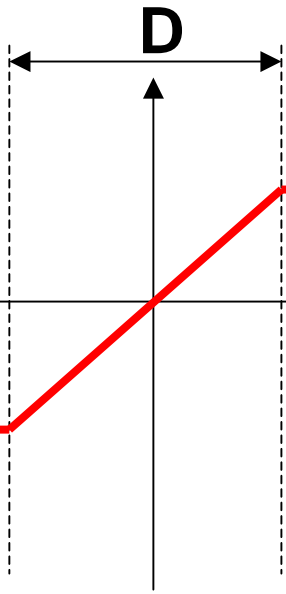
Condiciones de borde para E

$$E(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow E\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{\rho D}{2 \epsilon_0}$$

$$E_{in} = \frac{\rho}{\epsilon_0} x$$

$$E_{ex}\left(\frac{D}{2}\right) = -E_{ex}\left(-\frac{D}{2}\right) = E_{in}\left(\frac{D}{2}\right) \Rightarrow$$

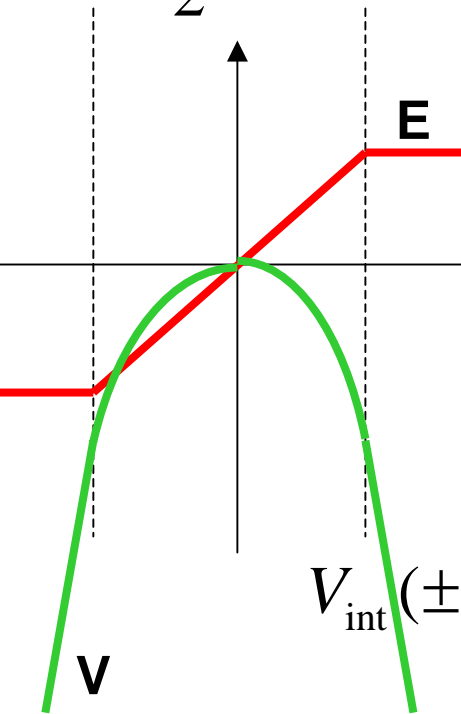
$$E_{ex} = \pm \frac{\rho D}{2 \epsilon_0}$$



$$x > \frac{D}{2} \quad V = b x + c$$

$$-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2} \quad V = -\frac{\rho}{2 \epsilon_0} x^2 + e x + f$$

$$x < -\frac{D}{2} \quad V = h x + i$$



$$E_{ex} = \pm \frac{\rho D}{2 \epsilon_0} = -\frac{dV}{dx}$$

$$V_{\text{int}}\left(\pm \frac{D}{2}\right) = V_{\text{ext}}\left(\pm \frac{D}{2}\right)$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$V_{\text{in}}\left(-\frac{D}{2}\right) = V_{\text{in}}\left(\frac{D}{2}\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{\rho}{2 \epsilon_0} \frac{D^2}{4} - e \frac{D}{2} = -\frac{\rho}{2 \epsilon_0} \frac{D^2}{4} + e \frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow e = 0$$

$$V_{\text{in}} = -\frac{\rho}{2 \epsilon_0} x^2$$

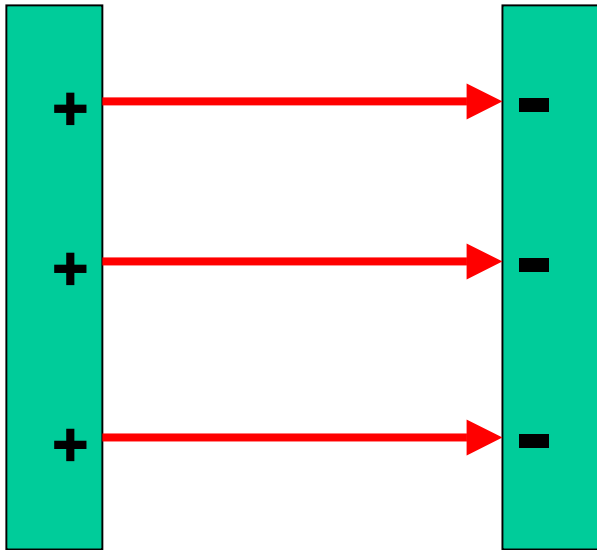
$$V\left(x > \frac{D}{2}\right) = -\frac{\rho D}{2 \epsilon_0} x + c$$

$$V\left(x < \frac{D}{2}\right) = \frac{\rho D}{2 \epsilon_0} x + i$$

$$-\frac{\rho}{2 \epsilon_0} \frac{D^2}{4} = -\frac{\rho D D}{2 \epsilon_0 2} + c \Rightarrow c = \frac{\rho D^2}{8 \epsilon_0} = i$$

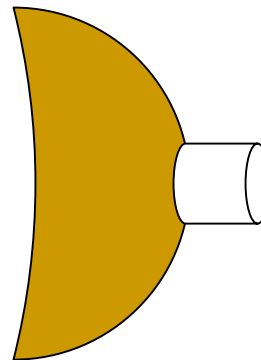
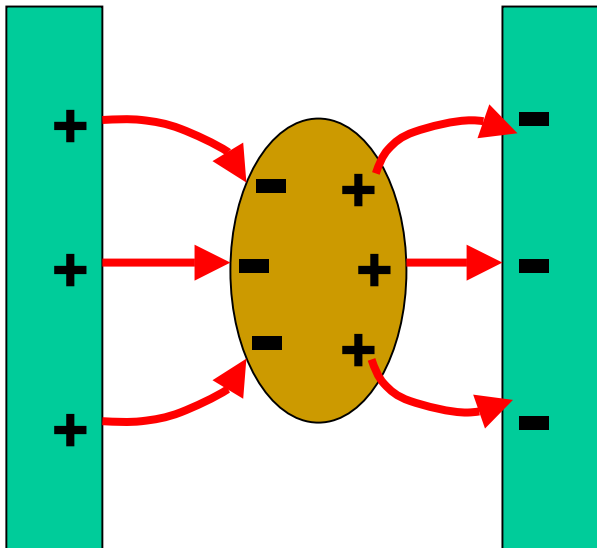
$$V_{\text{ex}} = \mp \frac{\rho D}{2 \epsilon_0} x + \frac{\rho D^2}{8 \epsilon_0}$$

Conductor en campo eléctrico



En conductor cargas en superficie, sino repeliéndose y en movimiento

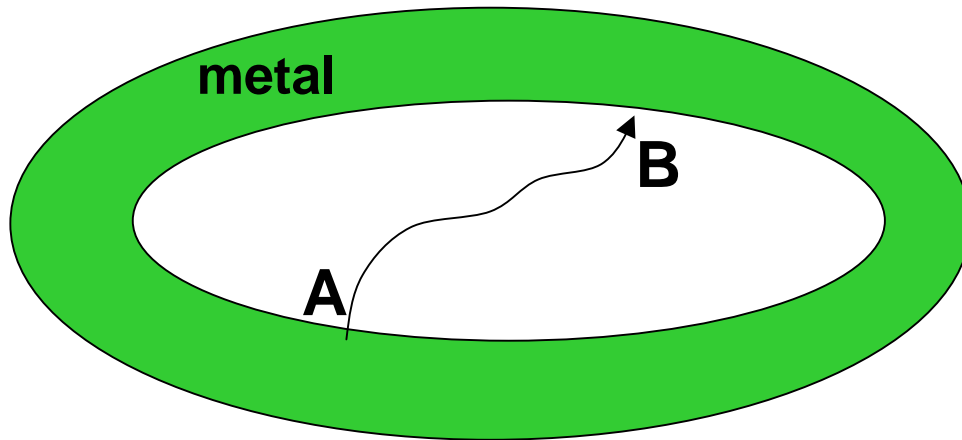
Superficie de un conductor necesariamente debe ser equipotencial sino las cargas se estarían moviendo



$$E S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E \perp S$$

Superficie interior es un equipotencial



Si dentro $E \neq 0$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

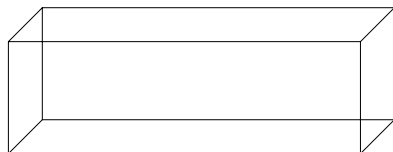
Si A-B se toma de forma que camino paralelo a E

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} > 0 \Rightarrow V_A > V_B$$

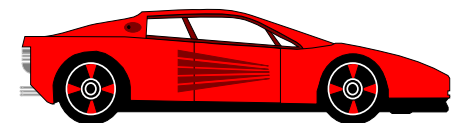
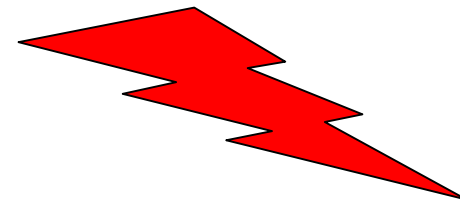
Dentro de los conductores, sean macizos o huecos, E es nulo, independientemente de las cargas externas y su distribución

contradiciendo hipótesis

Apantallamiento

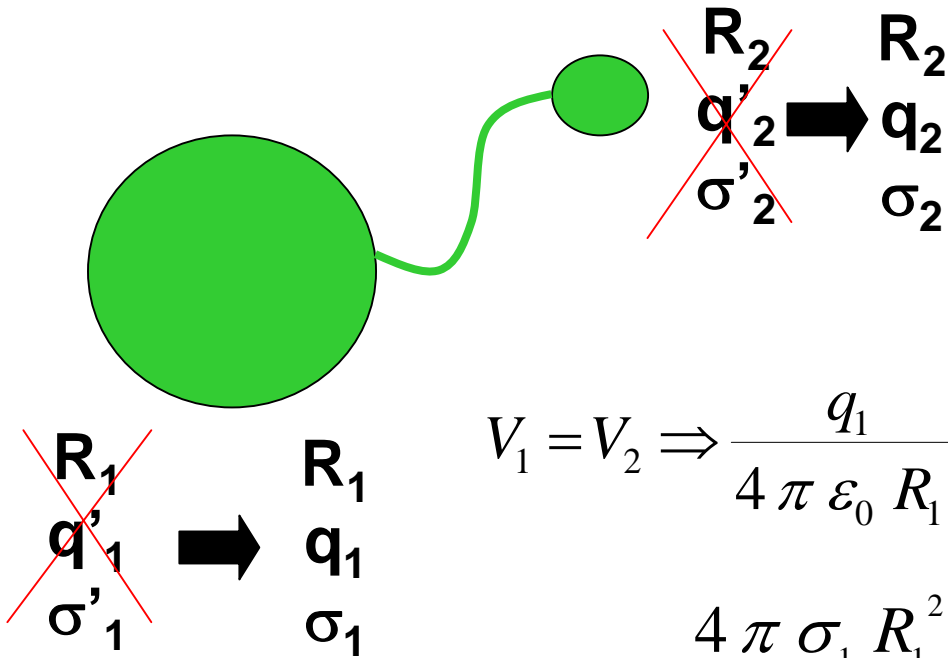


Lugar más seguro?



Influencia de la forma del conductor

Al conectar los 2 cuerpos todos los conductores forman un equipotencial



$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 R_2}$$

$$\frac{4 \pi \sigma_1 R_1^2}{4 \pi \epsilon_0 R_1} = \frac{4 \pi \sigma_2 R_2^2}{4 \pi \epsilon_0 R_2}$$

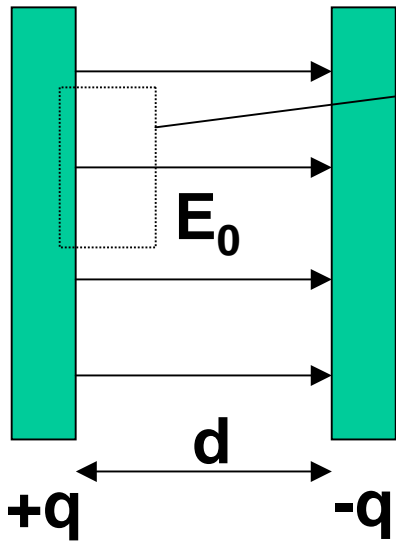
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

En los conductores las cargas se concentran en las zonas de menor radio de curvatura => pararrayos



Capacitores

Aproximación capacitor infinito



$$E_0 S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = -\int \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

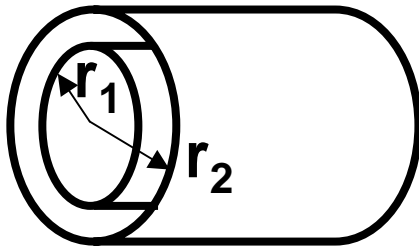
$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad \text{capacidad}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Capacitor plano

$$E 2 \pi r l = \frac{2 \pi r_1 l \sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2 \pi r \epsilon_0} = \frac{r_1 \sigma_1}{\epsilon_0 r}$$



$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1 \sigma_1}{\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$[C] = \frac{C}{V} = \text{Faraday (F)}$$

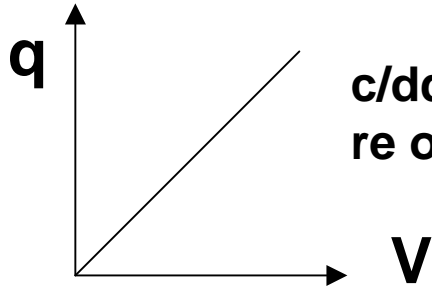
$$C = \frac{2 \pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2 \pi l \epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Capacitor cilíndrico

C depende solo de parámetros geométricos

Significado de la capacidad

$$dE_p = V dq = \frac{q}{C} dq$$

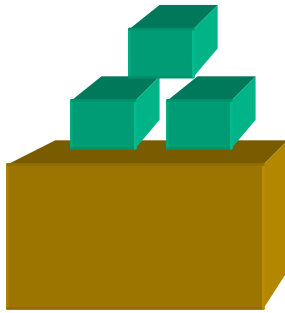
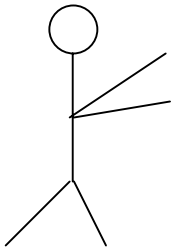


c/dq que muevo entre placas requiere otra energía pues V va variando

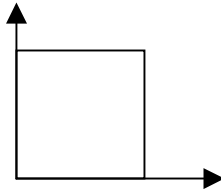
$$\Rightarrow E_p = \int_0^q \frac{1}{C} q dq$$

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V$$

distinto a



$$E_p = n (m g h)$$



C mide la capacidad de almacenar energía de un capacitor

Faraday: unidad muy grande

en condensador plano si $d = 1 \text{ mm}$ y $C = 1 \text{ F}$

$$S = \frac{C d}{\epsilon_0} = 1,110^8 \text{ m}^2$$

C en μF (10^{-6}) a pF (10^{-12})

Energía del campo eléctrico

Energía por unidad de volumen $u = \frac{E_P}{Vol.} = \frac{\frac{1}{2} C V^2}{d S} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\epsilon_0 S}{d} E^2 d^2}{d S}$

Densidad de energía potencial en vacío

$$u_P = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Deducida para condensador plano pero vale en general

Ej. Capacitor cilíndrico

$$\frac{dE_P}{dVol} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$E_P = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 r} \right)^2 2 \pi l r dr$$

$$E_P = \frac{\lambda^2 l}{4 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$E_P = \frac{1}{2} C V^2$$

$$E_P = \frac{1}{2} \frac{2 \pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \right)^2$$

$$E_P = \frac{\lambda^2 l}{4 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Vacío absoluto? $Energía = m c^2$

Donde hay E hay energía

Energía de una esfera cargada en volumen: complejo!

$$u = \frac{dE_P}{dVol} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad E_P = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dVol \quad \text{en todo el espacio}$$

Por Gauss, para $r < R$ $E 4 \pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$E_P = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^R \left(\frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \right)^2 r^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr \right)$$

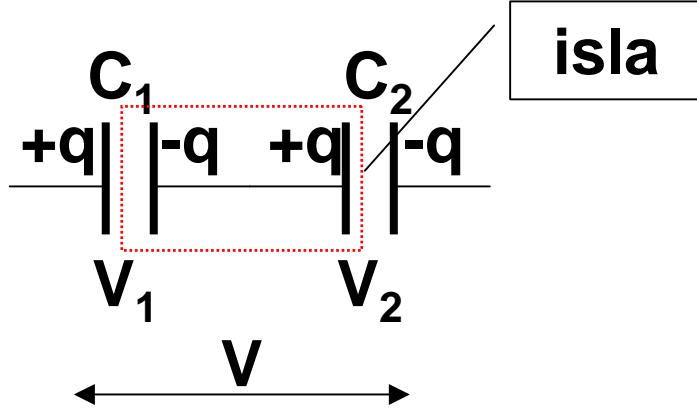
$$E_P = \frac{\rho^2}{18 \epsilon_0} 2 \cdot 2\pi \int_0^R r^4 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 4 \pi \frac{q^2}{(4 \pi \epsilon_0)^2} \int_R^\infty r^{-2} dr$$

E para $r > R$

$$E_P = \frac{4 \pi \rho^2 R^5}{18.5 \epsilon_0} + \frac{q^2}{8 \pi \epsilon_0 R} = \frac{6 q^2}{40 \pi \epsilon_0 R}$$

Conexión de capacitores

serie

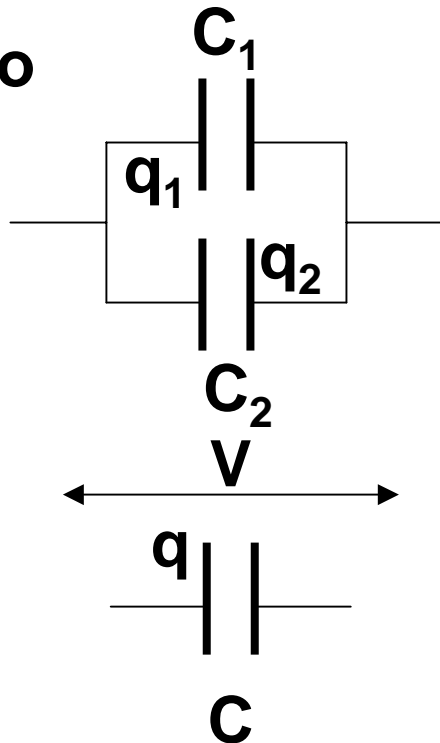


Carga neta = 0 si condensadores inicialmente descargados

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$$

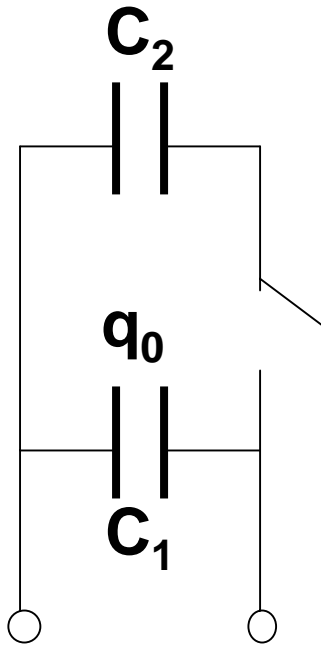
paralelo



$$q = C V = q_1 + q_2 = V (C_1 + C_2)$$

$$C = \sum C_i$$

Capacitor originalmente cargado



$$V_0 = \frac{q_0}{C_1}$$

$$E_{P0} = \frac{1}{2} q_0 V_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_1}$$

cuando se conectan, la carga q_0 se redistribuye en ambos condensadores

$$q_1 + q_2 = q_0$$

y conjunto equivale a tener un //: $C = C_1 + C_2$

$$V = \frac{q_0}{C_1 + C_2}$$

$$q_1 = C_1 V \quad q_2 = C_2 V$$

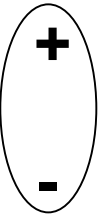
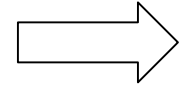
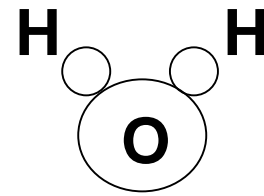
$$E_P = \frac{1}{2} q_1 V + \frac{1}{2} q_2 V = \frac{1}{2} q_0 V = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_1 + C_2} < E_{P0}$$

Una parte de la energía se disipa en los conductores cuando las cargas se distribuyen y otra se emite como radiación electromagnética

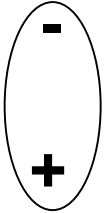
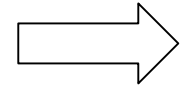
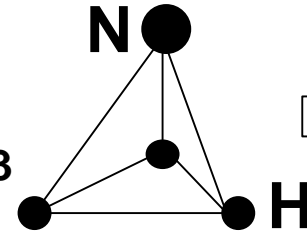
Dipolo eléctrico

Moléculas polares

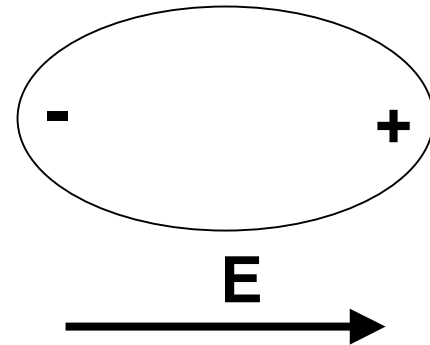
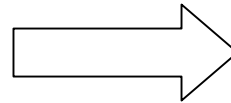
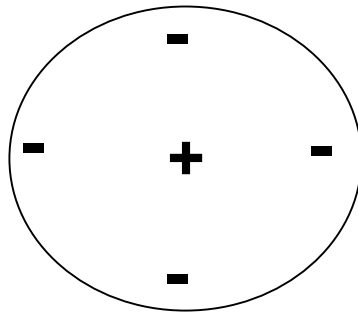
Agua H_2O



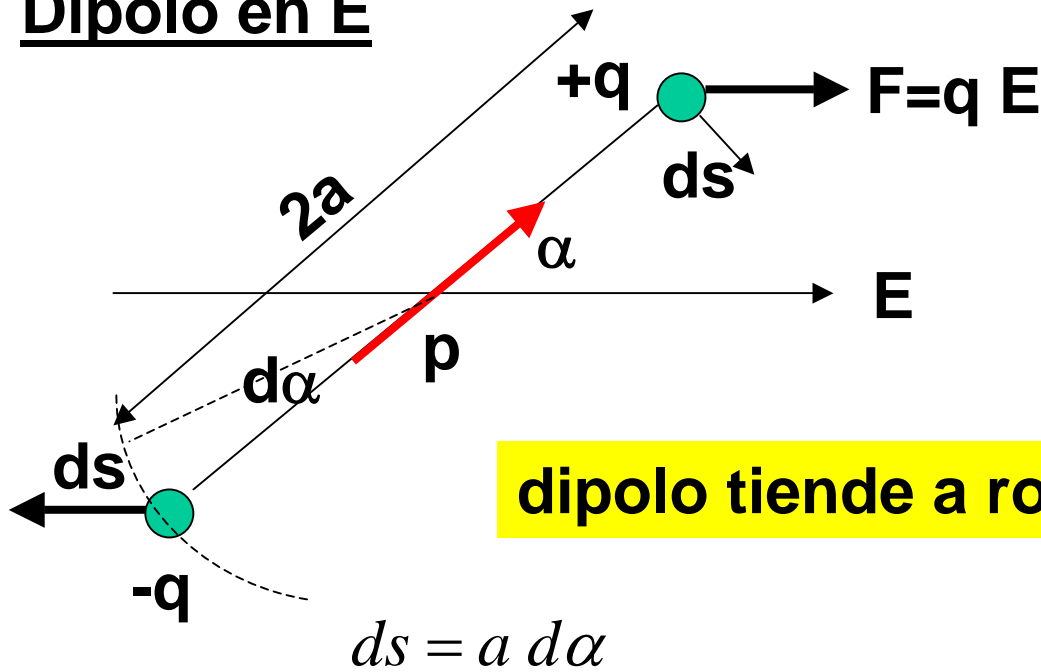
Amoníaco NH_3



Moléculas no polares se polarizan en presencia de E



Dipolo en E



$$\tau = F 2 a \text{ sen } \alpha = q E 2 a \text{ sen } \alpha$$

definimos $\vec{p} = q 2 a$

\vec{p} : momento dipolar

dipolo tiende a rotar alineándose con E

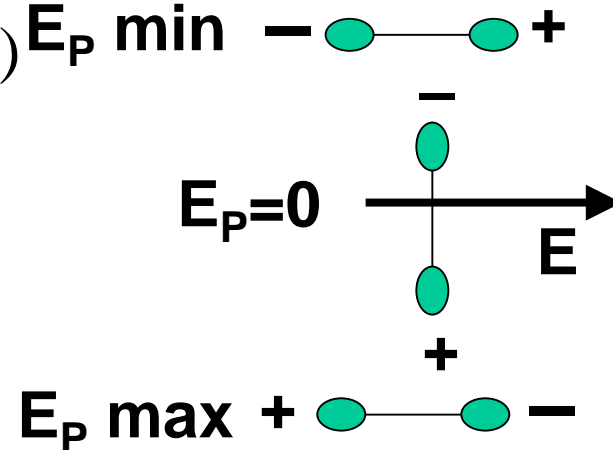
$$\tau = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$dE_p = dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q E a d\alpha \text{ sen } \alpha$$

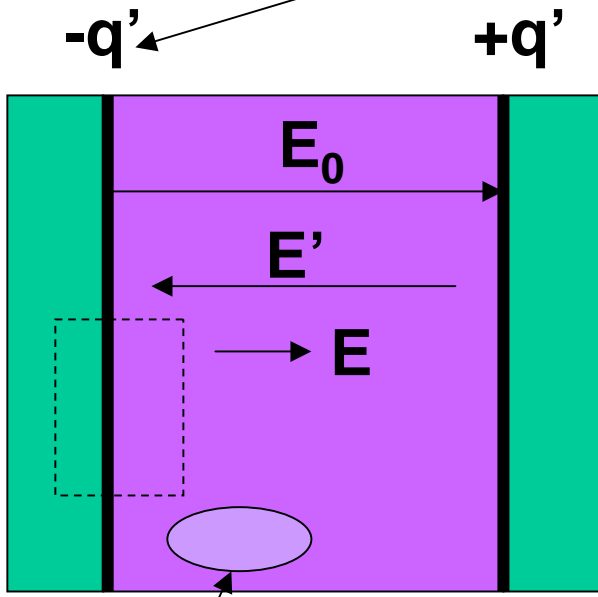
$$\Delta E_p = 2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q a E \text{ sen } \alpha d\alpha = -p E (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Si $E_p=0$ cuando $\alpha = 90^\circ$ $E_p = -p E \cos \alpha$

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



Dieléctricos



$$E = E_0 - E'$$

En sup. dieléctrico
carga de polarización $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{(q - q')}{\epsilon_0}$

$$E S = \frac{(\sigma - \sigma') S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}$$

Si $\sigma = |\vec{D}|$ $\sigma' = |\vec{P}|$ $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

D: Desplazamiento P: Polarización

$$P \propto E \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad \vec{D} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

χ : susceptibilidad, ϵ : permitividad en medio

$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$
 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$(1 + \chi) = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = K = \epsilon_r \quad \text{constante dieléctrica}$$

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \Rightarrow P = \sigma' = \epsilon_0 E' = \epsilon_0 (E_0 - E) = \epsilon_0 E (K - 1) = \epsilon_0 \chi E$$

$$E S \varepsilon_0 = \frac{P}{\varepsilon_0 \chi} S \varepsilon_0 = \frac{\sigma' S}{\chi} = q - q' \Rightarrow q' \left(\frac{1}{\chi} + 1 \right) = q$$

$$q' \left(1 + \chi \right) = \chi q \Rightarrow q' = q \left(1 - \frac{1}{K} \right)$$

$$K = 1 (\chi = 0) \Rightarrow q' = 0$$

$$K = \infty (\chi = \infty) \Rightarrow q' = q$$

Ley de Gauss en dieléctricos

$$\varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q - q'$$

$$\varepsilon_0 \oiint \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \cdot d\vec{S} = q \left[1 - \left(1 - \frac{1}{K} \right) \right]$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

$$\varepsilon_0 \oiint \frac{P}{\varepsilon_0 \chi} \cdot d\vec{S} = q \left[1 - \left(1 - \frac{1}{K} \right) \right]$$

$$q' = q \left(1 - \frac{1}{K} \right) = q \frac{\chi}{K}$$

$$\oiint \vec{P} \cdot d\vec{S} = q'$$

$$D = \epsilon_0 E_0 \quad \text{sin dieléctrico}$$

$$D = \epsilon E \quad \text{con dieléctrico}$$

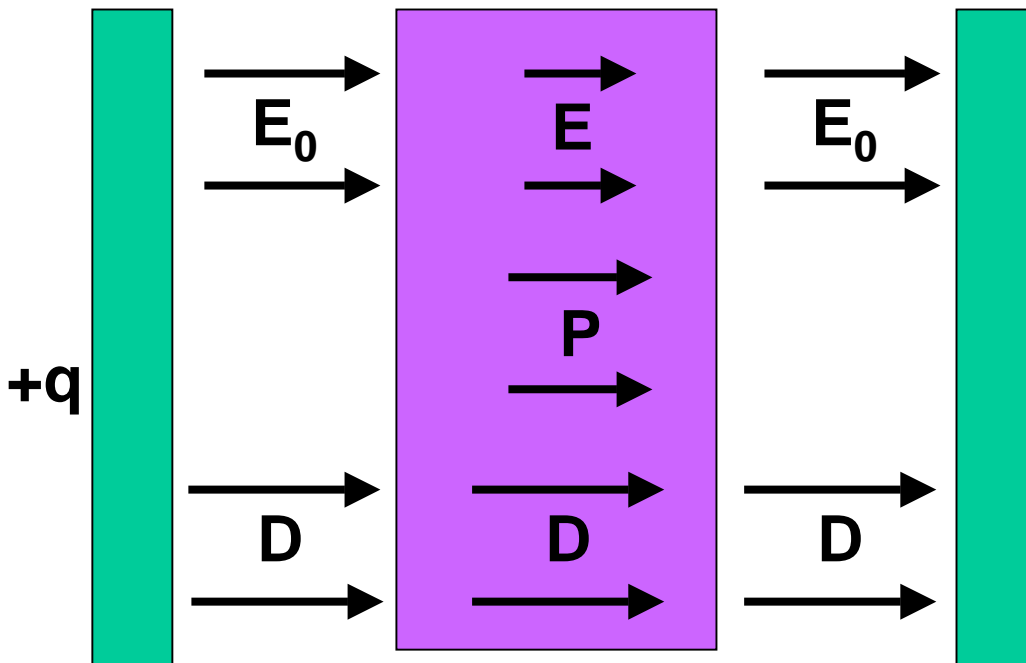
$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_0 / K}$$

$$C = K C_0$$

$$1 = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon E} \Rightarrow E = \frac{E_0}{K} \Rightarrow V = \frac{V_0}{K}$$

$$C = K \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon \frac{S}{d}$$

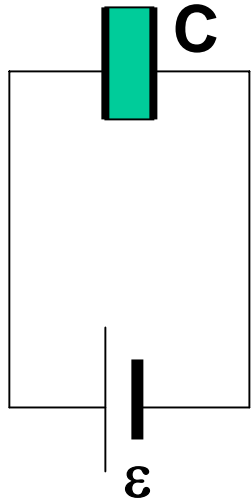
La introducción de un dieléctrico en un condensador multiplica la capacidad por K



Valores

Material	K	Campo Ruptura V/m
Aire		$3 \cdot 10^6$
Pilicarbonato	2,8	$3 \cdot 10^7$
Poliéster	3,3	$6 \cdot 10^7$
Vidrio pirex	4,7	$1 \cdot 10^7$

Hasta ahora C aislado (q cte); que pasa si conectado a V?



Al introducir dieléctrico V cte en bornes de C

$$C_0 \rightarrow C = C_0 K$$

$$q \rightarrow q_0 K \Rightarrow C = C_0 K$$

Cargas de polarización en dieléctrico tienden a reducir el campo pero como este está fijado por ε , la batería termina reforzando las cargas en C

Capacitor aislado

$$E_{P0} = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

Capacitor conectado a V

Introduciendo un dieléctrico

$$C_0 \rightarrow C = C_0 K \quad V_0 \rightarrow V = \frac{V_0}{K}$$

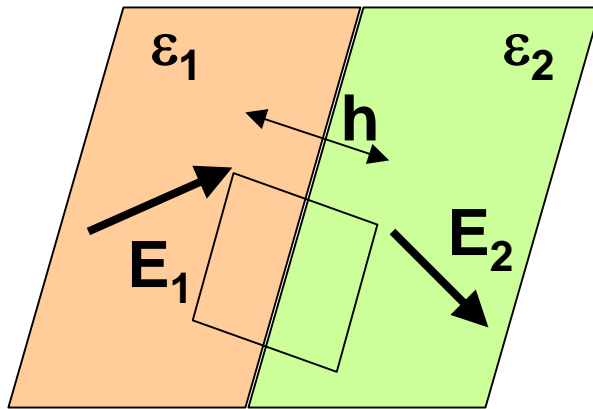
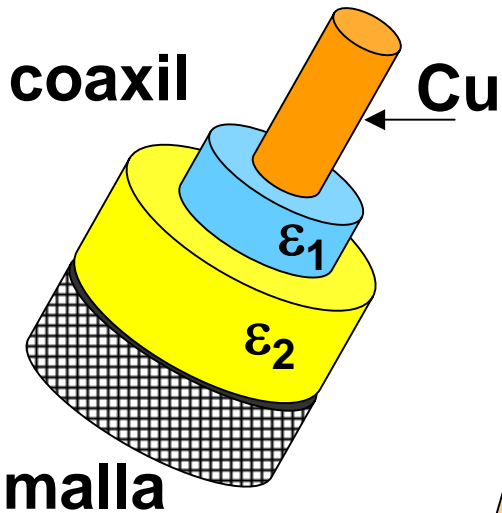
$$E_P = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C_0 K \frac{V_0^2}{K^2} = \frac{E_{P0}}{K}$$

Introduciendo un dieléctrico

$$C_0 \rightarrow C = C_0 K \quad V = V_0$$

$$E_P = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C_0 K V_0^2 = K E_{P0}$$

Condiciones de borde en límite entre dieléctricos

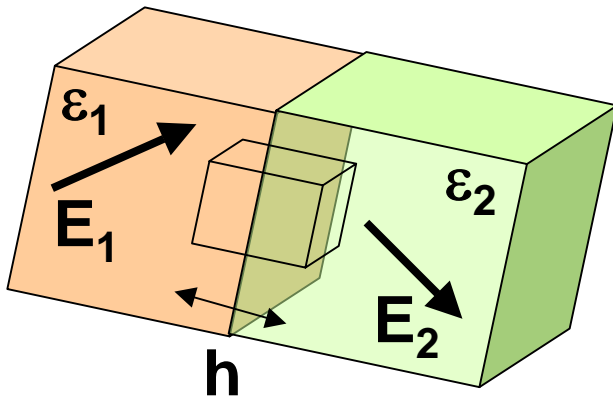


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = 0$$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

siempre



$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q = 0$$

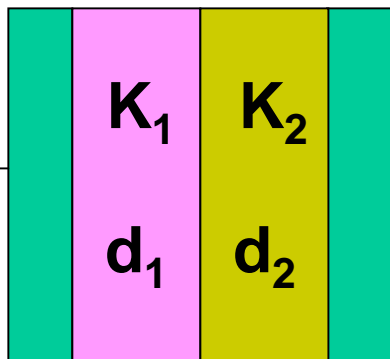
si no hay q en
superficie de
separación

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \iint \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} - \iint \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = 0$$

$$D_{N1} = D_{N2}$$

Si no hay cargas libres en superficie

Ejemplos

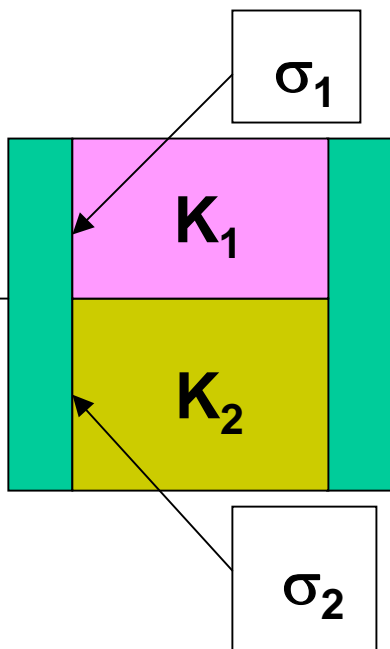


$$D_{n1} = D_{n2} = D \quad E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{D}{\epsilon_0 K_1} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{D}{\epsilon_0 K_2}$$

$$V = V_1 + V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{D}{\epsilon_0} \left(\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2} \right)$$

2 condensadores en serie

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\epsilon_0 K_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 K_2 S} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \left(\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2} \right) \iff \frac{1}{C} = \frac{V}{q} = \frac{D}{\epsilon_0} \left(\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2} \right) \frac{1}{\sigma S}$$

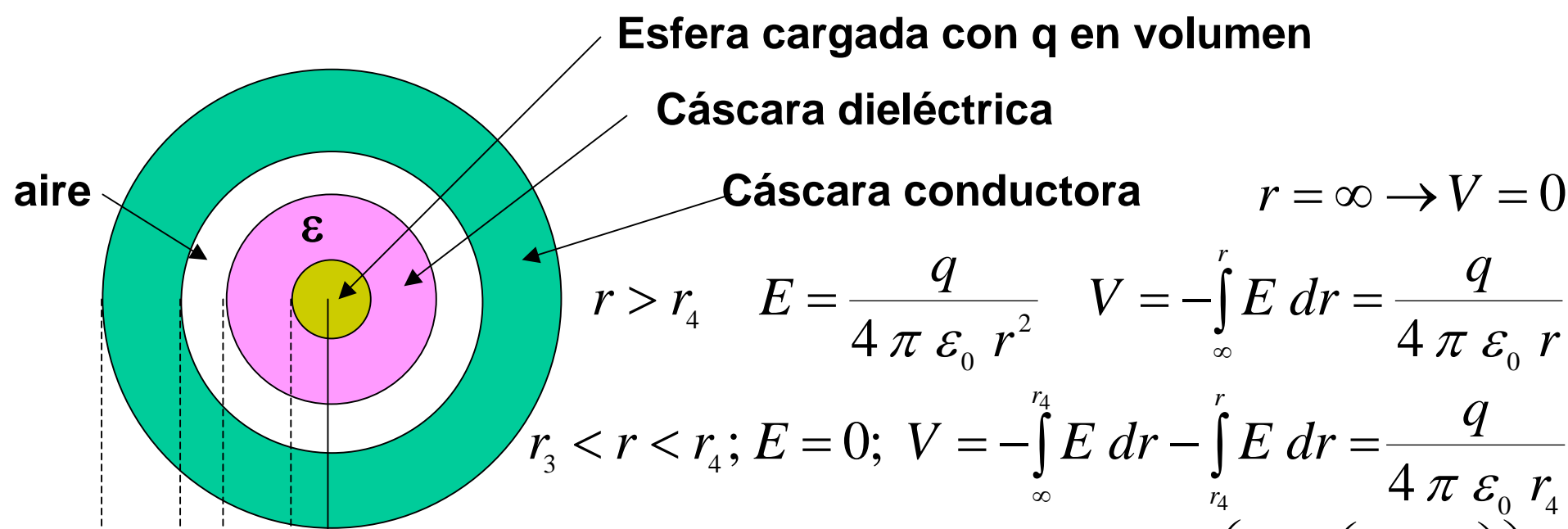


$$E_{t1} = E_{t2} = E \quad D_1 = \epsilon_0 K_1 E \quad D_2 = \epsilon_0 K_2 E$$

$$V = E d$$

2 condensadores en paralelo

$$\left\{ \begin{array}{l} = \Delta V \\ \neq q \\ \neq C \end{array} \right.$$



$$r > r_4 \quad E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad V = -\int_{\infty}^r E dr = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

$$r_3 < r < r_4; E = 0; V = -\int_{\infty}^{r_4} E dr - \int_{r_4}^r E dr = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r_4}$$

$$r_2 < r < r_3; E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}; V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_4} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right) \right)$$

$$r_1 < r < r_2; E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{q}{4 \pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_4} + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \right]$$

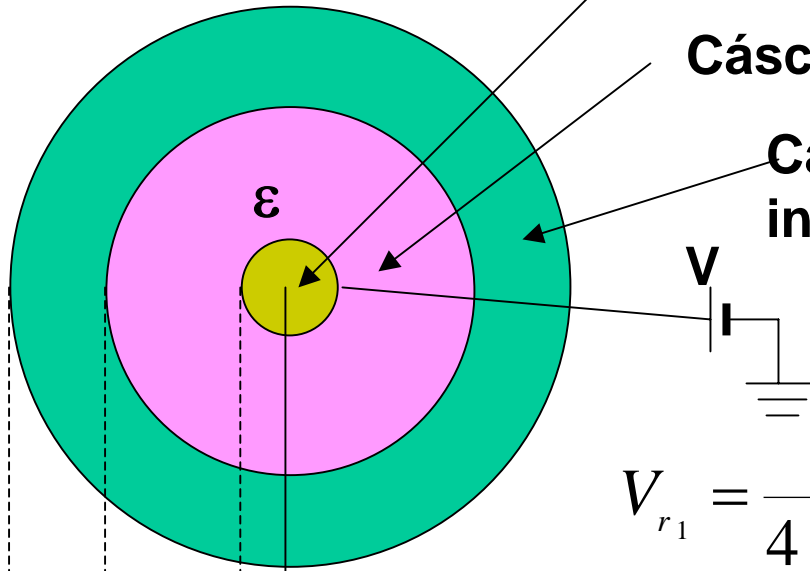
$$r < r_1; E = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}; V = \frac{q}{4 \pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_4} + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right] + \frac{\rho}{6 \epsilon_0} (r_1^2 - r^2)$$

Esfera conductora descargada

Cáscara dieléctrica

Cáscara conductora inicialmente con q

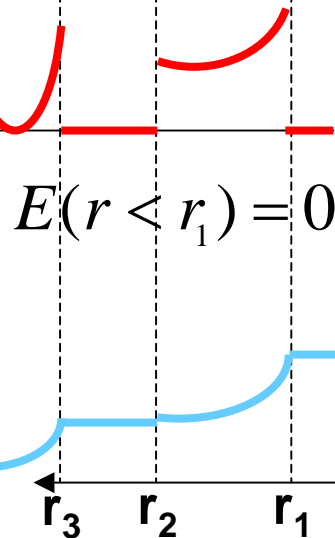
A t=0 q en exterior de cáscara



Con V esfera interior se carga en sup.

$$V_{r_1} = \frac{q_i}{4 \pi \epsilon_0 r_1} = V(r < r_1) \Rightarrow q_1 = V_{r_1} 4 \pi \epsilon_0 r_1$$

En interior de cáscara aparece -q₁ y en exterior q+q₁



$$E(r < r_1) = 0, E(r_1 < r < r_2) = \frac{q_1}{4 \pi \epsilon r^2}, E(casc) = 0, E(r > r_3) = \frac{q + q_1}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

$$r_1 < r < r_2; V_r - V_{r_1} = - \int_{r_1}^r \frac{q_1 dr}{4 \pi \epsilon r^2} \Rightarrow V_r = V_{r_1} + \frac{q_1}{4 \pi \epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$r_2 < r < r_3 \Rightarrow V = cte = V_{r_2}$$

$$r > r_3 \quad V = V_{r_1} + \frac{q_1}{4 \pi \epsilon} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{q + q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right)$$