

# ELECTROSTÁTICA

**Este capítulo constituye un pre-apunte (o sea, no llega a ser un apunte) cuya única función es facilitar la redacción de los apuntes en clase por parte del alumno. Contiene gráficos, formulas y explicaciones muy elementales de los contenidos que se dictan en la clase teórica a mi cargo, de forma que los participantes de la misma puedan completar en los espacios en blanco lo que consideren necesario. De ninguna manera reemplazan la bibliografía sugerida y se debe tener en cuenta que no han sido corregidos exhaustivamente**

# ELECTROSTÁTICA Interacciones eléctricas de cargas en reposo

**Interacciones: acciones a distancia** (Excluimos las de contacto)

**Existen 4 interacciones (conocidas) en la naturaleza**

**gravitatoria** (peso, cuerpos celestes; dominante a escala cosmos)

**electromagnética** (átomos y moléculas, uniones químicas)

**nuclear fuerte** (cohesión nuclear)

**nuclear débil** (emisión  $\beta$  radiactiva)

**todas las demás son interacciones de contacto**

**La más conocida: Interacción gravitatoria: expresada por la existencia de fuerzas atractivas entre cuerpos**

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

**F depende solo de  $m_i$  y  $r$**

**F siempre atractiva**

# Interacciones eléctricas

Se observa que experimentalmente que

algunos cuerpos interactúan entre sí con  $F \neq F_G$

esas interacciones son atractivas o repulsivas ( $\neq F_G$ )

dependen de una propiedad llamada carga eléctrica ( $q$ )

decaen con  $r$  de acuerdo a  $1/r^2$

O sea

$$F \propto q_1 q_2$$

$q_i$ : cargas puntuales

$\vec{F}$  en dirección  $q_1 - q_2$ , y  $\rightarrow \leftarrow \circ \leftarrow \rightarrow$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Ley de Coulomb

$$\vec{F} \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}$$

**++ Repulsiva**

**-- Repulsiva**

**+ - Atractiva**

# Carga eléctrica (q)

Masa: magnitud física, “medida de la cantidad de materia”

En realidad

$$m = \frac{F}{a}$$

**Magnitudes físicas: características cuantificables mediante procesos de medición definidos (mediciones objetivas)**

Ej.: longitud, masa, conductividad térmica, calor específico, emisividad, dureza, elasticidad, resistencia a la tracción, .....

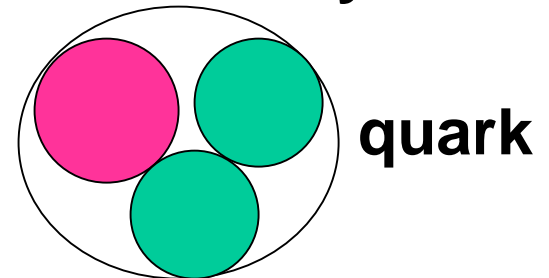
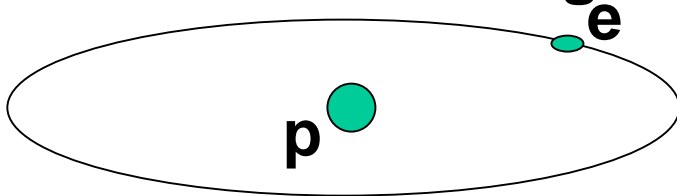
Ej. de características que no lo son: belleza, simpatía, actualidad, valor, interés, influencia,.....

**Importancia!**

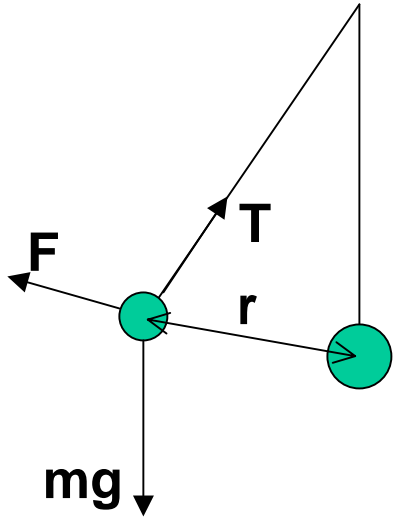
Que es q?

**Magnitud física causante de F eléctrica**

“Ubicación” de la carga eléctrica? A nivel atómico y nuclear



# Como medir q? Por su relación con magnitudes conocidas



$$q \propto r \sqrt{F}$$

Como F atractiva o repulsiva => 2 tipos de q ( $\pm$ )

Cuerpo cargado: por desbalance de cargas  
(carga electrostática)

Necesidad de unidades  $1u = 1m \sqrt{1N}$  ? Otra + útil (C)

1C a 1m de 1C =>  $F = 9 \cdot 10^9$  N

$$\vec{F} = K \frac{q q}{r^2} \vec{r} \quad K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$$

Carga electrón (e):  $-1,6 \cdot 10^{-19}$  C = - carga protón

Carga mínima medida



“nombre” de la carga define el sentido de la fuerza actuando como signo matemático en la ley de Coulomb

# Valores compartivos

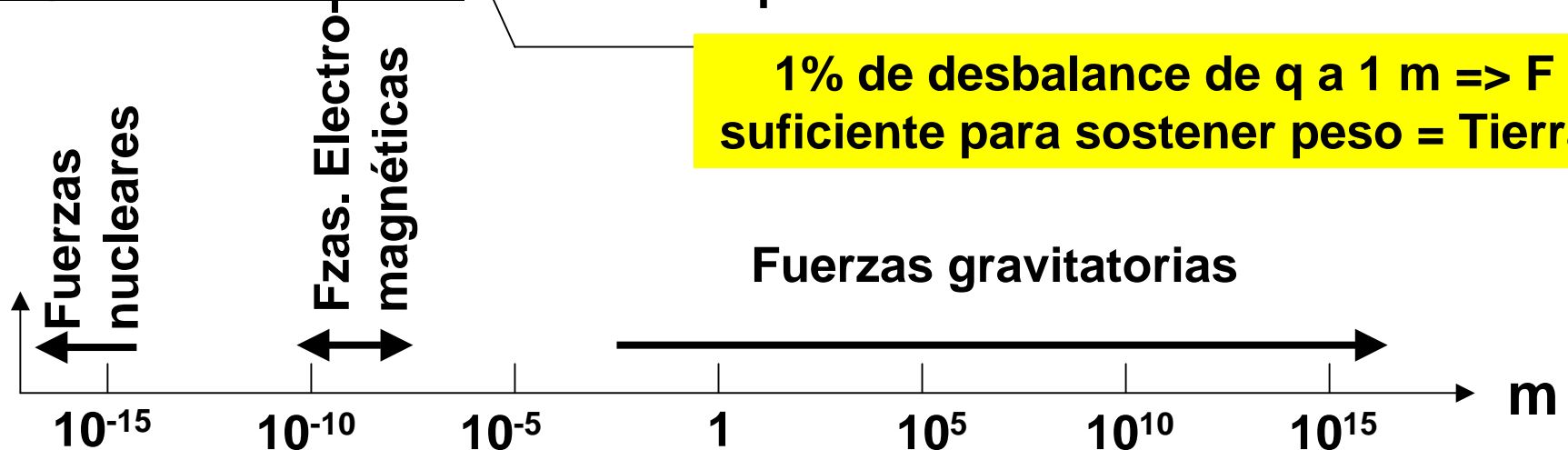
## Comparación entre F eléctrica y Fuerza gravitatoria

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{10^{-10}}}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{(9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27})}{10^{-10}}} = 1,38 \cdot 10^{39} \quad !!!$$

A escala cósmica domina la  $F_G$  y a escala atómica, la  $F_E$ ; que pasa?

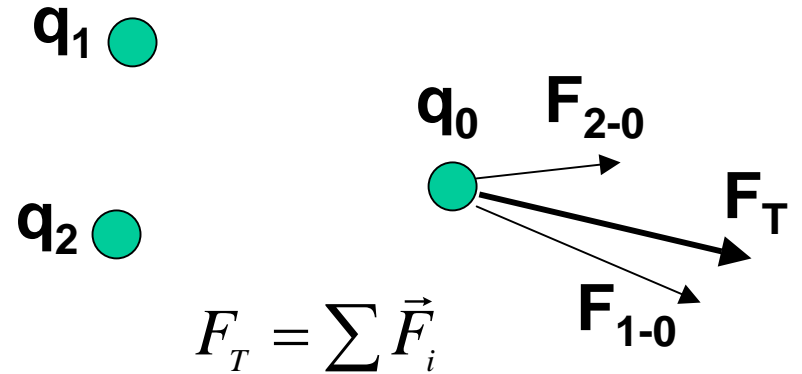
A medida que se acumula masa para formar planetas, estrellas y galaxias se acumula fuerza gravitatoria pero se compensa fuerza eléctrica pues átomos son neutros

### Rangos de dominio

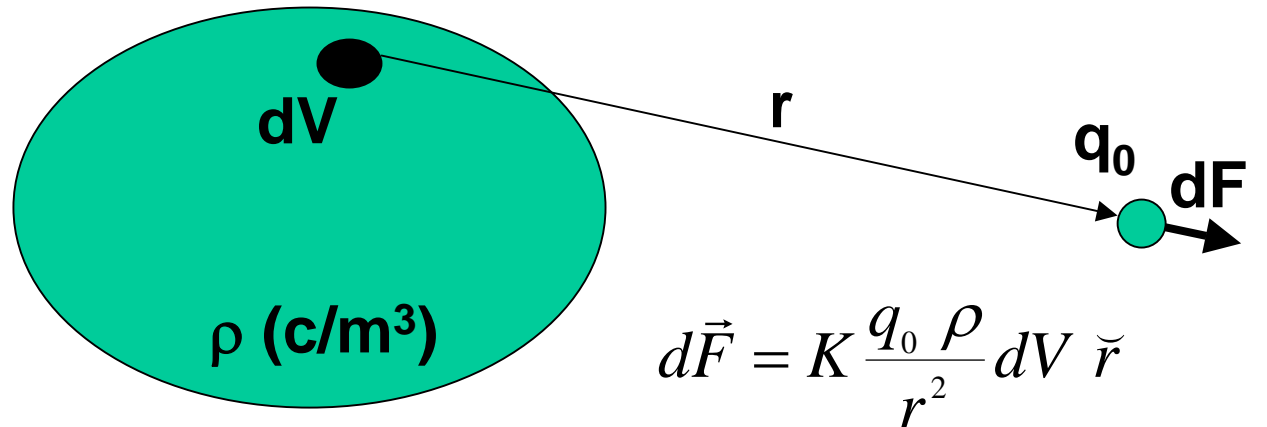


# Principio de superposición

Cargas puntuales



Cargas distribuidas



$$d\vec{F} = K \frac{q_0 \rho}{r^2} dV \vec{r}$$

$$\vec{F} = \int_V K \frac{q_0 \rho}{r^2} dV \vec{r}$$

# Ejemplos

## Hilo infinito

$\lambda$  C/m

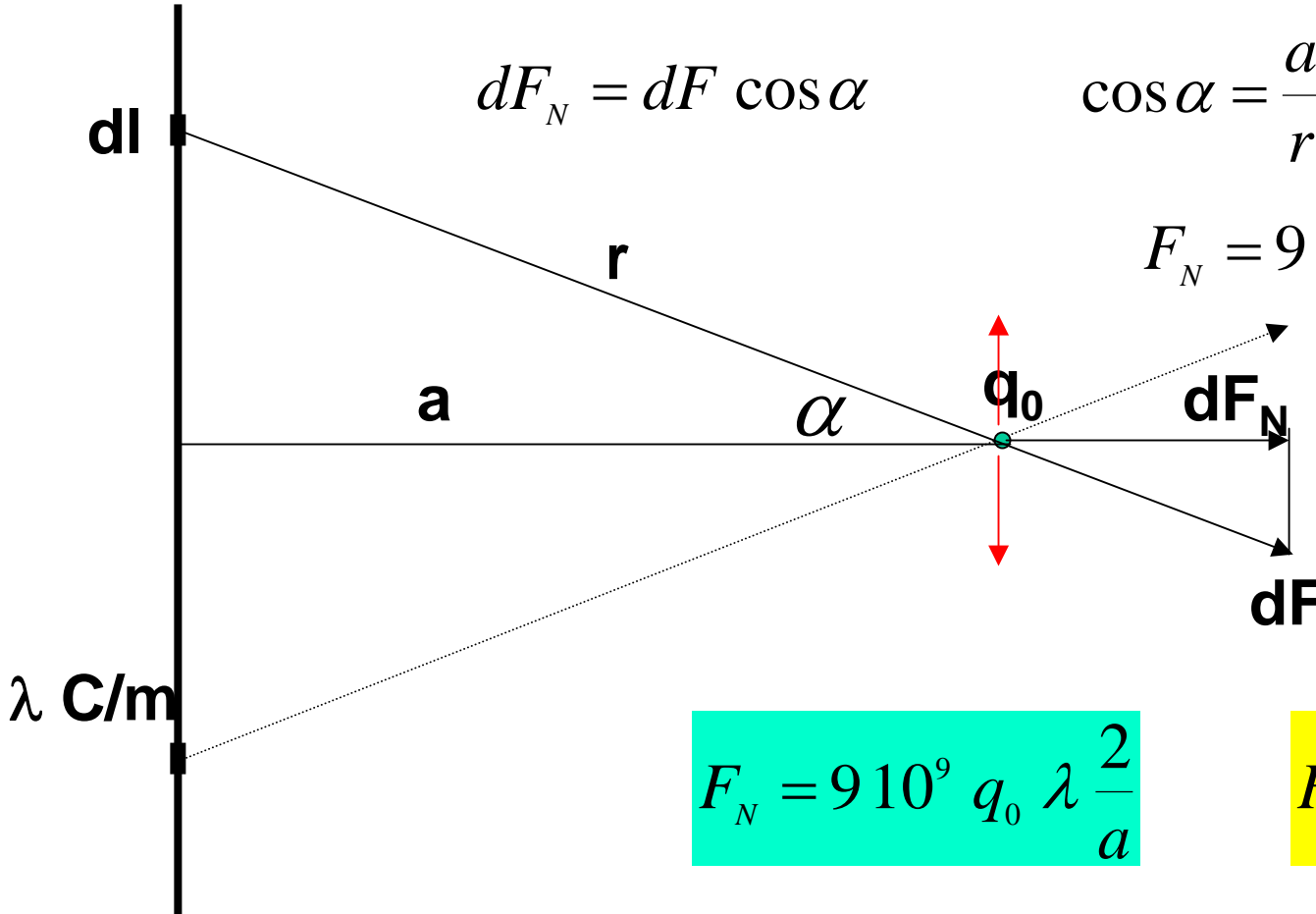
$$d\vec{F} = K \frac{q_0 \rho}{r^2} dV \vec{r} \quad \vec{F} = \int_l 9 \cdot 10^9 \frac{q_0 \lambda}{r^2} dl \vec{r}$$

Componentes // al hilo se anulan

$$dF_N = dF \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}$$

$$F_N = 9 \cdot 10^9 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_0 \lambda a dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$$



$$F_N = 9 \cdot 10^9 q_0 \lambda \frac{2}{a}$$

$$F_N \propto \frac{1}{a}$$

# Plano infinito uniformemente cargado

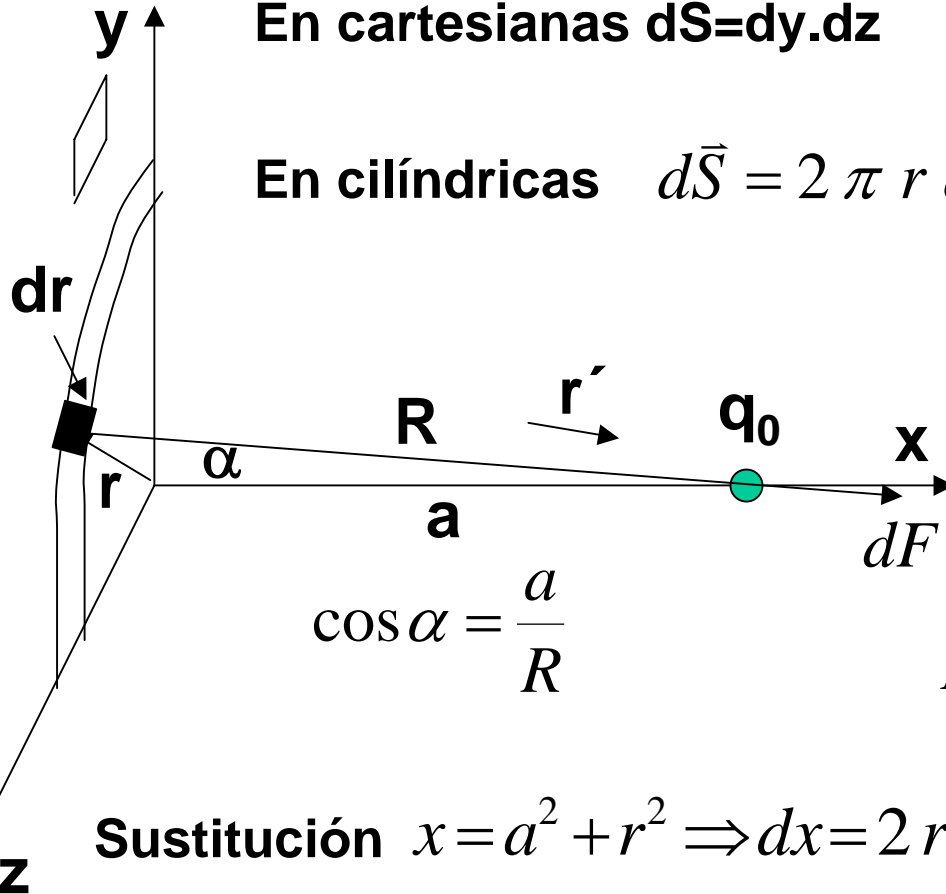
plano yz con  $\sigma$  C/m<sup>2</sup>

En cartesianas  $dS=dy.dz$

$$\vec{F} = 9 \cdot 10^9 \iint_{yz} q_0 \sigma \frac{dy dz}{r'^2} \vec{r}'$$

En cilíndricas  $d\vec{S} = 2 \pi r dr$

Componentes // plano se anulan



$$F_N = 9 \cdot 10^9 \int_0^{\infty} q_0 \sigma \frac{2 \pi r dr}{R^2} \frac{a}{R}$$

$$F_N = 9 \cdot 10^9 q_0 \sigma 2 \pi a \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{R}$$

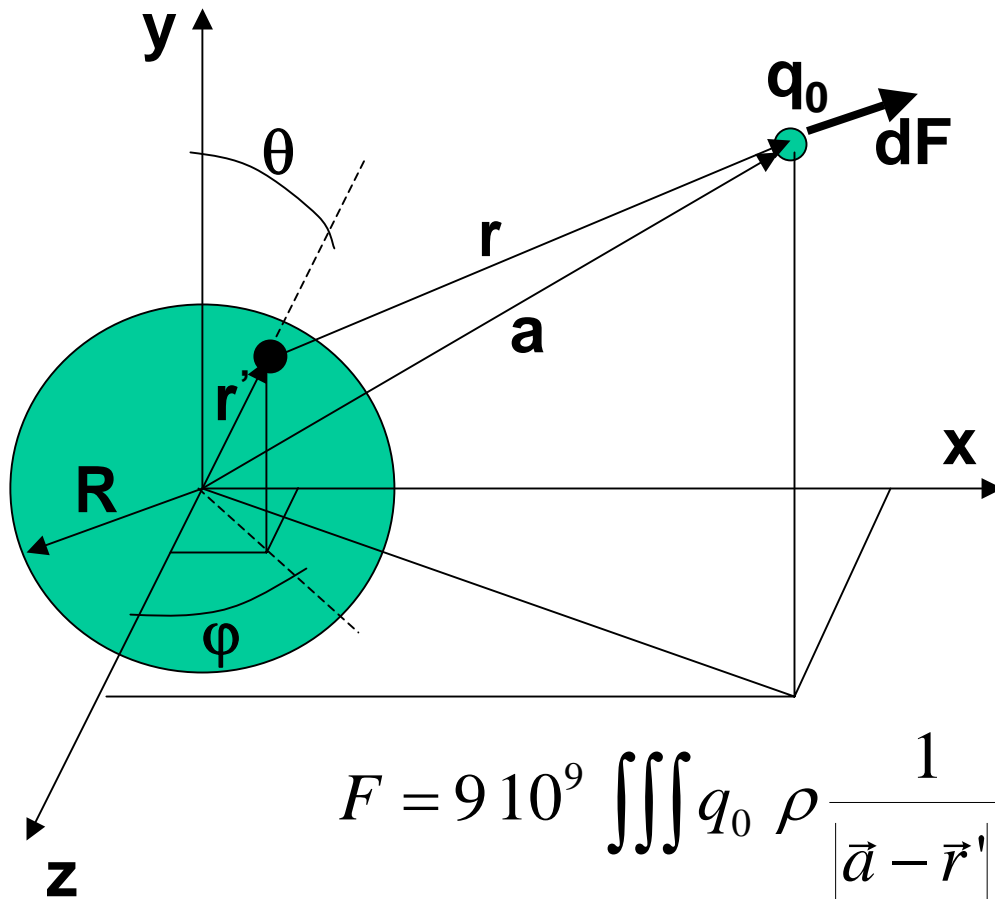
Sustitución  $x = a^2 + r^2 \Rightarrow dx = 2 r dr$

$$\int_0^{\infty} \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}$$

$$F_N = 9 \cdot 10^9 2 \pi \sigma q_0$$

$F_N$  independiente de  $a$

# Esfera uniformemente cargada ( $\rho$ C/m<sup>3</sup>)



$$dV = r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi$$

$$dF = 9 \cdot 10^9 \frac{q_0 \rho dV}{r^2}$$

$$F = 9 \cdot 10^9 \iiint q_0 \frac{\rho}{r^2} dV$$

$$r^2 = r'^2 + a^2 - r' a \cos(\theta)$$

$$F = 9 \cdot 10^9 \iiint q_0 \rho \frac{1}{|\vec{a} - \vec{r}'|^2} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi$$

$$\iiint \frac{1}{|\vec{a} - \vec{r}'|^2} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{a^2}$$

$$F = 9 \cdot 10^9 \rho q_0 \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{a^2} \vec{a}$$

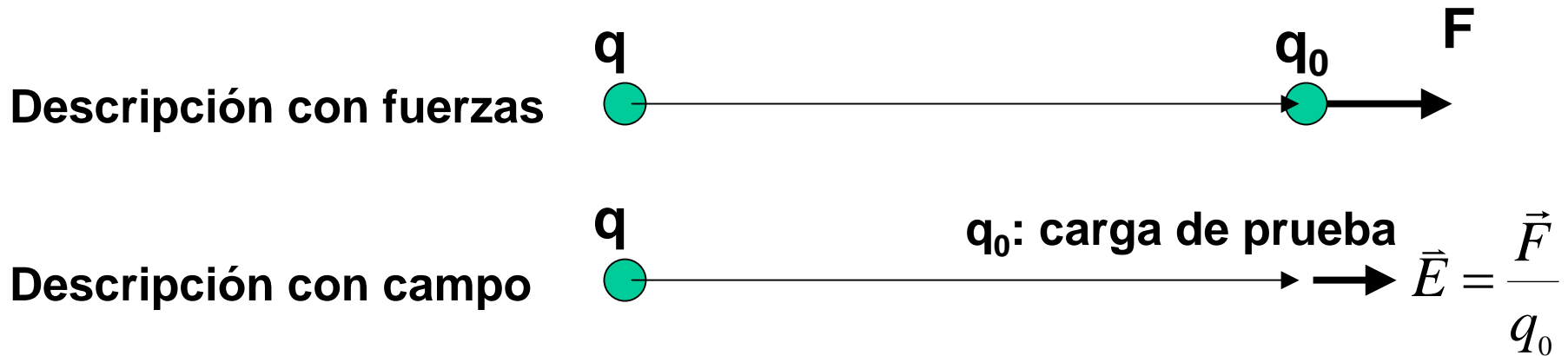
$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho = Q$$

**Es la misma fuerza que ejercería toda la carga de la esfera ( $Q$ ) concentrada en el origen**

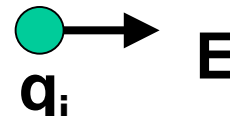
# Campo eléctrico

Si cargas quietas, ley de fuerza de Coulomb es sencilla, pero si cargas en movimiento las relaciones son complicadas por el retardo de la interacción (“viaja” a velocidad finita de  $\sim 300.000\text{Km/s}$ ) y por la aceleración

Conviene expresar la electrodinámica a partir del concepto de Campo eléctrico (y magnético)



**E: intermediario de la interacción eléctrica**

$$\vec{F} = q_i \vec{E}$$


## Definición de campo eléctrico

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Para que  $q_0$  no modifique distribución de carga generadora

$$[E] = \frac{N}{C}$$

Así,  $E$  producido por una carga o una distribución de cargas, puede pensarse como una propiedad del espacio

**En general, Campo es toda magnitud física que toma un valor definido en cada punto del espacio**

Ejemplos de campos escalares: de temperatura, de alturas, de presiones,...

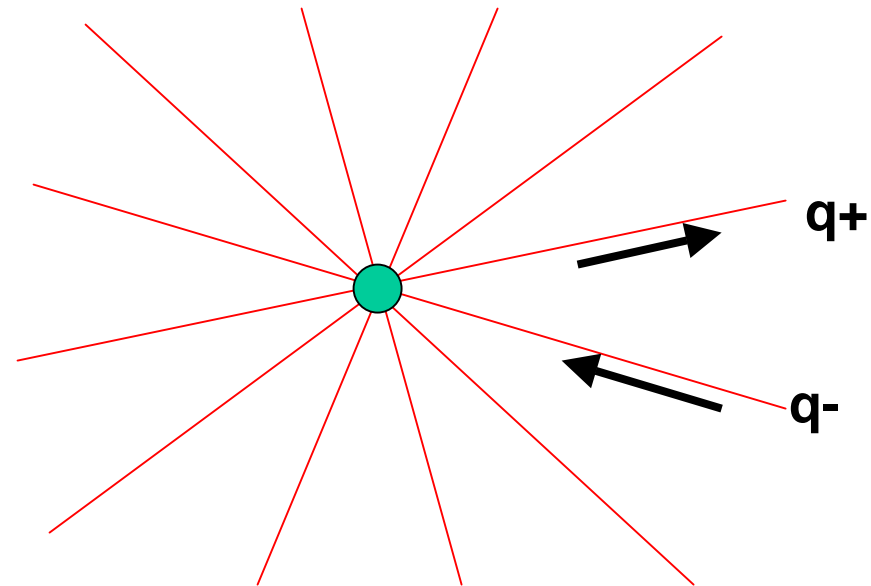
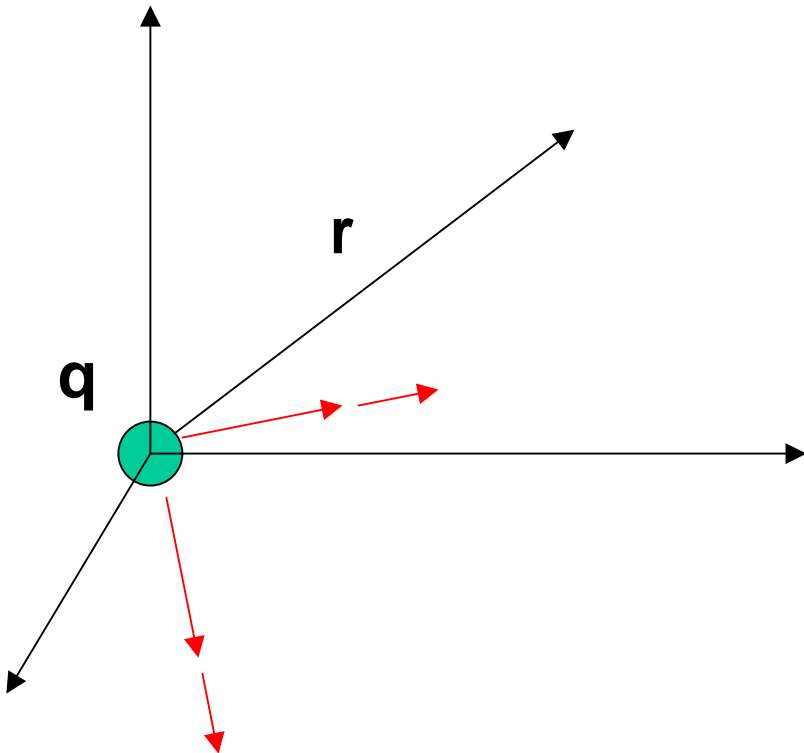
Ejemplos de campos vectoriales: gravitatorio, eléctrico, de velocidades, magnético,....

# Ejemplos de cálculo de campo eléctrico

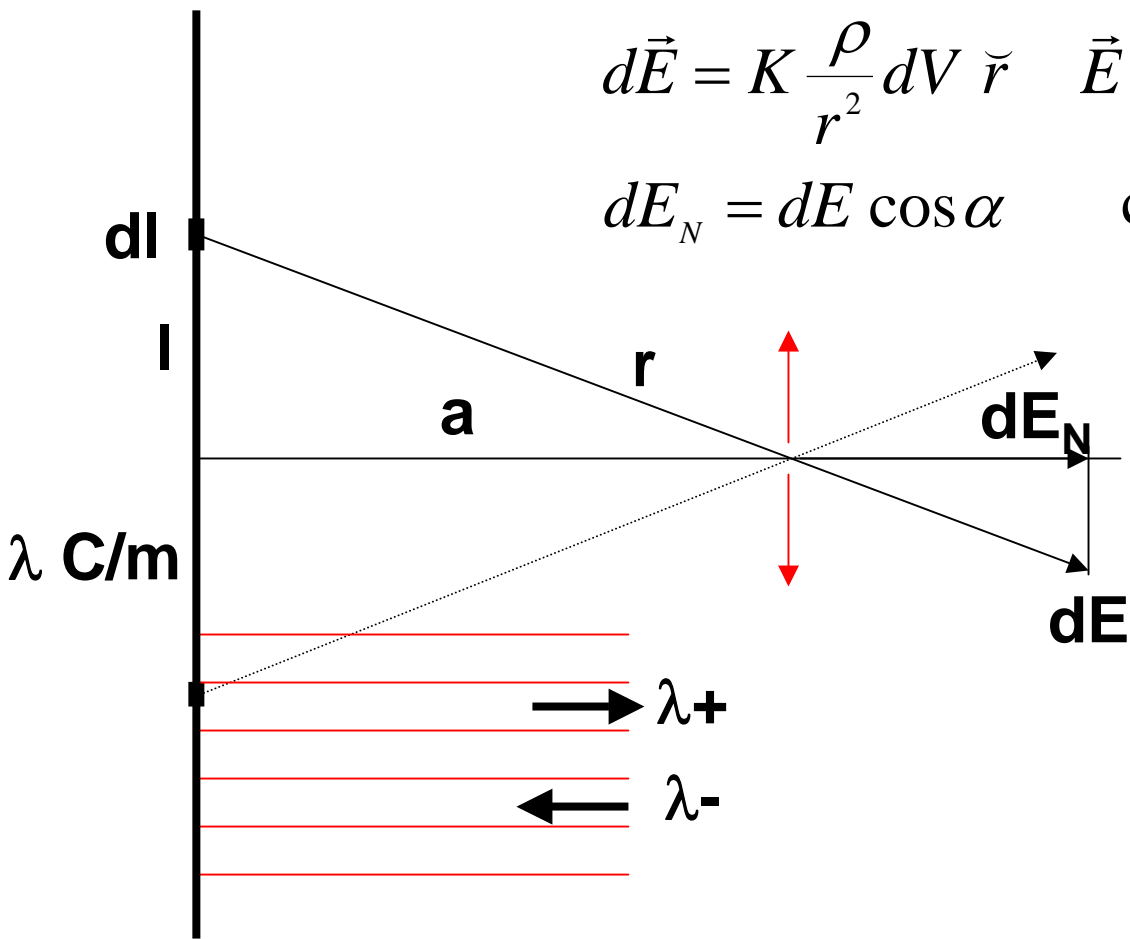
## Cargas puntuales:

$$\vec{E} = K \frac{q q_0}{r^2} \frac{1}{q_0} \vec{r} = K \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

Líneas de campo: puntos geométricos tangentes al vector E



# Hilo infinito con densidad lineal de carga $\lambda$ (C/m)



$$d\vec{E} = K \frac{\rho}{r^2} dV \vec{r} \quad \vec{E} = \int_V 9 \cdot 10^9 \frac{\lambda}{r^2} dl \vec{r}$$

$$dE_N = dE \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}$$

$$E_N = 9 \cdot 10^9 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda a dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$$

$$E_N = 9 \cdot 10^9 \lambda \frac{2}{a}$$

$$E_N \propto \frac{1}{a}$$

# Plano infinito uniformemente cargado (plano yz con $\sigma$ C/m<sup>2</sup>)

En cartesianas  $dS=dy.dz$   $\vec{E} = 9 \cdot 10^9 \iint_{yz} \sigma \frac{dy dz}{r'^2} \vec{r}'$

En cilíndricas  $d\vec{S} = 2 \pi r dr$

**Componentes // plano se anulan**

$$\cos \alpha = \frac{a}{R}$$

$$E_N = 9 \cdot 10^9 \int_0^\infty \sigma \frac{2 \pi r dr}{R^2} \frac{a}{R}$$

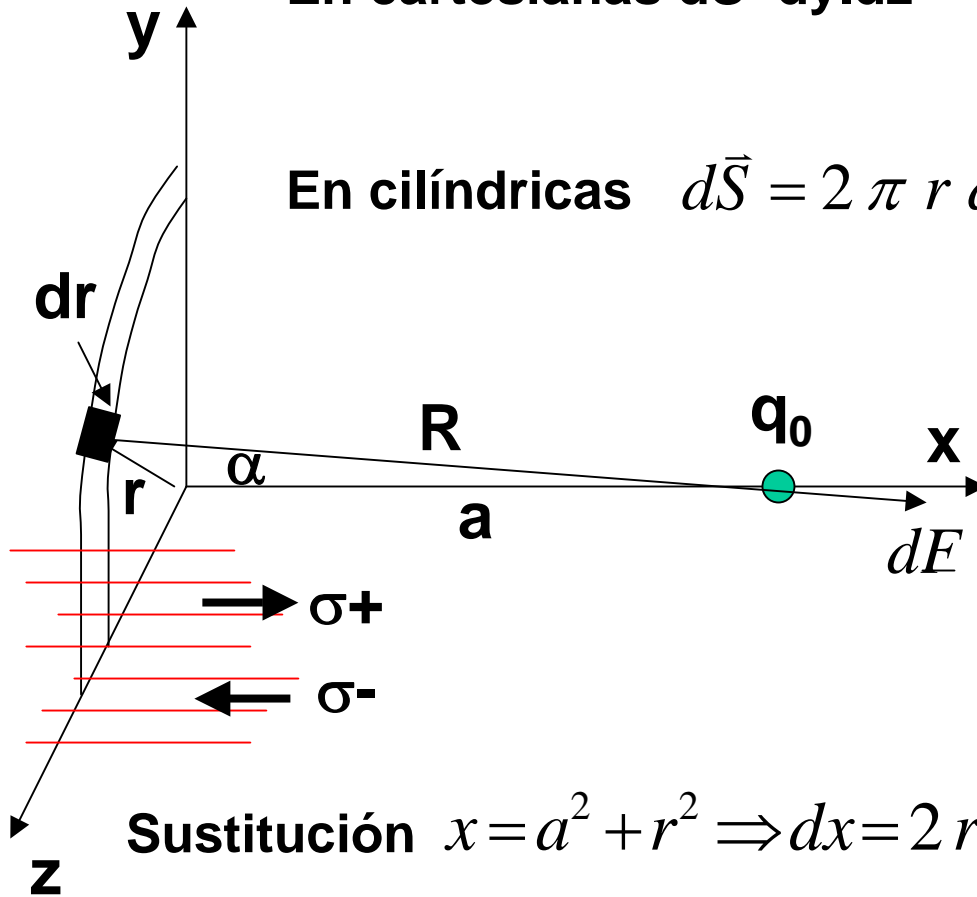
$$E_N = 9 \cdot 10^9 \sigma 2 \pi a \int_0^\infty \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}$$

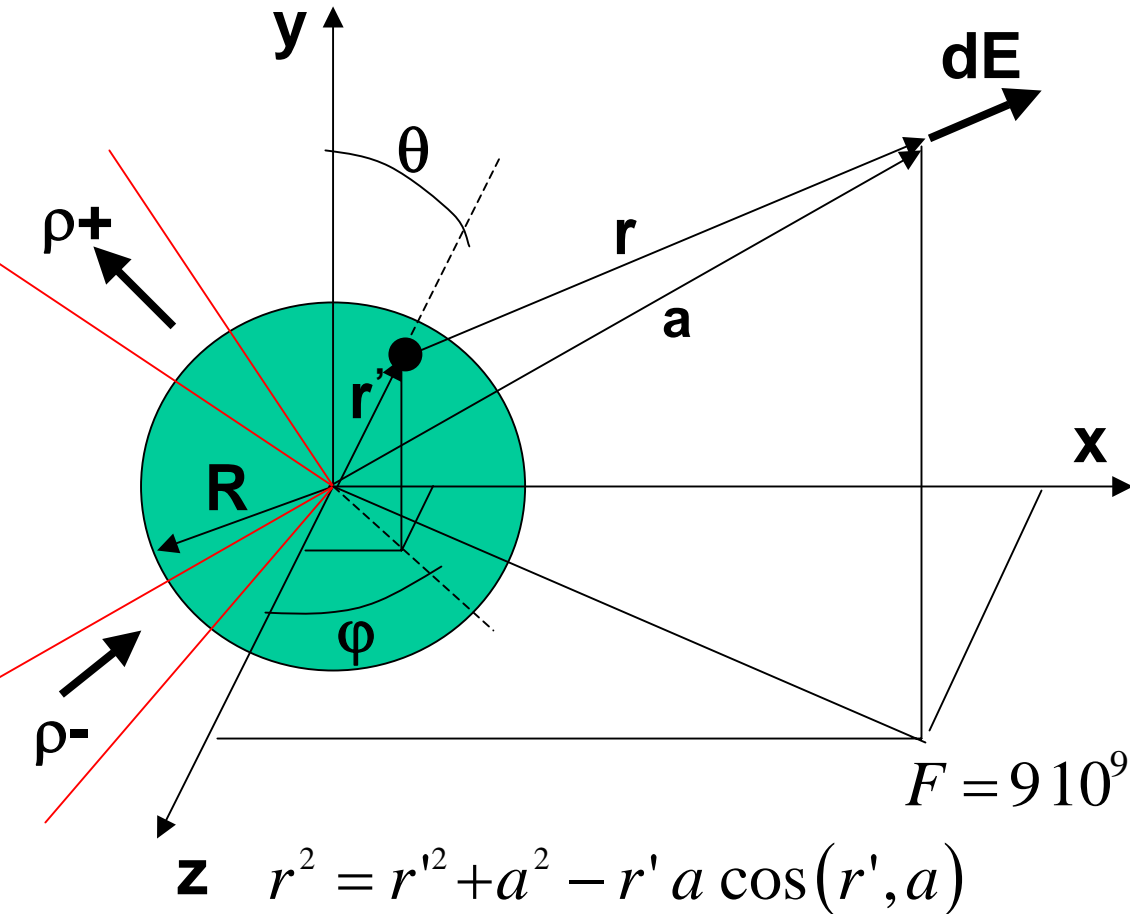
Sustitución  $x = a^2 + r^2 \Rightarrow dx = 2 r dr$

$$E_N = 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \pi \sigma$$

**$E_N$  independiente de  $a$**



# E en exterior de esfera uniformemente cargada ( $\rho$ C/m<sup>3</sup>)



$$dV = r'^2 \sin \theta \, dr' \, d\theta \, d\phi$$

$$r > R \quad dE = 9 \cdot 10^9 \frac{\rho \, dV}{r^2}$$

$$E = 9 \cdot 10^9 \iiint \frac{\rho}{r^2} \, dV$$

$$F = 9 \cdot 10^9 \iiint \rho \frac{1}{|\vec{a} - \vec{r}'|^2} r'^2 \sin \theta \, dr' \, d\theta \, d\phi$$

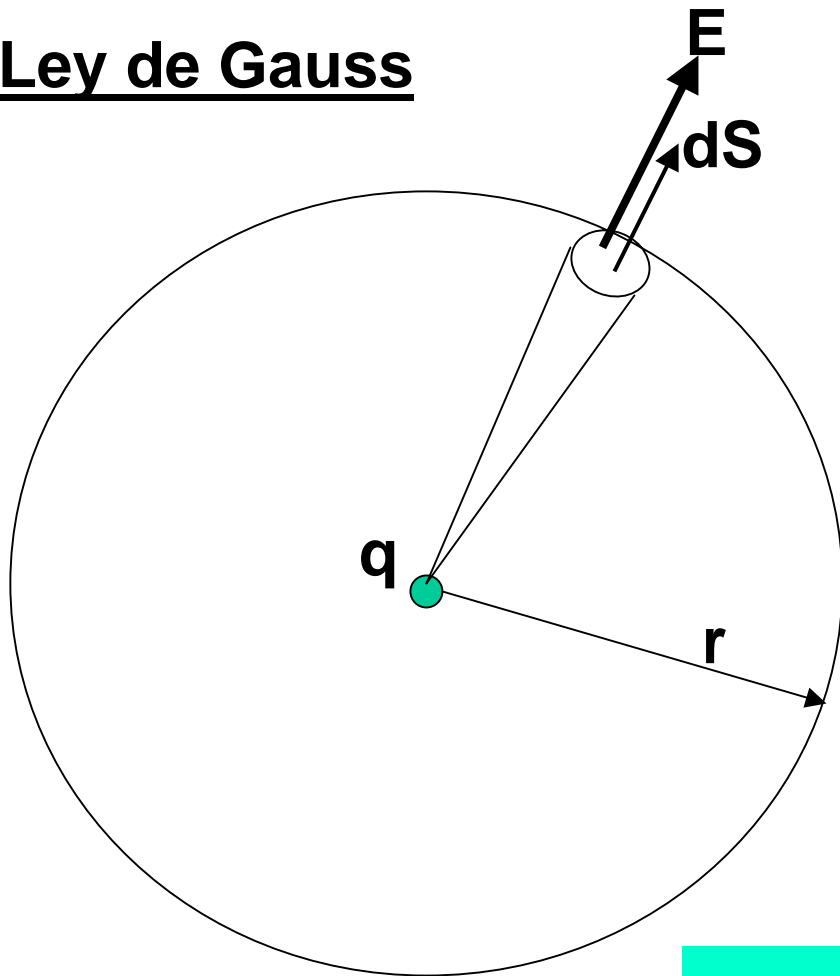
$$\iiint \frac{1}{|\vec{a} - \vec{r}'|^2} r'^2 \sin \theta \, dr' \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{a^2}$$

$$E = 9 \cdot 10^9 \rho \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{a^2}$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho = Q$$

**Es el mismo campo que crearía toda la carga de la esfera (Q) concentrada en el origen**

# Ley de Gauss



E en r  $E = 9 \cdot 10^9 \frac{q}{r^2}$

si  $9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \implies$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$$

$\epsilon_0$ : permitividad en vacío

$$E = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \implies E \cdot 4 \pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

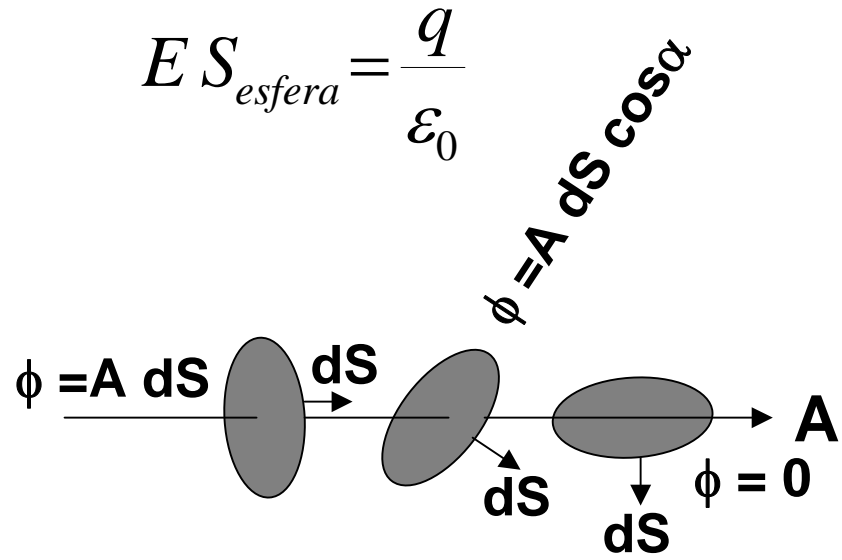
$$E S_{esfera} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En la forma mas general

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

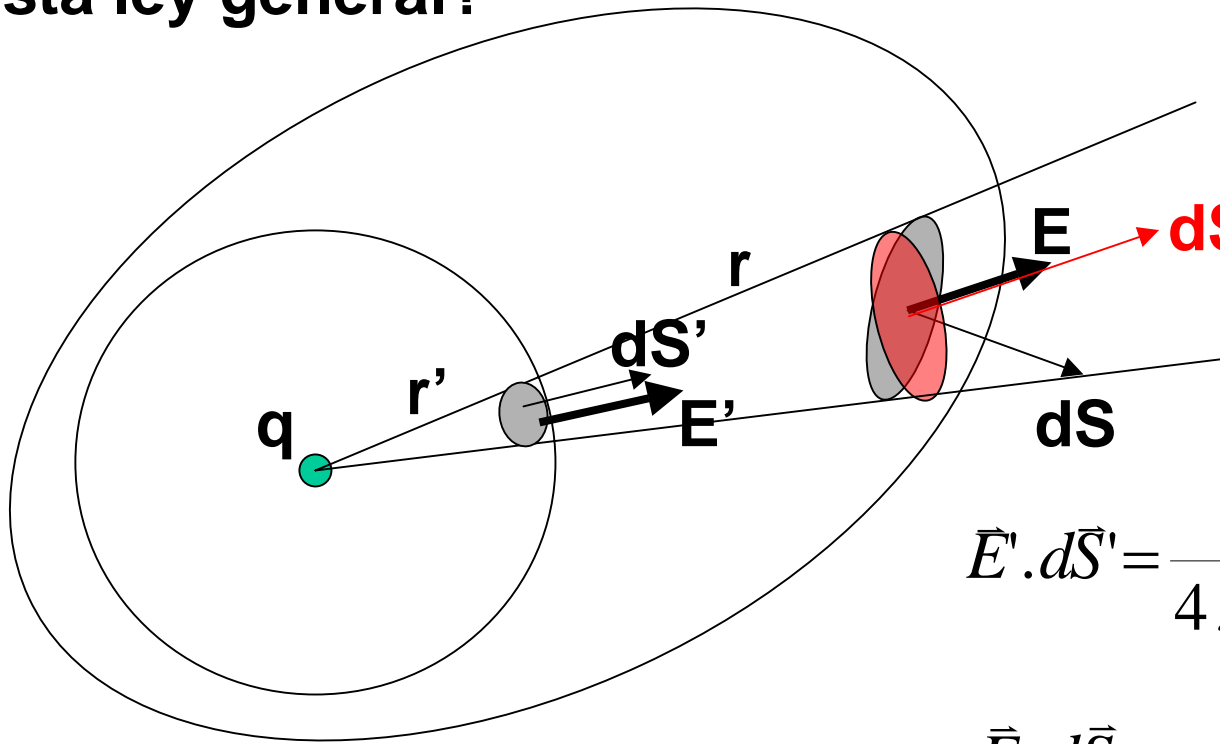
Flujo de un vector

$$\Phi = \iint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



Es esta ley general?

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



**Ley de Gauss**

$$\vec{E}' \cdot d\vec{S}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \vec{r}' \cdot d\vec{S}'$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{\vec{r}' \cdot d\vec{S}'}{r'^2} = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} \Rightarrow \oiint \vec{E}' \cdot d\vec{S}' = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

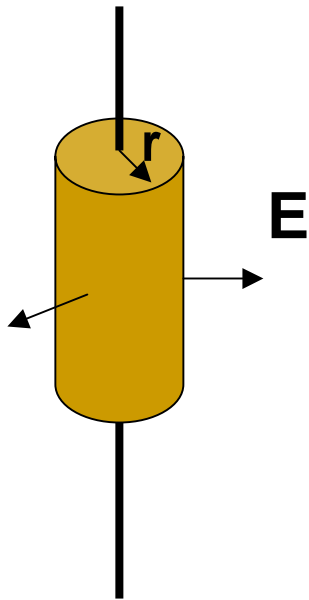
**Vale para cualquier superficie cerrada**

**El flujo del vector campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada por esa superficie dividida por la permitividad en vacío**

# Ley de Gauss: una de las cuatro ecuaciones de Maxwell

**Asemás:** útil para calcular E en situaciones de alta simetría

Hilo infinito cargado con  $\lambda$  C/m

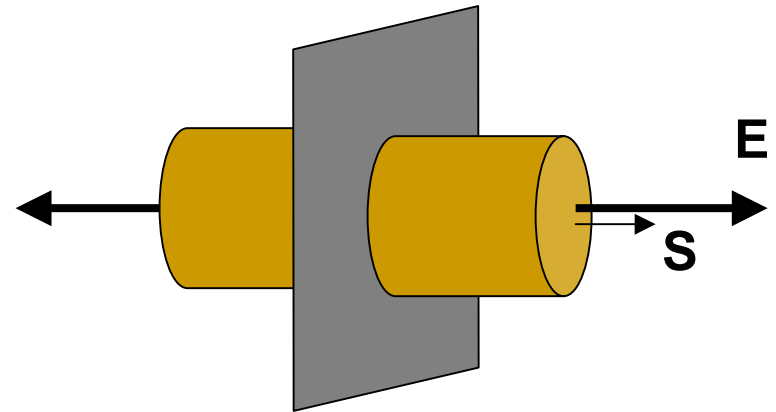


$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Plano infinito con  $\sigma$  C/m<sup>2</sup>

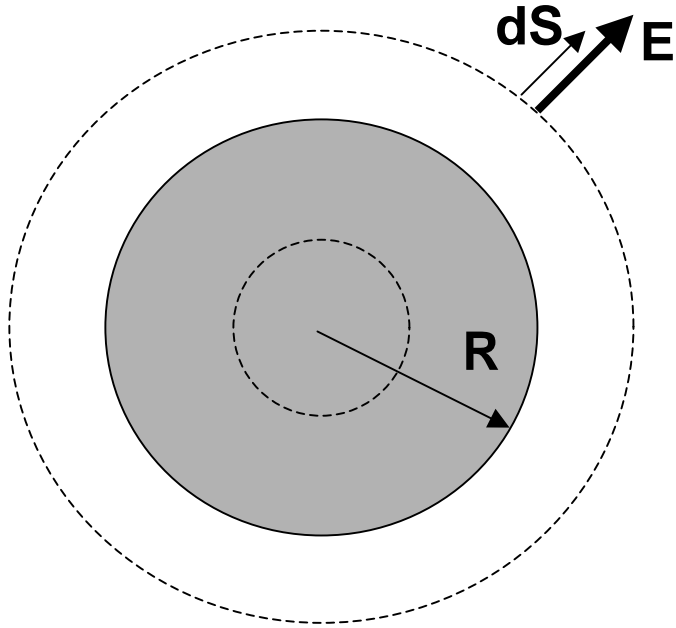


$$E 2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

**Se pueden excluir las cargas externas a la sup. gaussiana en el cálculo de E porque si el hilo o el plano son infinitos E solo tiene componentes normales a ellos**

# Esfera cargada uniformemente en volumen $\rho$ (C/m<sup>3</sup>)



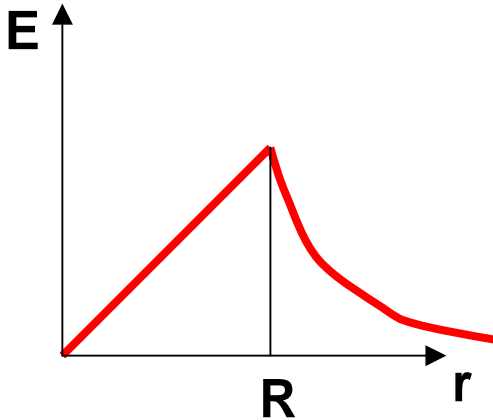
$$r > R \quad E 4 \pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}$$

$$r < R \quad E 4 \pi r^2 = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{r \rho}{3 \epsilon_0}$$

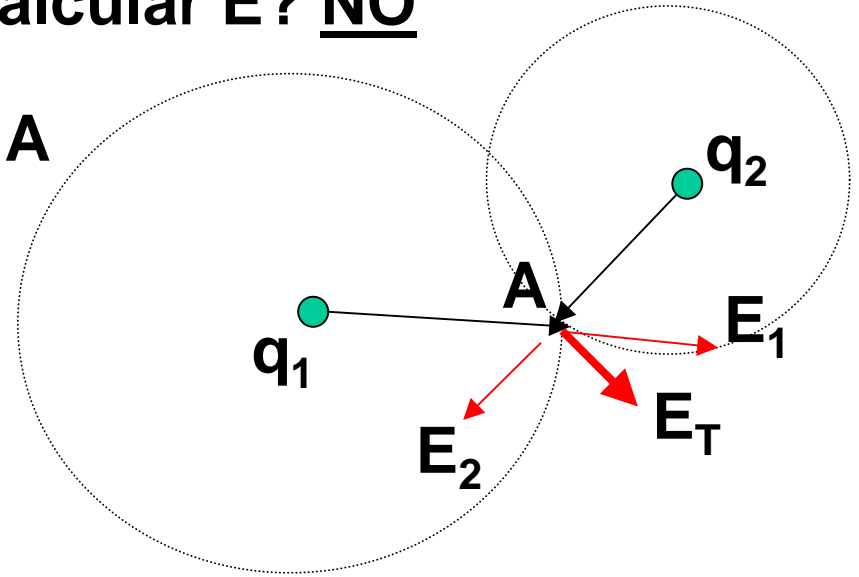
$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$



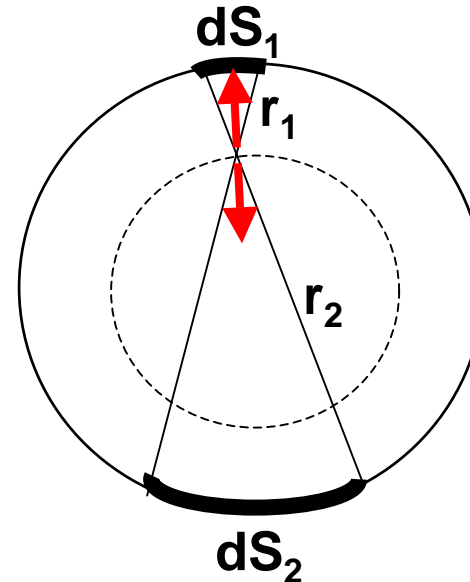
Es esta una forma general de calcular E? **NO**

Ej: E de 2 cargas puntuales en A

E total en A no lo puedo calcular solo usando Gauss con alguna de las cargas



Solo en caso de simetría se puede calcular el  $E_T$  usando parte de la distribución de cargas



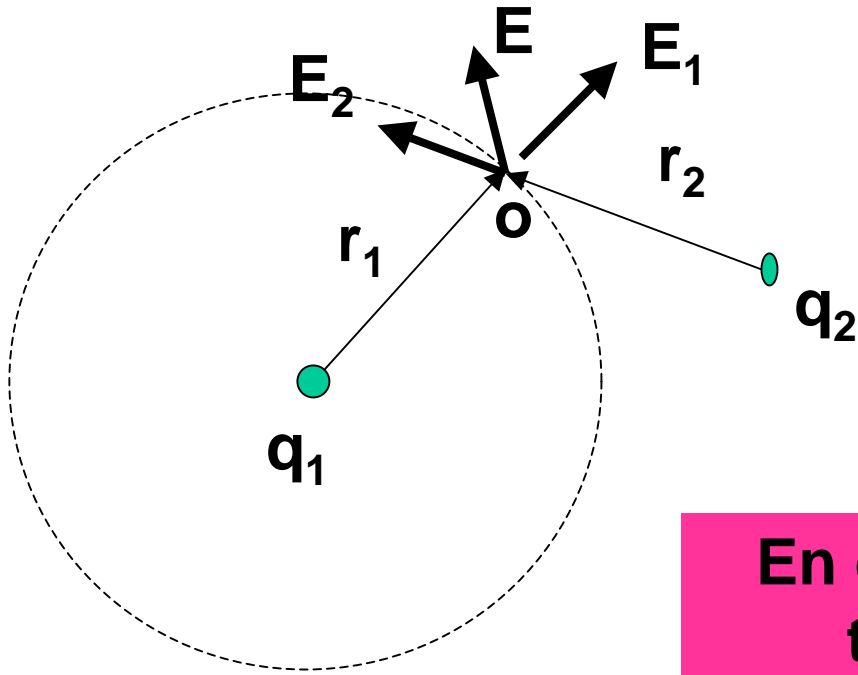
$$dE = K \frac{\sigma dS}{r^2}$$

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$$

Por ejemplo en la esfera, por que se usan solo las cargas interiores a la superficie de integración?

Las cargas "exteriores" a sup. de integración compensan efectos

## Empleo de la ley de Gauss para cálculo de E total: caso de 2 cargas



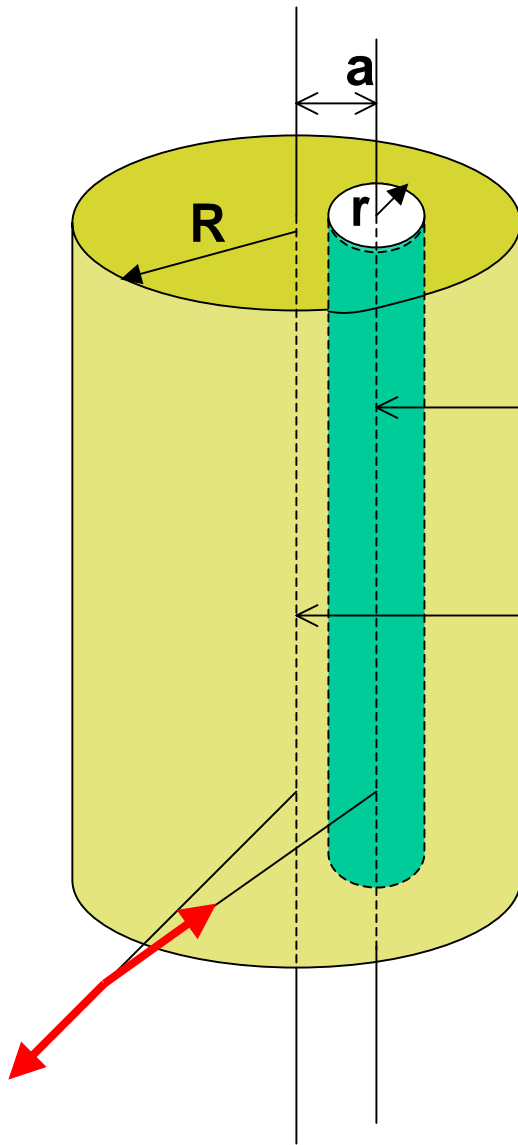
$$E_1 4 \pi r_1^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2}$$

En el punto O el campo total es E y no E<sub>1</sub>

En casos de alta simetría, las cargas “exteriores” a la superficie gaussiana se compensan por lo que se puede calcular el E total considerando solo las cargas encerradas en ella. Pero en caso de falta de simetría, el campo total usando Gauss debe calcularse por superposición, o sea, en este caso calculando también E<sub>2</sub> por Gauss y componiendo

# Cálculo de E por superposición en geometrías complicadas



$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho \pi R^2 l}{2 \pi b l \epsilon_0}$$

$$E' = \frac{-\rho \pi r^2 l}{2 \pi (b-a) l \epsilon_0}$$

$$\vec{E}' \quad \vec{E}$$

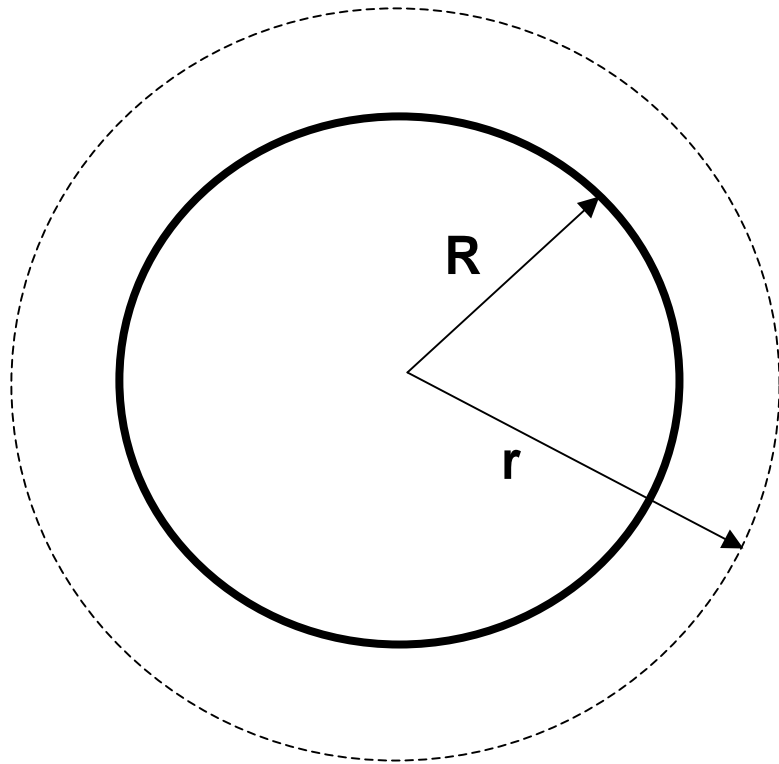
$$E_T = E - E'$$

$$\Rightarrow \vec{E}_T$$

Ojo!

$$\vec{E}_T = \vec{E} - \vec{E}'$$

# Esfera uniformemente cargada en superficie $\sigma$ (C/m<sup>2</sup>)



$$Q = 4 \pi R^2 \sigma$$

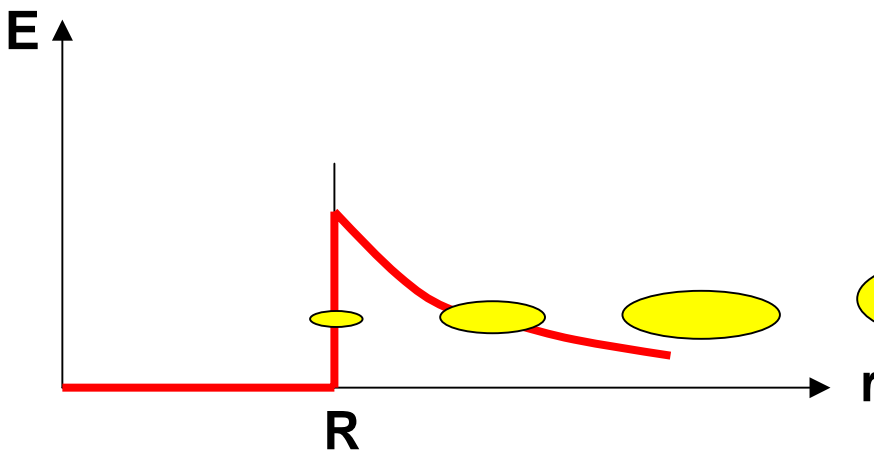
$$r > R \quad E 4 \pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$r < R \quad E = 0$$

$$r > R \quad \vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}$$

Igual al producido por Q en el origen

$$r < R \quad E = 0$$

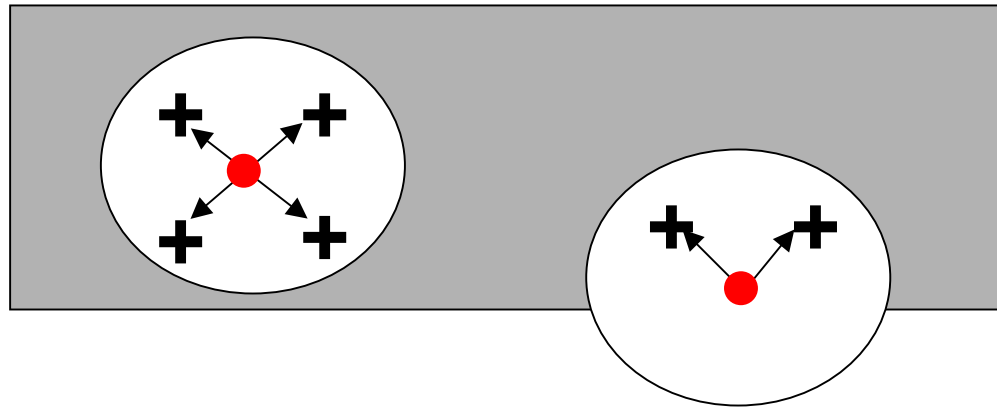


Significado de la discontinuidad

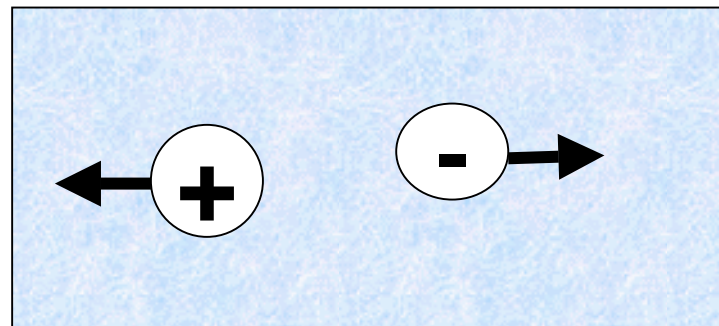
# Distinto tipo de comportamiento eléctrico de los materiales

Conductores: Son aquellos que permiten el movimiento de las cargas eléctricas en su interior (electrones débilmente ligados de órbitas exteriores en metales o iones)

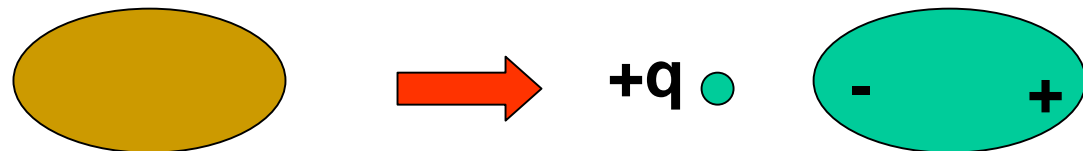
Metales



Electrolitos



Polarización



**Aislantes o dieléctricos: materiales que por el tipo de uniones químicas no presentan portadores libres (cargas con capacidad de desplazarse)**

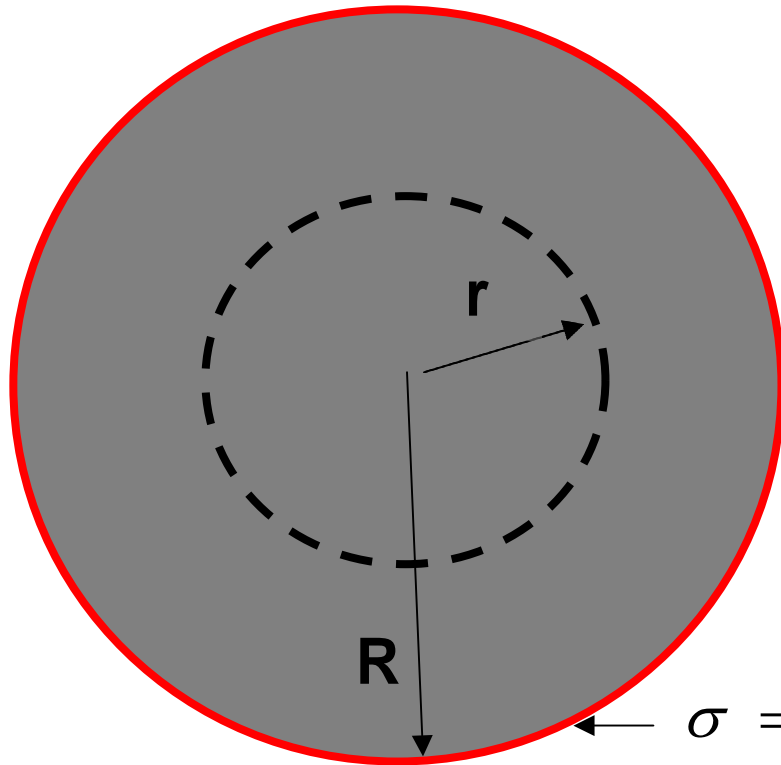
**Semiconductores: materiales que en condiciones normales se comportan como aisladores pero que ante determinadas solitudes (potencial eléctrico, radiación,..) se comportan como conductores**

**Superconductores: materiales que en determinadas condiciones permiten que los electrones se mueven sin ningún tipo de dificultad (no presentan resistencia eléctrica)**

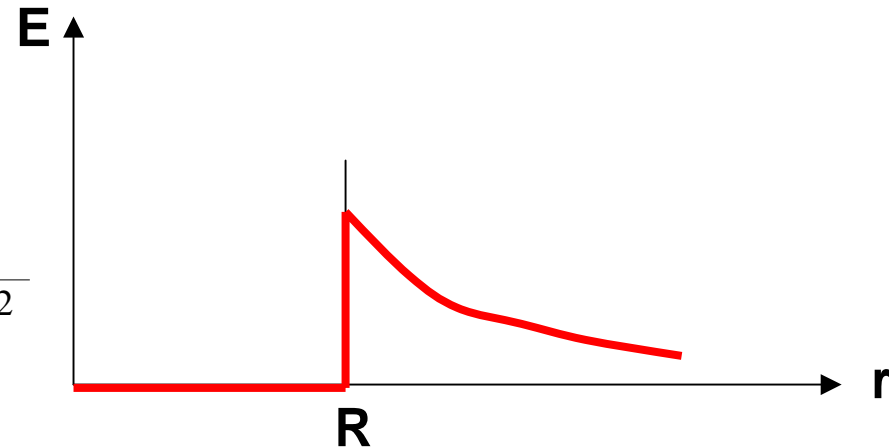
# Comportamiento electrostático de los conductores

Si hay carga en  $r < R \Rightarrow$  hay  $E$  en  $r$ ,  
y si el material es conductor (hay  
cargas libres) estas se deben mo-  
ver (alejándose) por acción de  $E$

**En situación electrostática,  $q$  en  
superficie en los conductores**



$$\sigma = \frac{Q}{4 \pi R^2}$$



**$E = 0$  dentro de los  
conductores en  
situación  
electrostática**

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

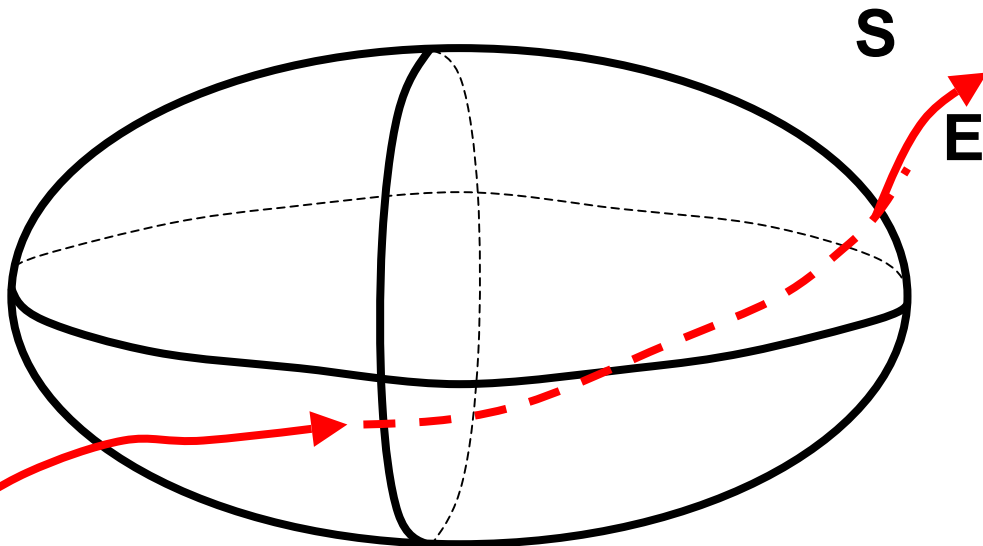
**$E$  creado por carga superficial  
debe ser normal a  $S$  en la  
superficie pues sino habría  
componente tangencial y cargas  
se moverían**

# Expresión integral de la Ley de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss en forma diferencial

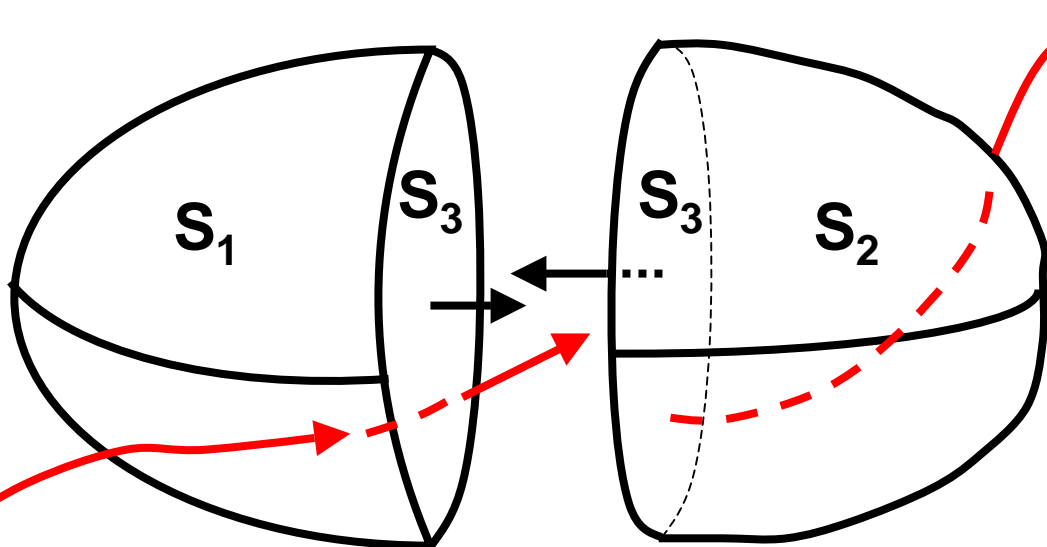
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



$$- \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} \frac{V_i}{V_i}$$

$$\lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V_i} = \nabla \cdot \vec{E}$$



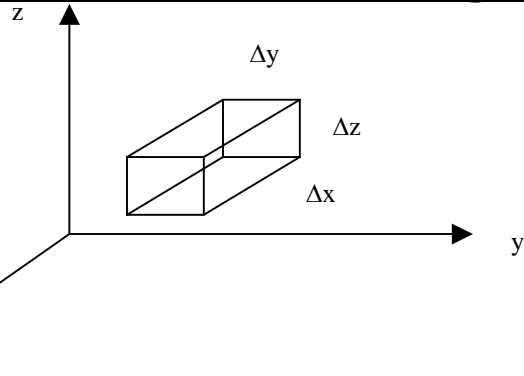
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V_i} V_i$$

$$= \int \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

**Teorema de la divergencia**

# Teorema de la Divergencia o de Gauss



$$\text{Div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V_i} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

**En dirección x**  $[E_x)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - E_x)_{x-\frac{\Delta x}{2}}] \Delta y \Delta z$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = [E_x)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - E_x)_{x-\frac{\Delta x}{2}}] \Delta y \Delta z + [E_y)_{y+\frac{\Delta y}{2}} - E_y)_{y-\frac{\Delta y}{2}}] \Delta z \Delta x + [E_z)_{z+\frac{\Delta z}{2}} - E_z)_{z-\frac{\Delta z}{2}}] \Delta x \Delta y$$

$$E_x)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}} = E_x)_{x} \pm \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} \right)_x \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} \right)_x \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \pm \dots$$

$$\left[ \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} \right)_x \Delta x + \frac{2}{3!} \left( \frac{\partial^3 E_x}{\partial x^3} \right)_x \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^3 + \dots \right] \Delta y \Delta z + \left[ \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} \right)_y \Delta y + \frac{2}{3!} \left( \frac{\partial^3 E_y}{\partial y^3} \right)_y \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^3 + \dots \right] \Delta z \Delta x +$$

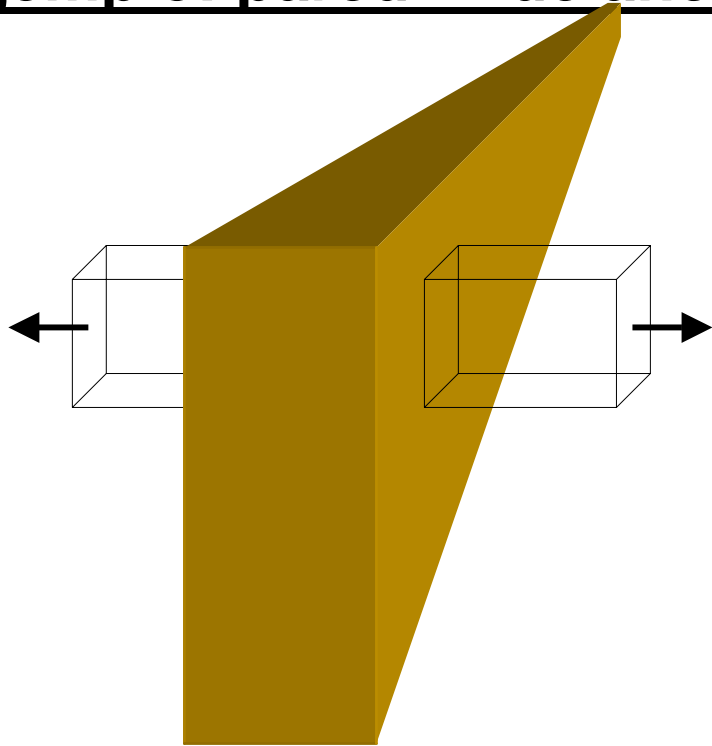
$$\left[ \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_z \Delta z + \frac{2}{3!} \left( \frac{\partial^3 E_z}{\partial z^3} \right)_z \left( \frac{\Delta z}{2} \right)^3 + \dots \right] \Delta x \Delta y$$

$$\left[ \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} \right)_x + \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} \right)_y + \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_z + o(\Delta x^3, \Delta y^3, \Delta z^3) \right]$$

$$\lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V_i} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

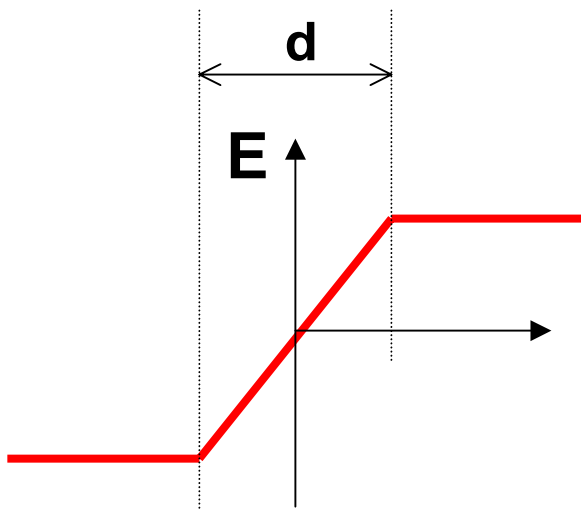
# Ejemplo: pared $\infty$ de ancho $d$ y densidad de carga uniforme $\rho$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$|x| > \frac{d}{2} \quad E 2S = \frac{\rho S d}{\epsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{\rho d}{2 \epsilon_0}$$

$$|x| < \frac{d}{2} \quad E 2S = \frac{\rho S 2x}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$



$$x > \frac{d}{2} \quad E = \frac{\rho d}{2 \epsilon_0}$$

$$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \quad E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$

$$x < -\frac{d}{2} \quad E = -\frac{\rho d}{2 \epsilon_0}$$

**En  $x \pm d/2$  las  
soluciones  
convergen**

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{d\vec{E}}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



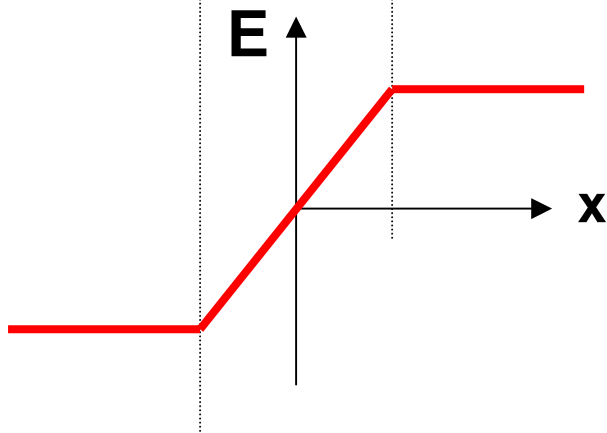
$$x > \frac{d}{2} \quad \frac{dE}{dx} = 0 \quad E = \alpha$$

$$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \quad \frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x + cte$$

$$x < -\frac{d}{2} \quad \frac{dE}{dx} = 0 \quad E = \beta$$

**Condiciones de borde**  $E(0) = 0 \Rightarrow cte = 0$

$$E\left(\pm \frac{d}{2}\right) = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \quad \frac{\rho d}{2 \epsilon_0} = \alpha \quad -\frac{\rho d}{2 \epsilon_0} = \beta \Rightarrow \alpha = -\beta$$



$$x > \frac{d}{2} \quad E = \frac{\rho d}{2 \epsilon_0}$$

$$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \quad E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x$$

$$x < -\frac{d}{2} \quad E = -\frac{\rho d}{2 \epsilon_0}$$

# Energía electrostática

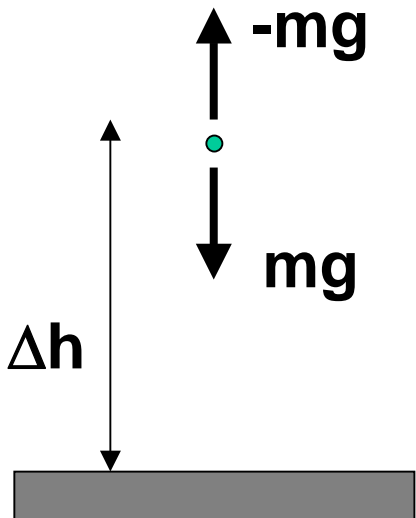
Energía potencial:

gravitatoria  $\Delta E_{PG} = m g \Delta h$

elástica  $\Delta E_{PE} = \frac{1}{2} k \Delta x^2$

$$\Delta E_p = W (Fzas \text{ Ext}) = -W (Fzas \text{ propias})$$

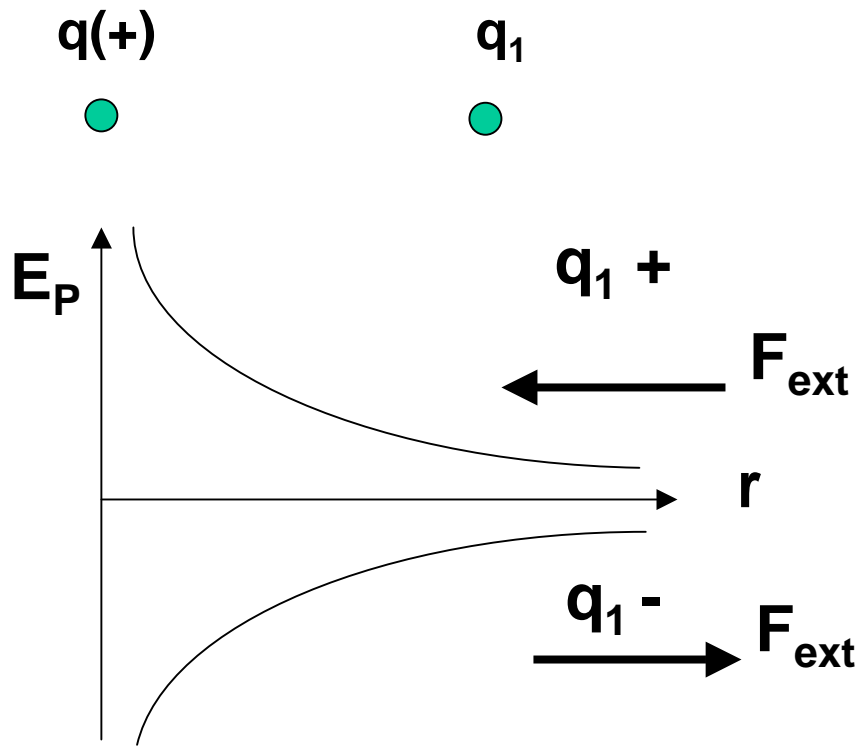
$$W = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = -\int \vec{F}_{int} \cdot d\vec{l}$$



**Si cae (acción espontánea que no requiere intervención externa) el sistema (masa-Tierra) pierde energía potencial. Si sube (solo posible por acción de un agente externo) el sistema gana energía potencial**

**Como medir  $E_p$ ? Solo por el trabajo realizado para crear la situación concreta sin el agrado de ningún otro tipo de energía ( $E_C$ ), o sea con  $F = -F(\text{propia})$  y en pasos infinitesimales para no acelerar**

# Energía electrostática de un sistema de dos cargas



$$\Delta W_{F_{ext}} = \int_{\infty}^r \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r q_1 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta W_{F_{ext}} = - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} q q_1 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$\Delta W_{F_{ext}} = \Delta E_p = \frac{q q_1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r}$$

**+ - : (fuerzas atractivas) la energía potencial disminuye cuando acerco las cargas (espontáneo)**

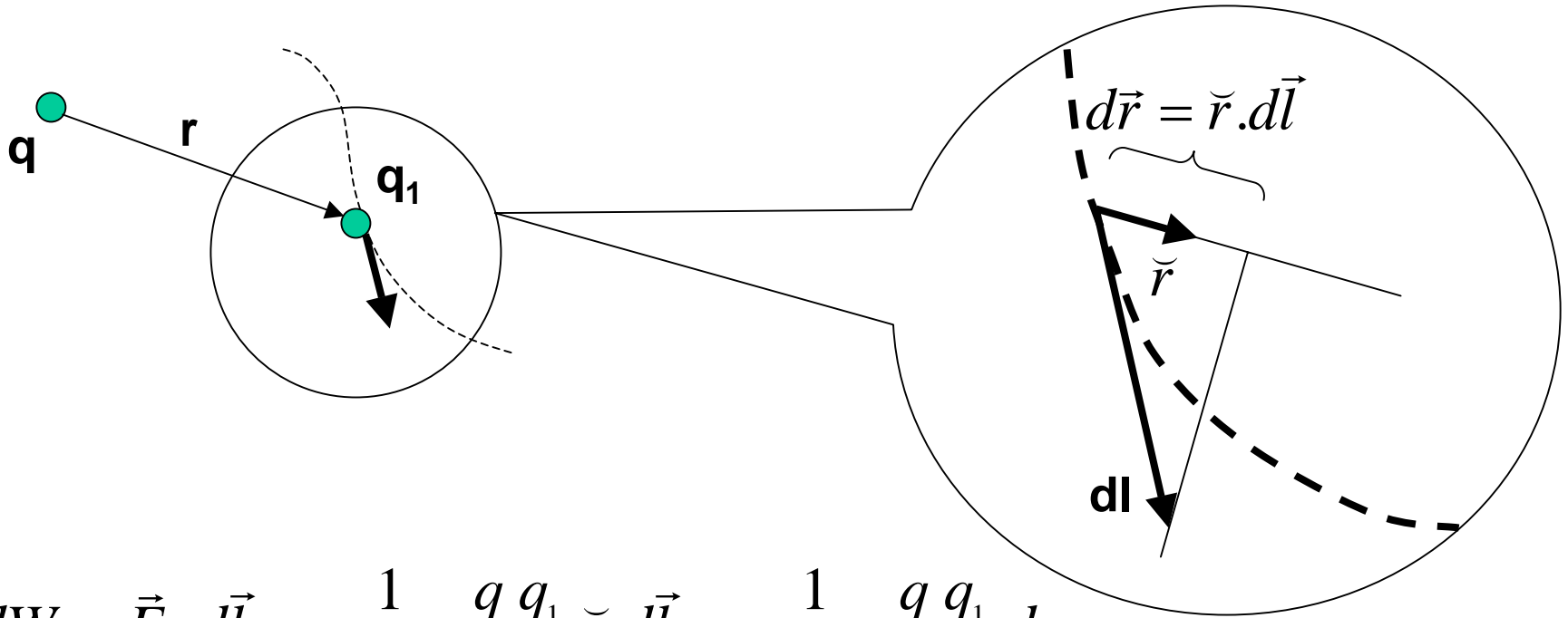
**++ o -- : (fuerzas repulsivas) la energía potencial aumenta cuando acerco las cargas (solo posible por acción de un agente exterior)**

Si cargas van de  $r_1$  a  $r_2$

$$\Delta E_p = \frac{q q_1}{4 \pi \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$\Delta E > 0$  si ++ o -- y acerco o si +- y alejo y  $< 0$  si ...

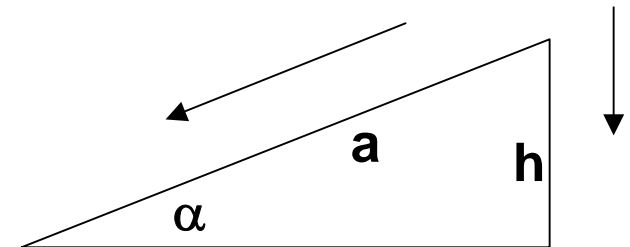
**Fuerza de Coulomb es conservativa, o sea el W necesario para mover una carga entre dos puntos es independiente del camino recorrido (Idem fuerzas gravitatorias)**



$$dW = \vec{F}_c \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_1}{r^2} \vec{r} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_1}{r^2} dr$$

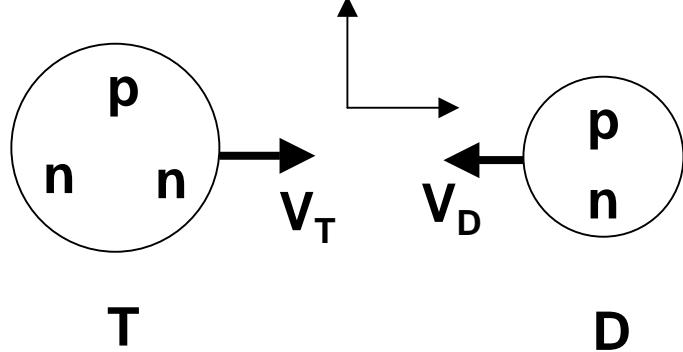
**Caso gravitatorio sin  $f_r$**

$$\Delta W = m g h = m g a \text{ sen } \alpha$$



**Ejemplo:** v necesaria para acercarse a un núcleo de Tritio y otro de Deuterio a distancia de  $10^{-15}$  m para producir fusión

En sistema CM



$$\frac{1}{2} M_T V_T^2 + \frac{1}{2} M_D V_D^2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_T q_D}{d}$$

$$M_T V_T - M_D V_D = 0 \Rightarrow V_D = \frac{M_T V_T}{M_D}$$

$$q_T = q_D = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e \cdot 2000 \approx m_p \approx \frac{M_T}{3} = \frac{M_D}{2}$$

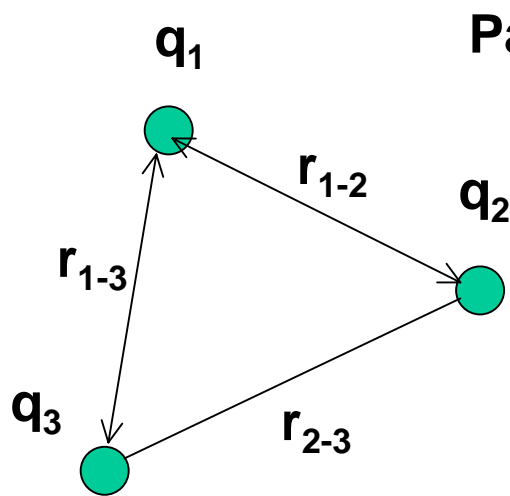
$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$$

$$V_T = 4,3 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$V_D = 6,5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

**En un gas velocidad es proporcional al cuadrado de la temperatura; las velocidades anteriores equivalen a temperaturas del orden de  $10^7$ - $10^8$  °K**

# Energía electrostática de un sistema de cargas



Para traer \$q\_1\$ aislada desde \$\infty\$  $\Delta W = 0 \Rightarrow \Delta E_P = 0$

Para traer ahora \$q\_2\$  $\Delta E_P = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{1-2}} \right)$

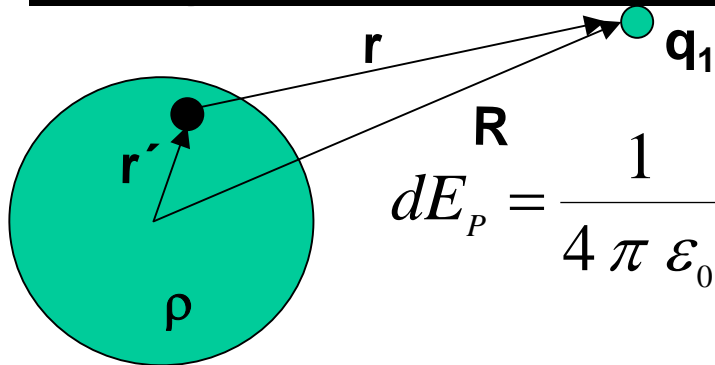
Y para traer \$q\_3\$

$$\Delta E_P = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{1-2}} \right) + \frac{q_1 q_3}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{1-3}} \right) + \frac{q_2 q_3}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{2-3}} \right)$$

\$E\_P\$ de un sistema de cargas puntuales

$$\Delta E_P = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{i-j}}$$

# Energía electrostática de cargas distribuidas



$$dE_P = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 \rho dV}{r} \Rightarrow E_P = \frac{q_1 \rho}{4 \pi \epsilon_0} \iiint \frac{r'^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{|\vec{R} - \vec{r}'|}$$

\$E\_P\$ igual al de \$Q\$ en origen

$$E_P = \frac{q q_1}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

# Potencial eléctrico

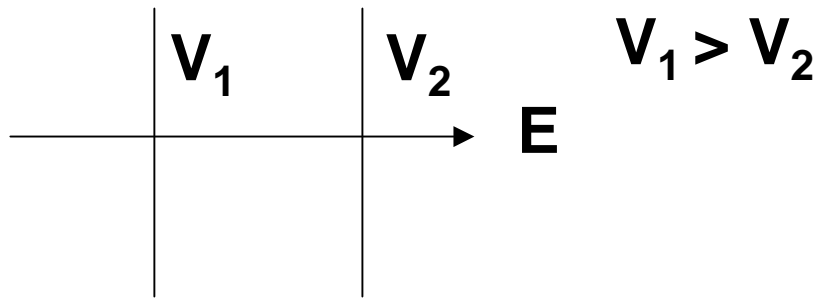
$$F \Rightarrow E = F/q$$

$$E_p \Rightarrow V = E_p/q$$

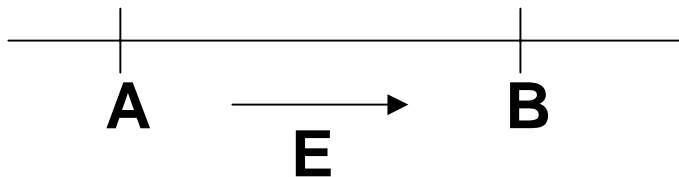
**Diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos: cambio de la energía potencial cuando una carga de prueba se mueve entre esos dos puntos dividido el valor de la carga**

$$\Delta V_{a-b} = \frac{\Delta E_p}{q} = \frac{W_{b-a}}{q} = \int_a^b \frac{\vec{F}_{ext}}{q} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{(-q \vec{E}) \cdot d\vec{l}}{q}$$

$$\Delta V_{a-b} = V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



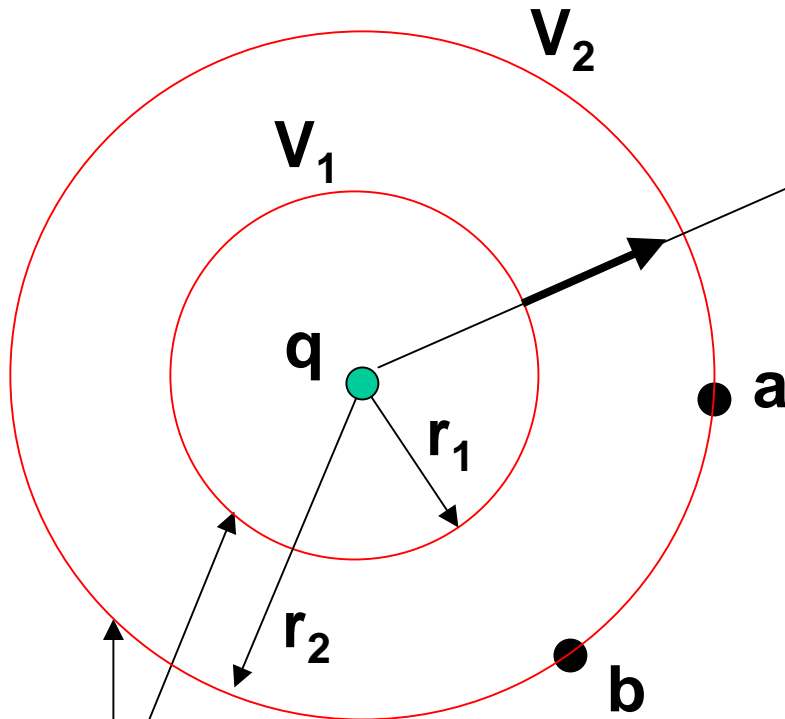
**E apunta en la dirección en que V decrece**



**De A a B el potencial decrece  
de B a A el potencial aumenta**

$$[V] = J/C = \text{Volt (V)}$$

## Carga puntual



$$V_2 = V_2 - V_\infty = \frac{\Delta E_{P(\infty-2)}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Delta V_{1-2} = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$q+ \Rightarrow r_1 \rightarrow r_2 \quad \Delta V < 0$$

$$r_2 \rightarrow r_1 \quad \Delta V > 0$$

$$q- \Rightarrow r_1 \rightarrow r_2 \quad \Delta V > 0$$

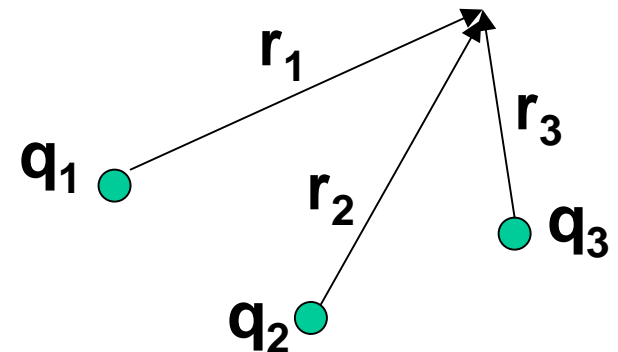
$$r_2 \rightarrow r_1 \quad \Delta V < 0$$

$$\Delta V_{a-b} = V_b - V_a = 0$$

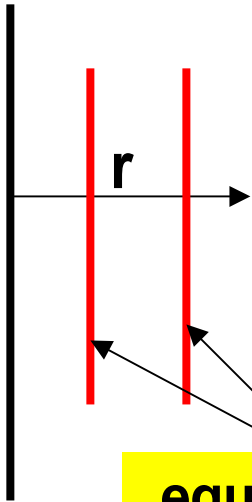
**Superficies equipotenciales**

## Sistema de cargas puntuales

$$V = V - V_\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



# Potencial de una linea infinita con carga $\lambda$ C/m



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{r}$$

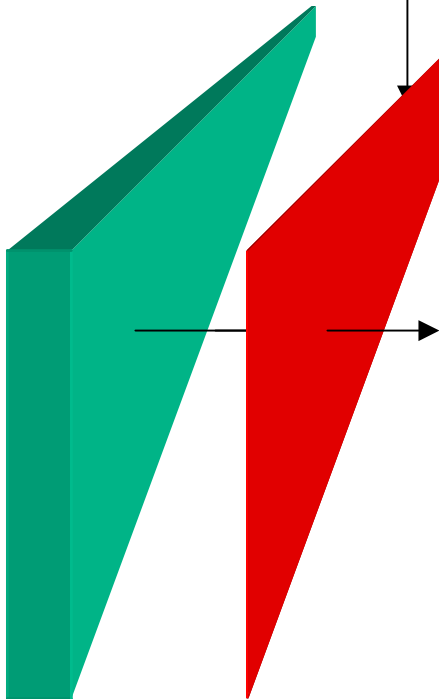
$$\Delta V_{2-1} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$V = 0$  donde?

$V = 0$  en  $r = 1$  (arbitrario)

equipotenciales

## Idem pared infinita con carga $\sigma$ C/m<sup>2</sup>



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

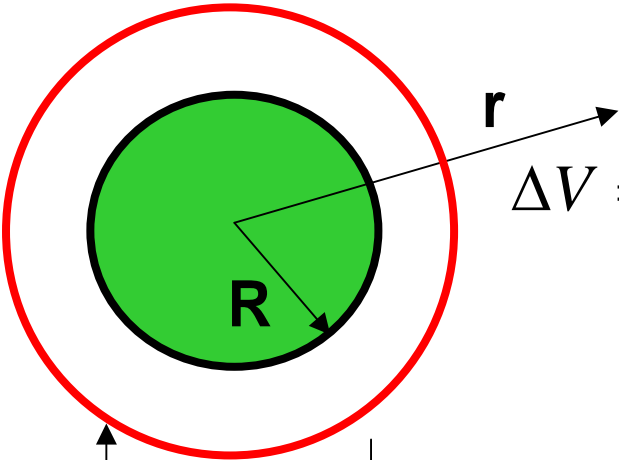
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\Delta V_{2-1} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (r_2 - r_1)$$

$V = 0$  donde?

$V = 0$  en  $r = 1$  (arbitrario)

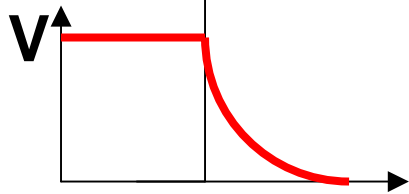
# Potencial generado por esfera conductora (Carga en superficie)



$$\Delta V = V_2 - V_1 = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \left\{ \begin{array}{l} r > R \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r} \\ r < R \quad E = 0 \end{array} \right.$$

$$r > R \quad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$r < R \quad \Delta V = 0 \quad (V = cte)$$



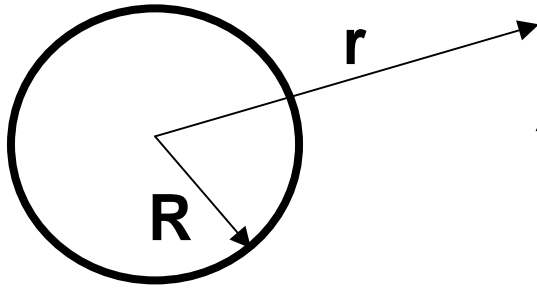
**Superficie equipotencial**

$$V(r = \infty) = 0$$

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

# Potencial de esfera cargada uniformemente en V



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$r > R \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

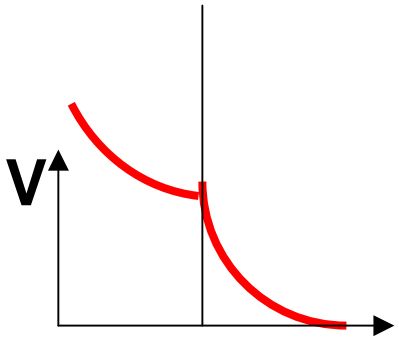
$$r < R \quad E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$r > R \quad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$V(r = \infty) = 0$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$



$$r < R \quad V(r) = -\int_{\infty}^R \vec{E}(r > R) \cdot d\vec{r} - \int_R^r \vec{E}(r < R) \cdot d\vec{r}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2)$$

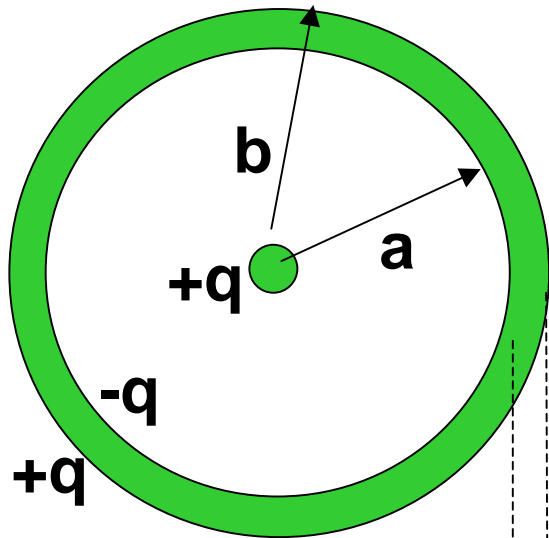
$$r = R \Rightarrow V(R)$$

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \right]$$

$$r = 0 \Rightarrow V = \frac{3V(R)}{2}$$

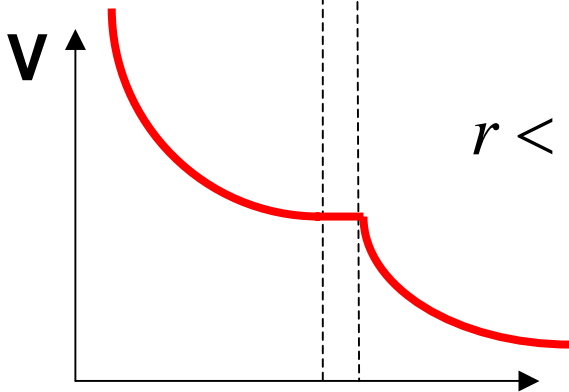
# Potencial generado por una carga rodeado de una cáscara conductora



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad r > b \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

$$r > b \quad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

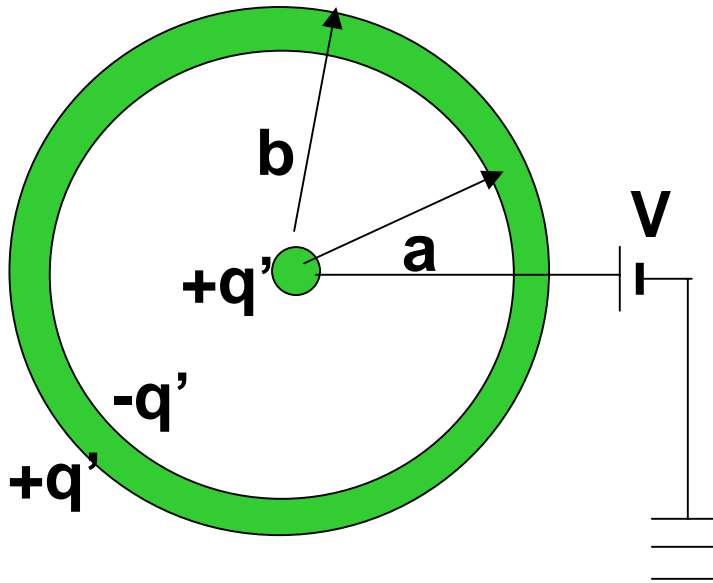
$$V(r = \infty) = 0 \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$



$$r < b \quad V = -\int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

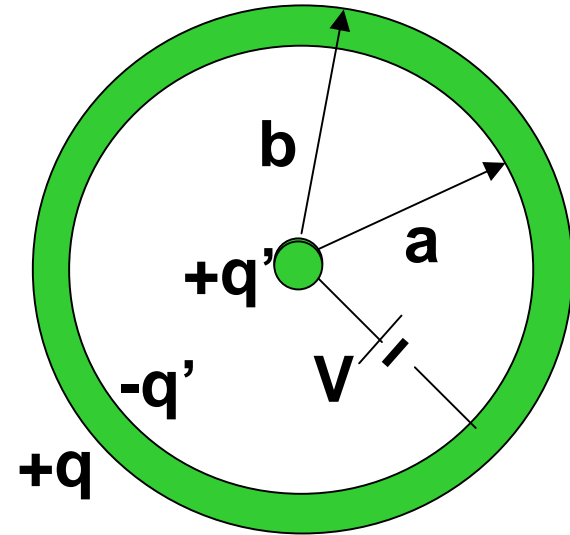
# Influencia de V externa sobre la distribución de cargas en conductores



V impone  $q'$  en esfera interior, totalmente o modificando una carga existente, y por inducción se generan  $-q'$  y  $+q'$  en la cáscara de acuerdo a

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{b} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{a} \right)$$

$r_i$ : radio esfera interior

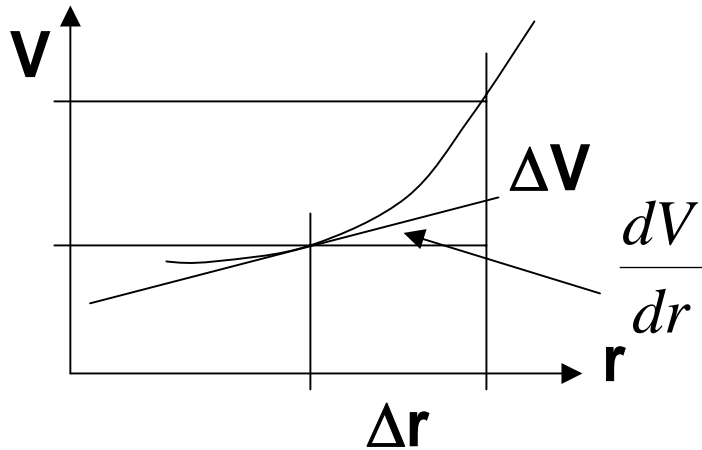


V impone  $q'$  en esfera interior de forma que

$$V = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{a} \right)$$

En cáscara conductora  $E=0$  por lo que en  $r=a$  la carga debe ser  $-q'$ . En  $r=b$  la carga depende de la carga original en la cáscara

## Relación entre E y V



$$\Delta V = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Ec. Poisson}$$

$$\text{Si } \rho=0 \quad \nabla^2 V = 0 \quad \text{Ec. Laplace}$$

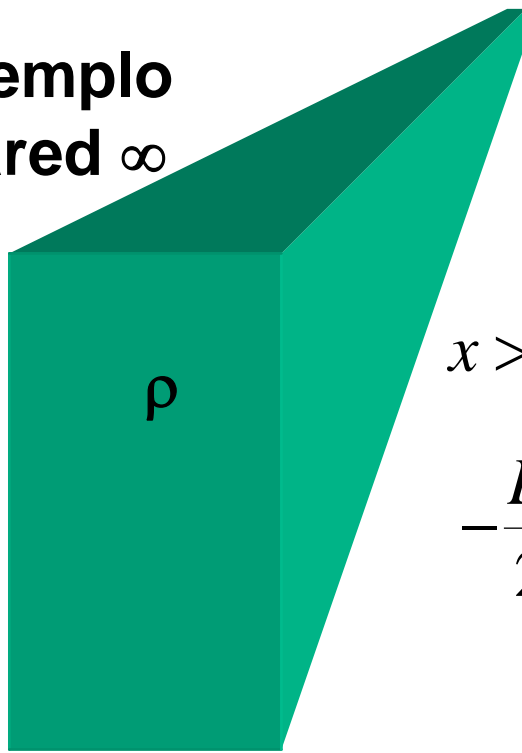
### cartesianas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

**E: campo electrostático generado por cargas. Es un campo derivado de fuerzas conservativas ( $\sim 1/r^2$ ), que son aquellas de las cuales pueden derivarse potenciales que son solo función de los estados iniciales y finales**

# Ejemplo Pared $\infty$



Dentro pared Ec. Poisson y fuera Ec. Laplace

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 V = 0$$

$$x > \frac{D}{2} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \Rightarrow E = a \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow V = b x + c$$

$$-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x + d$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow V = -\frac{\rho}{2 \epsilon_0} x^2 + e x + f$$

$$x < -\frac{D}{2} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \Rightarrow E = g \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow V = h x + i$$

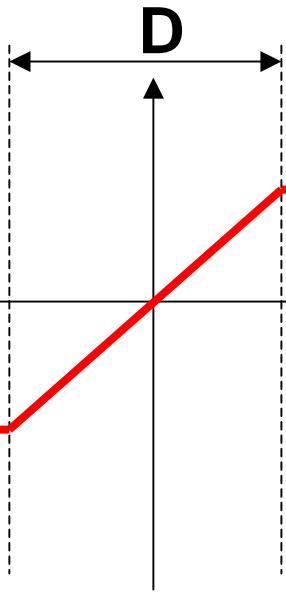
Condiciones de borde para E

$$E(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow E\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{\rho D}{2 \epsilon_0}$$

$$E_{in} = \frac{\rho}{\epsilon_0} x$$

$$E_{ex}\left(\frac{D}{2}\right) = -E_{ex}\left(-\frac{D}{2}\right) = E_{in}\left(\frac{D}{2}\right) \Rightarrow$$

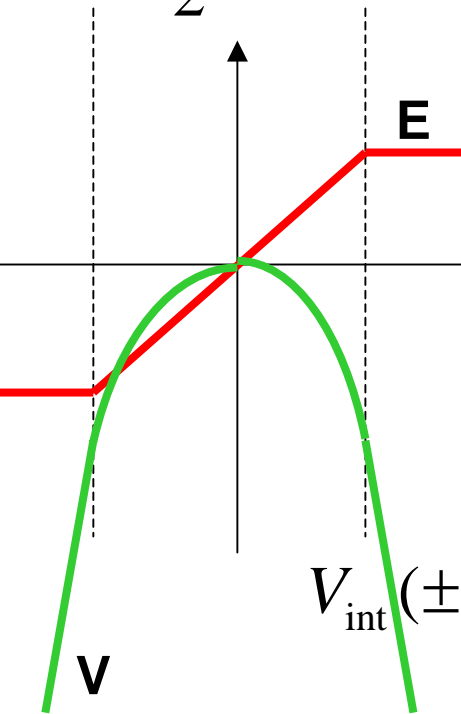
$$E_{ex} = \pm \frac{\rho D}{2 \epsilon_0}$$



$$x > \frac{D}{2} \quad V = b x + c$$

$$-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2} \quad V = -\frac{\rho}{2 \epsilon_0} x^2 + e x + f$$

$$x < -\frac{D}{2} \quad V = h x + i$$



$$E_{ex} = \pm \frac{\rho D}{2 \epsilon_0} = -\frac{dV}{dx}$$

$$V_{\text{int}}\left(\pm \frac{D}{2}\right) = V_{\text{ext}}\left(\pm \frac{D}{2}\right)$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$V_{\text{in}}\left(-\frac{D}{2}\right) = V_{\text{in}}\left(\frac{D}{2}\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{\rho}{2 \epsilon_0} \frac{D^2}{4} - e \frac{D}{2} = -\frac{\rho}{2 \epsilon_0} \frac{D^2}{4} + e \frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow e = 0$$

$$V_{\text{in}} = -\frac{\rho}{2 \epsilon_0} x^2$$

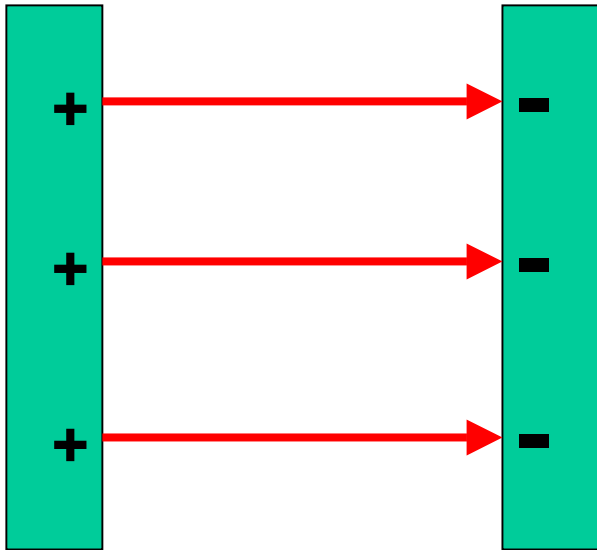
$$V\left(x > \frac{D}{2}\right) = -\frac{\rho D}{2 \epsilon_0} x + c$$

$$V\left(x < \frac{D}{2}\right) = \frac{\rho D}{2 \epsilon_0} x + i$$

$$-\frac{\rho}{2 \epsilon_0} \frac{D^2}{4} = -\frac{\rho D D}{2 \epsilon_0 2} + c \Rightarrow c = \frac{\rho D^2}{8 \epsilon_0} = i$$

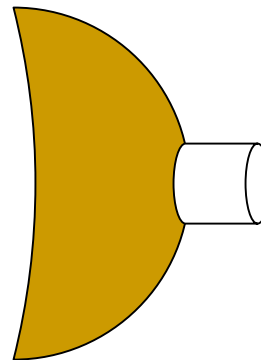
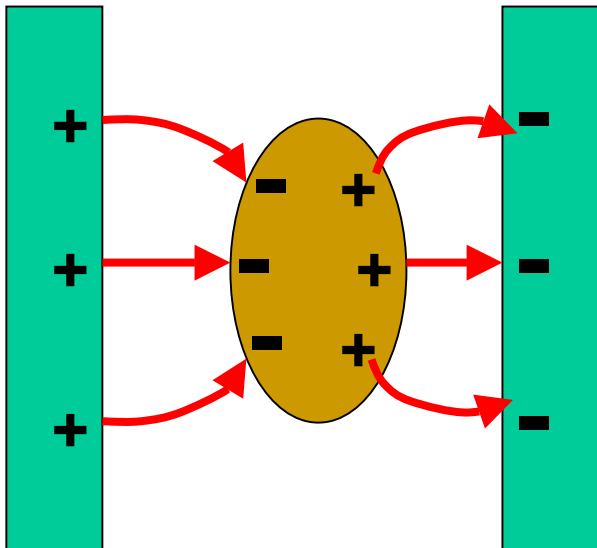
$$V_{\text{ex}} = \mp \frac{\rho D}{2 \epsilon_0} x + \frac{\rho D^2}{8 \epsilon_0}$$

# Conductor en campo eléctrico



En conductor cargas en superficie, sino repeliéndose y en movimiento

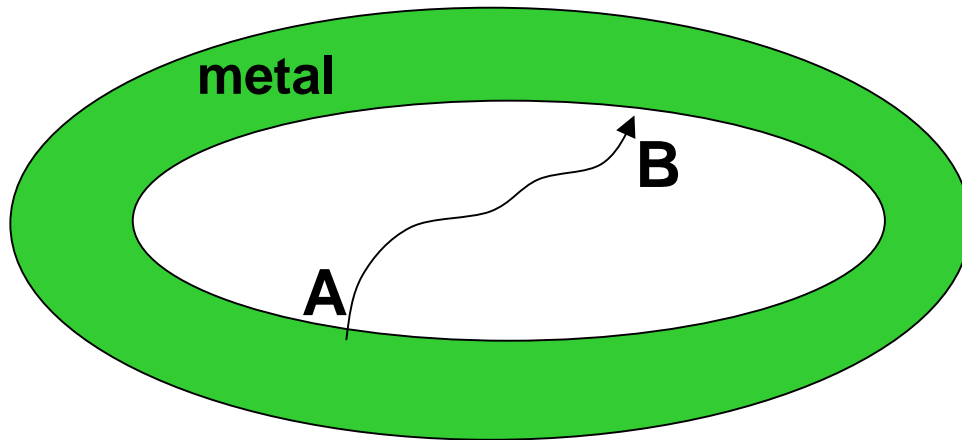
Superficie de un conductor necesariamente debe ser equipotencial sino las cargas se estarían moviendo



$$E S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E \perp S$$

# Superficie interior es un equipotencial



Si dentro  $E \neq 0$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

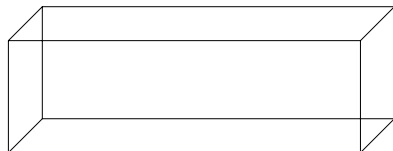
Si A-B se toma de forma que camino paralelo a  $E$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} > 0 \Rightarrow V_A > V_B$$

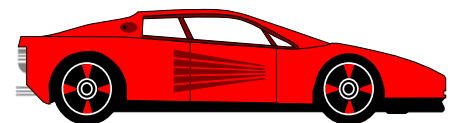
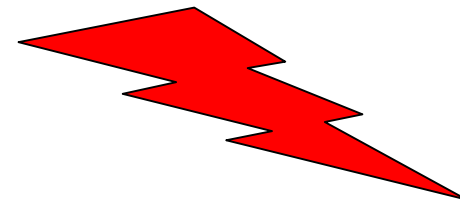
Dentro de los conductores, sean macizos o huecos,  $E$  es nulo, independientemente de las cargas externas y su distribución

contradiciendo hipótesis

## Apantallamiento

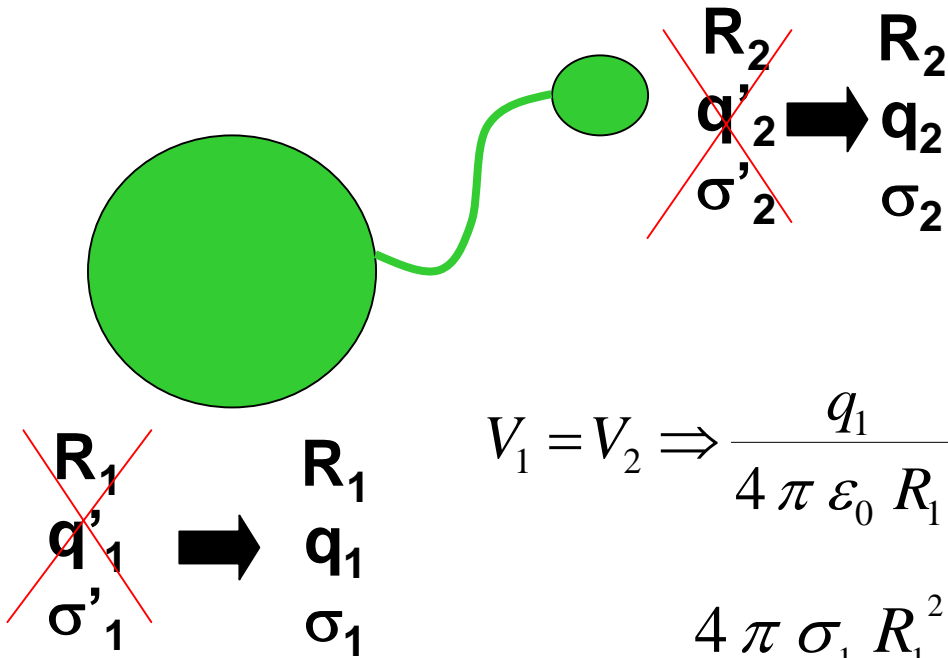


Lugar más seguro?



# Influencia de la forma del conductor

Al conectar los 2 cuerpos todos los conductores forman un equipotencial



$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 R_2}$$

$$\frac{4 \pi \sigma_1 R_1^2}{4 \pi \epsilon_0 R_1} = \frac{4 \pi \sigma_2 R_2^2}{4 \pi \epsilon_0 R_2}$$

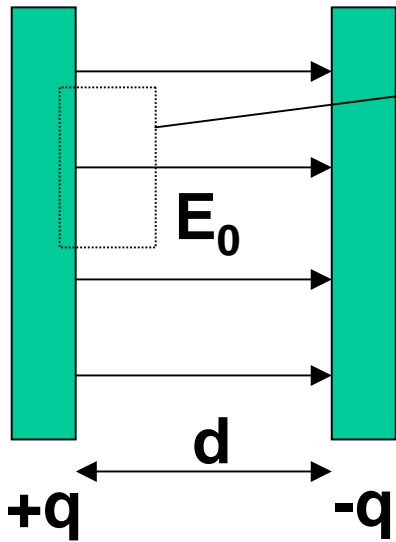
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

En los conductores las cargas se concentran en las zonas de menor radio de curvatura => pararrayos



# Capacitores

## Aproximación capacitor infinito



$$E_0 S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = -\int \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

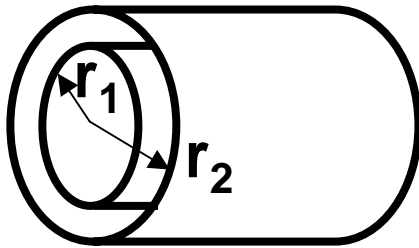
$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad \text{capacidad}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Capacitor plano

$$E 2 \pi r l = \frac{2 \pi r_1 l \sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2 \pi r \epsilon_0} = \frac{r_1 \sigma_1}{\epsilon_0 r}$$



$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1 \sigma_1}{\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$[C] = \frac{C}{V} = \text{Faraday (F)}$$

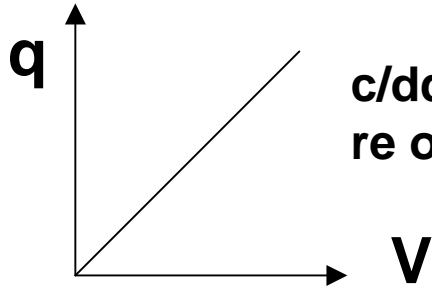
$$C = \frac{2 \pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2 \pi l \epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Capacitor cilíndrico

C depende solo de parámetros geométricos

# Significado de la capacidad

$$dE_p = V dq = \frac{q}{C} dq$$

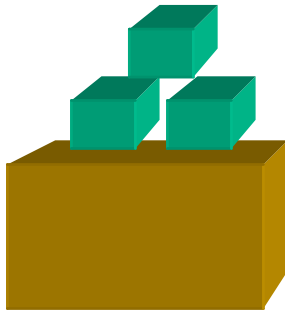
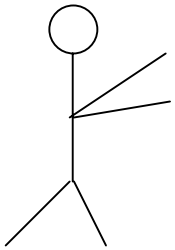


c/dq que muevo entre placas requiere otra energía pues V va variando

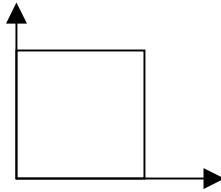
$$\Rightarrow E_p = \int_0^q \frac{1}{C} q dq$$

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V$$

distinto a



$$E_p = n (m g h)$$



**C mide la capacidad de almacenar energía de un capacitor**

**Faraday: unidad muy grande**

**en condensador plano si  $d = 1 \text{ mm}$  y  $C = 1 \text{ F}$**

$$S = \frac{C d}{\epsilon_0} = 1,1 \cdot 10^8 \text{ m}^2$$

**C en  $\mu\text{F}$  ( $10^{-6}$ ) a pF ( $10^{-12}$ )**

## Energía del campo eléctrico

Energía por unidad de volumen  $u = \frac{E_P}{Vol.} = \frac{\frac{1}{2} C V^2}{d S} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\epsilon_0 S}{d} E^2 d^2}{d S}$

Densidad de energía potencial en vacío

$$u_P = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Deducida para condensador plano pero vale en general

Ej. Capacitor cilíndrico

$$\frac{dE_P}{dVol} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$E_P = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 r} \right)^2 2 \pi l r dr$$

$$E_P = \frac{\lambda^2 l}{4 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$E_P = \frac{1}{2} C V^2$$

$$E_P = \frac{1}{2} \frac{2 \pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left( \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \right)^2$$

$$E_P = \frac{\lambda^2 l}{4 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Vacío absoluto?  $Energía = m c^2$

Donde hay E hay energía

# Energía de una esfera cargada en volumen: complejo!

$$u = \frac{dE_P}{dVol} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad E_P = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dVol \quad \text{en todo el espacio}$$

Por Gauss, para  $r < R$   $E 4 \pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$E_P = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \int_0^R \left( \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \right)^2 r^2 dr + \int_R^\infty \left( \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr \right)$$

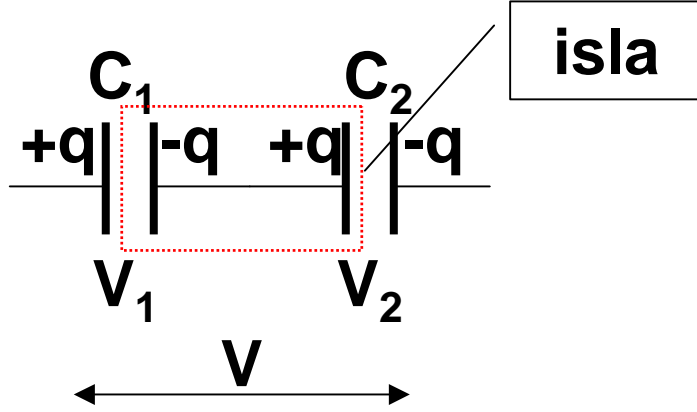
$$E_P = \frac{\rho^2}{18 \epsilon_0} 2 \cdot 2\pi \int_0^R r^4 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 4 \pi \frac{q^2}{(4 \pi \epsilon_0)^2} \int_R^\infty r^{-2} dr$$

E para  $r > R$

$$E_P = \frac{4 \pi \rho^2 R^5}{18.5 \epsilon_0} + \frac{q^2}{8 \pi \epsilon_0 R} = \frac{6 q^2}{40 \pi \epsilon_0 R}$$

# Conexión de capacitores

serie

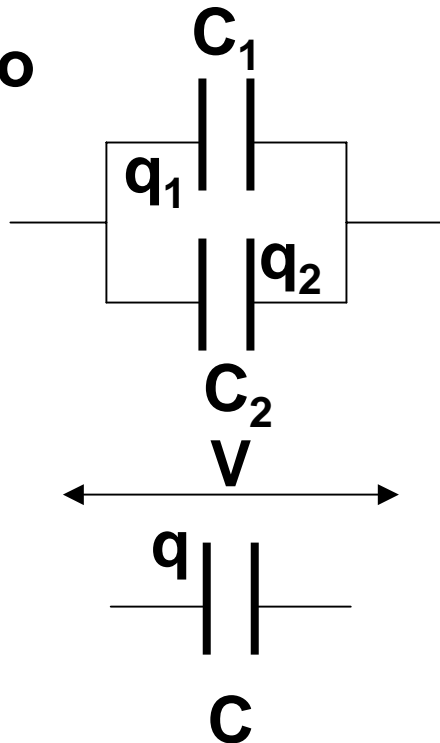


Carga neta = 0 si condensadores inicialmente descargados

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$$

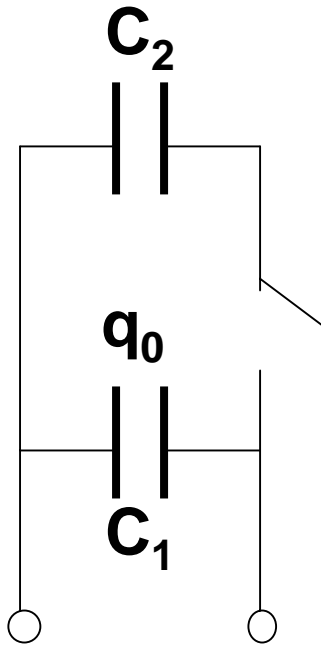
paralelo



$$q = C V = q_1 + q_2 = V (C_1 + C_2)$$

$$C = \sum C_i$$

## Capacitor originalmente cargado



$$V_0 = \frac{q_0}{C_1}$$

$$E_{P0} = \frac{1}{2} q_0 V_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_1}$$

cuando se conectan, la carga  $q_0$  se redistribuye en ambos condensadores

$$q_1 + q_2 = q_0$$

y conjunto equivale a tener un //:  $C = C_1 + C_2$

$$V = \frac{q_0}{C_1 + C_2}$$

$$q_1 = C_1 V \quad q_2 = C_2 V$$

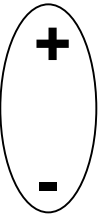
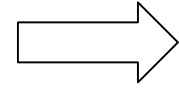
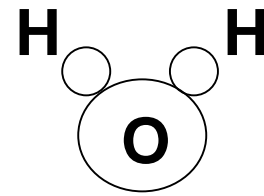
$$E_P = \frac{1}{2} q_1 V + \frac{1}{2} q_2 V = \frac{1}{2} q_0 V = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_1 + C_2} < E_{P0}$$

Una parte de la energía se disipa en los conductores cuando las cargas se distribuyen y otra se emite como radiación electromagnética

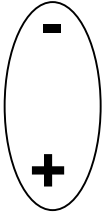
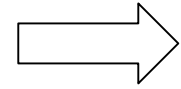
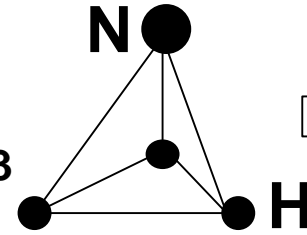
# Dipolo eléctrico

## Moléculas polares

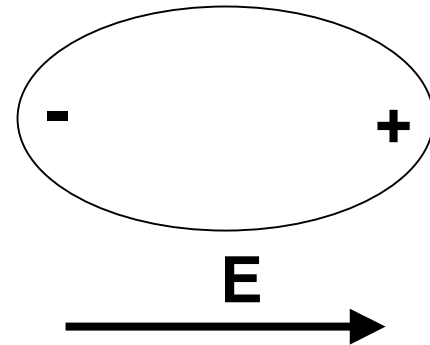
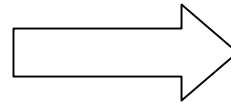
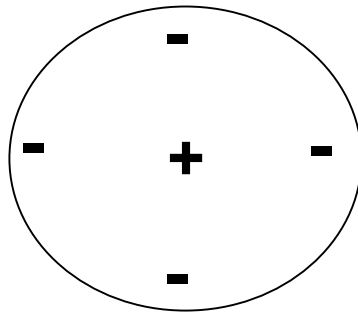
Agua H<sub>2</sub>O



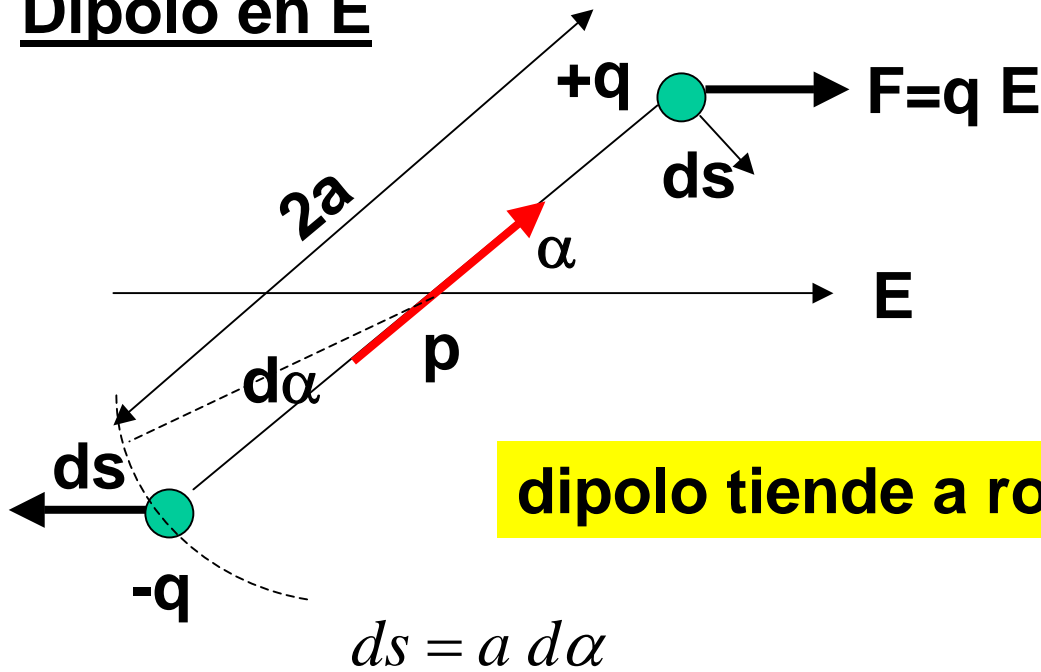
Amoníaco NH<sub>3</sub>



Moléculas no polares se polarizan en presencia de E



# Dipolo en E



$$\tau = F 2 a \text{ sen } \alpha = q E 2 a \text{ sen } \alpha$$

definimos  $\vec{p} = q 2 a$

$\vec{p}$ : momento dipolar

**dipolo tiende a rotar alineándose con E**

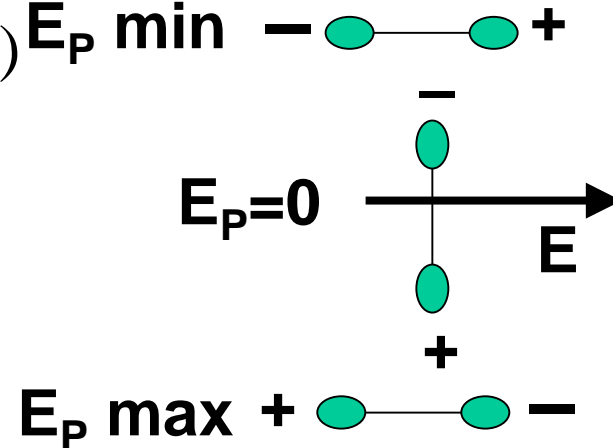
$$\tau = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$dE_p = dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q E a d\alpha \text{ sen } \alpha$$

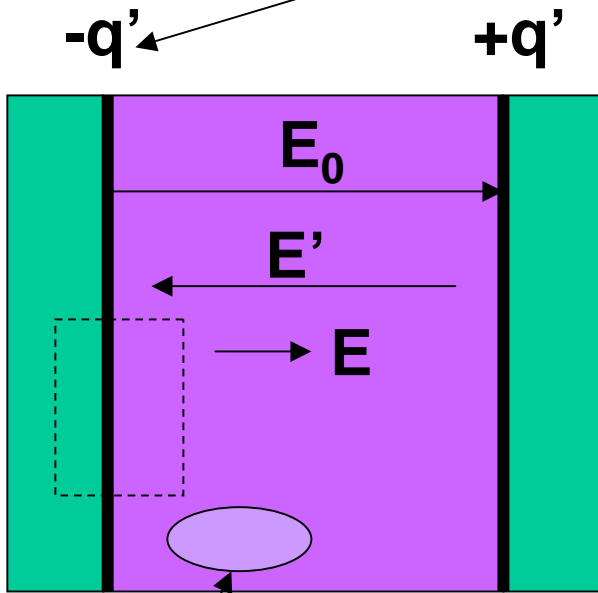
$$\Delta E_p = 2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q a E \text{ sen } \alpha d\alpha = -p E (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Si  $E_p = 0$  cuando  $\alpha = 90^\circ$   $E_p = -p E \cos \alpha$

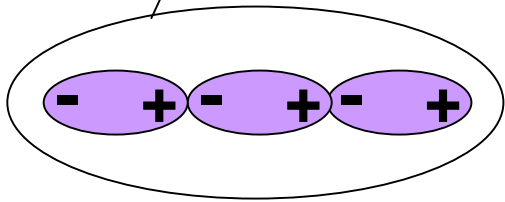
$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



# Dieléctricos



$$E = E_0 - E'$$



En sup. dieléctrico  
carga de polarización  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{(q - q')}{\epsilon_0}$

$$E S = \frac{(\sigma - \sigma') S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}$$

Si  $\sigma = |\vec{D}|$   $\sigma' = |\vec{P}|$   $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

**D: Desplazamiento P: Polarización**

$$P \propto E \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad \vec{D} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

$\chi$  : susceptibilidad,  $\epsilon$  : permitividad en medio

$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$   
 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$(1 + \chi) = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = K = \epsilon_r \quad \text{constante dieléctrica}$$

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \Rightarrow P = \sigma' = \epsilon_0 E' = \epsilon_0 (E_0 - E) = \epsilon_0 E (K - 1) = \epsilon_0 \chi E$$

$$E S \varepsilon_0 = \frac{P}{\varepsilon_0 \chi} S \varepsilon_0 = \frac{\sigma' S}{\chi} = q - q' \Rightarrow q' \left( \frac{1}{\chi} + 1 \right) = q$$

$$q' \left( 1 + \chi \right) = \chi q \Rightarrow q' = q \left( 1 - \frac{1}{K} \right)$$

$$K = 1 (\chi = 0) \Rightarrow q' = 0$$

$$K = \infty (\chi = \infty) \Rightarrow q' = q$$

## Ley de Gauss en dieléctricos

$$\varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q - q'$$

$$\varepsilon_0 \oiint \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \cdot d\vec{S} = q \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \right]$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

$$\varepsilon_0 \oiint \frac{P}{\varepsilon_0 \chi} \cdot d\vec{S} = q \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \right]$$

$$q' = q \left( 1 - \frac{1}{K} \right) = q \frac{\chi}{K}$$

$$\oiint \vec{P} \cdot d\vec{S} = q'$$

$$D = \varepsilon_0 E_0 \quad \text{sin dieléctrico}$$

$$D = \varepsilon E \quad \text{con dieléctrico}$$

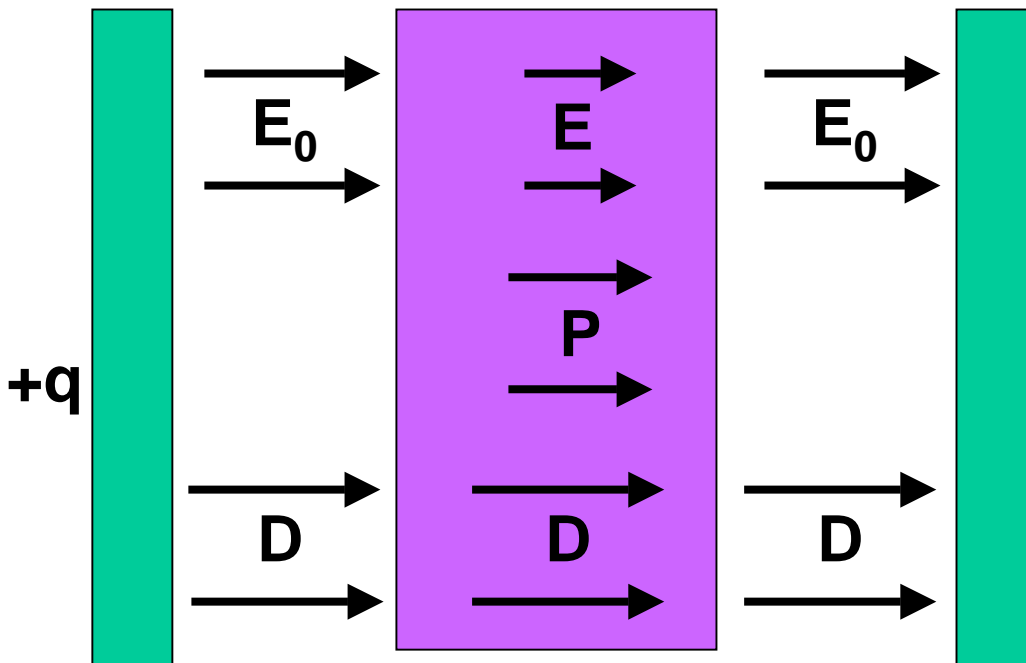
$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_0 / K}$$

$$C = K C_0$$

$$1 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon E} \Rightarrow E = \frac{E_0}{K} \Rightarrow V = \frac{V_0}{K}$$

$$C = K \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \varepsilon \frac{S}{d}$$

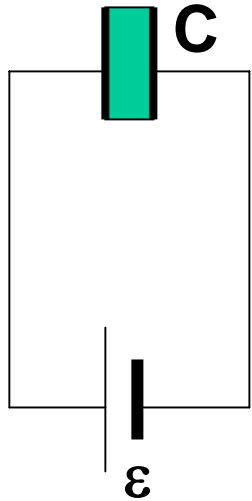
**La introducción de un dieléctrico en un condensador multiplica la capacidad por K**



### Valores

| Material      | K   | Campo Ruptura V/m |
|---------------|-----|-------------------|
| Aire          |     | $3 \cdot 10^6$    |
| Pilicarbonato | 2,8 | $3 \cdot 10^7$    |
| Poliéster     | 3,3 | $6 \cdot 10^7$    |
| Vidrio pirex  | 4,7 | $1 \cdot 10^7$    |

Hasta ahora C aislado (q cte); que pasa si conectado a V?



Al introducir dieléctrico V cte en bornes de C

$$C_0 \rightarrow C = C_0 K$$

$$q \rightarrow q_0 K \Rightarrow C = C_0 K$$

**Cargas de polarización en dieléctrico tienden a reducir el campo pero como este está fijado por  $\varepsilon$ , la batería termina reforzando las cargas en C**

Capacitor aislado

$$E_{P0} = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

Capacitor conectado a V

Introduciendo un dieléctrico

$$C_0 \rightarrow C = C_0 K \quad V_0 \rightarrow V = \frac{V_0}{K}$$

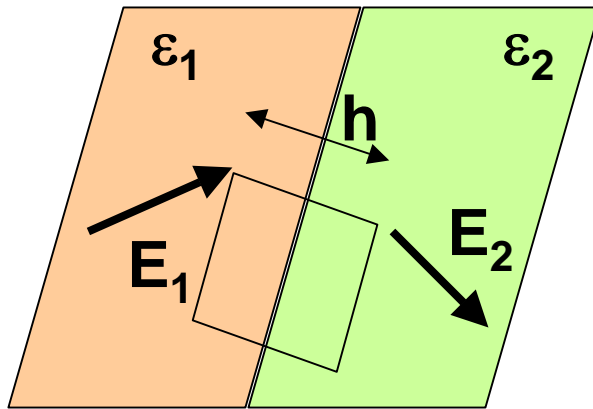
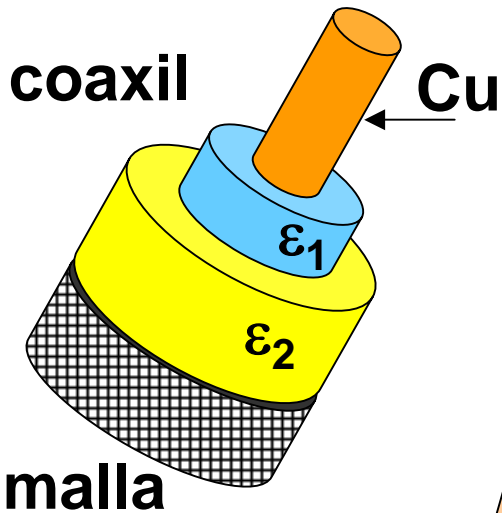
$$E_P = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C_0 K \frac{V_0^2}{K^2} = \frac{E_{P0}}{K}$$

Introduciendo un dieléctrico

$$C_0 \rightarrow C = C_0 K \quad V = V_0$$

$$E_P = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C_0 K V_0^2 = K E_{P0}$$

# Condiciones de borde en límite entre dieléctricos

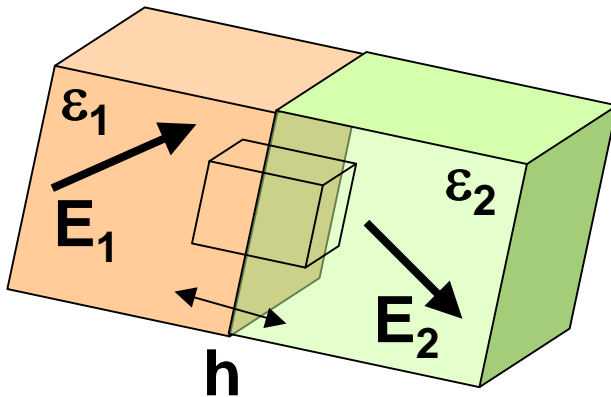


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = 0$$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

siempre



$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q = 0$$

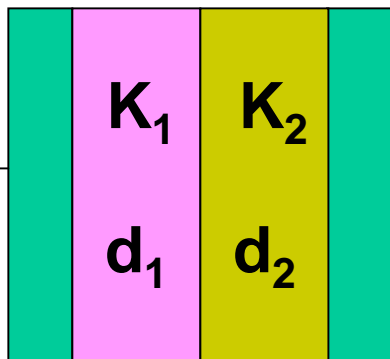
si no hay q en  
superficie de  
separación

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \iint \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} - \iint \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = 0$$

$$D_{N1} = D_{N2}$$

Si no hay cargas libres en superficie

# Ejemplos

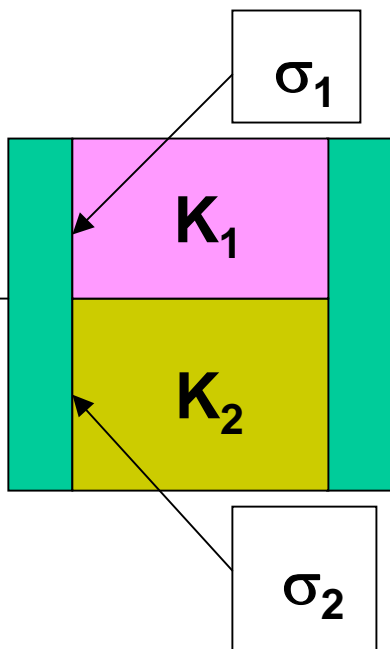


$$D_{n1} = D_{n2} = D \quad E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{D}{\epsilon_0 K_1} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{D}{\epsilon_0 K_2}$$

$$V = V_1 + V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{D}{\epsilon_0} \left( \frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2} \right)$$

**2 condensadores en serie**

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\epsilon_0 K_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 K_2 S} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \left( \frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2} \right) \iff \frac{1}{C} = \frac{V}{q} = \frac{\frac{D}{\epsilon_0} \left( \frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2} \right)}{\sigma S}$$

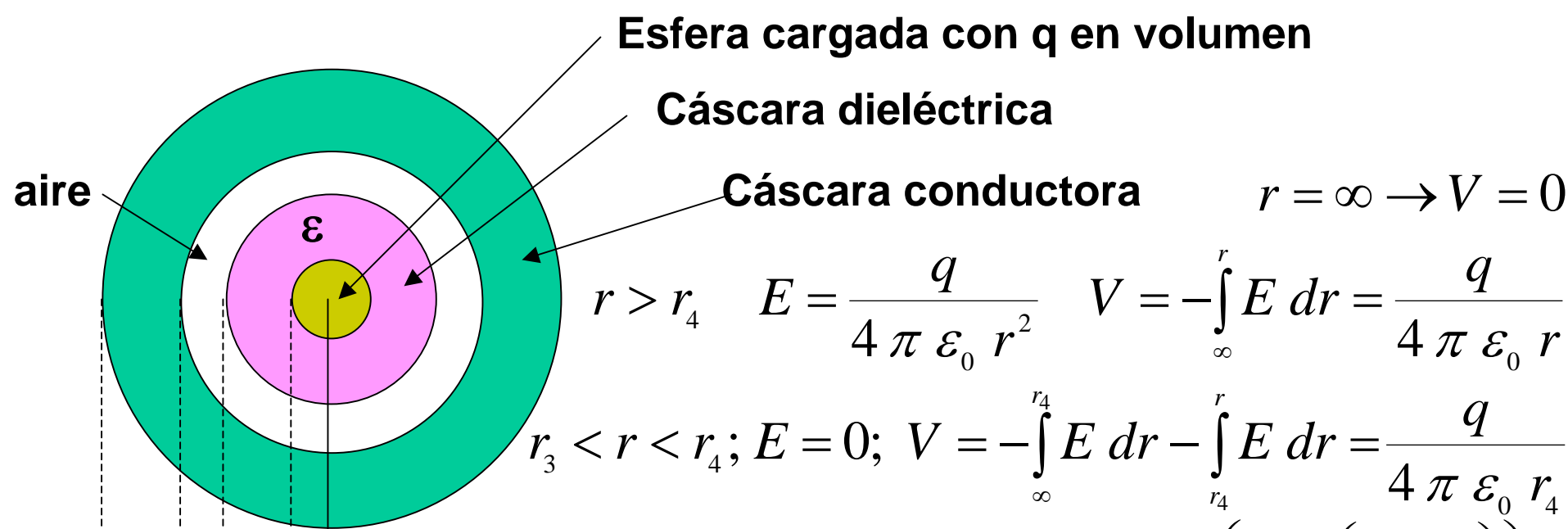


$$E_{t1} = E_{t2} = E \quad D_1 = \epsilon_0 K_1 E \quad D_2 = \epsilon_0 K_2 E$$

$$V = E d$$

**2 condensadores en paralelo**

$$\left\{ \begin{array}{l} = \Delta V \\ \neq q \\ \neq C \end{array} \right.$$



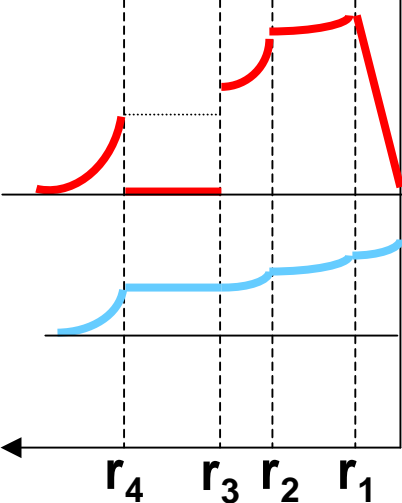
$$r > r_4 \quad E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad V = -\int_{\infty}^r E dr = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

$$r_3 < r < r_4; E = 0; \quad V = -\int_{\infty}^{r_4} E dr - \int_{r_4}^r E dr = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r_4}$$

$$r_2 < r < r_3; E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}; \quad V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_4} + \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right) \right)$$

$$r_1 < r < r_2; E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{q}{4 \pi} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_4} + \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \right) + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \right]$$



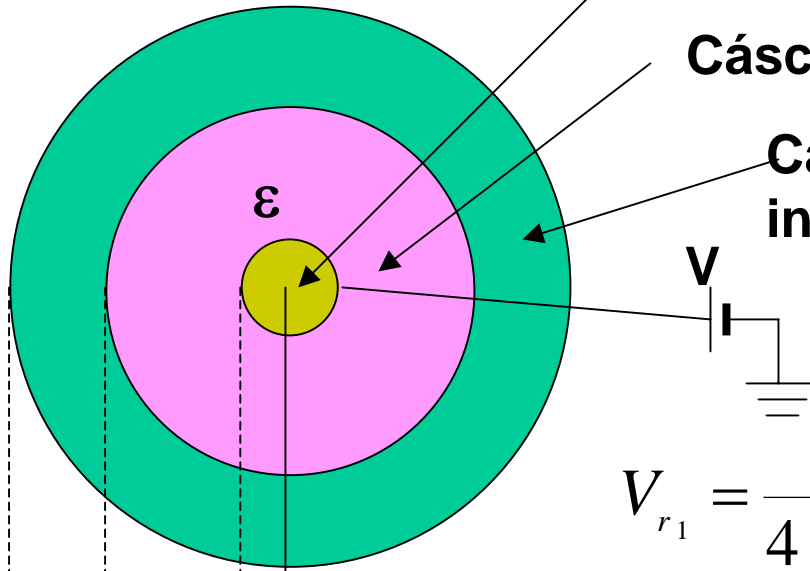
$$r < r_1; E = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}; \quad V = \frac{q}{4 \pi} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_4} + \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \right) + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right] + \frac{\rho}{6 \epsilon_0} (r_1^2 - r^2)$$

Esfera conductora descargada

Cáscara dieléctrica

Cáscara conductora inicialmente con q

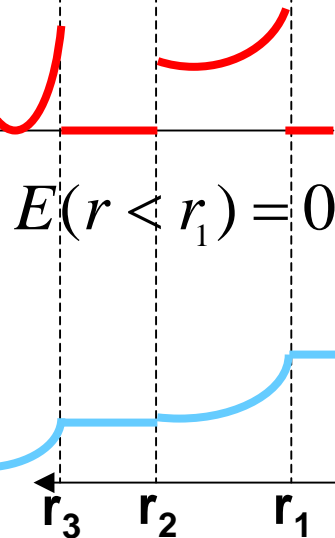
A t=0 q en exterior de cáscara



Con V esfera interior se carga en sup.

$$V_{r_1} = \frac{q_i}{4 \pi \epsilon_0 r_1} = V(r < r_1) \Rightarrow q_1 = V_{r_1} 4 \pi \epsilon_0 r_1$$

En interior de cáscara aparece -q<sub>1</sub> y en exterior q+q<sub>1</sub>



$$E(r < r_1) = 0, E(r_1 < r < r_2) = \frac{q_1}{4 \pi \epsilon r^2}, E(casc) = 0, E(r > r_3) = \frac{q + q_1}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

$$r_1 < r < r_2; V_r - V_{r_1} = - \int_{r_1}^r \frac{q_1 dr}{4 \pi \epsilon r^2} \Rightarrow V_r = V_{r_1} + \frac{q_1}{4 \pi \epsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$r_2 < r < r_3 \Rightarrow V = cte = V_{r_2}$$

$$r > r_3 \quad V = V_{r_1} + \frac{q_1}{4 \pi \epsilon} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{q + q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right)$$