Teoría de la Medida

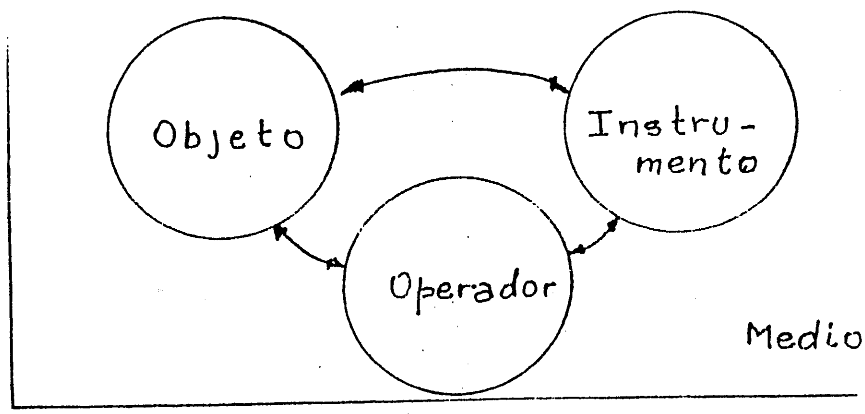
De acuerdo a Baird en el libro: "Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos" :

- La experimentación comprende el proceso completo de identificar una porción del mundo que nos rodea (sistema), para obtener información de ella e interpretarla. En este proceso tiene un papel importante el observador, en especial el/los modelos teórico/s que posee para interpretar dicha realidad.
- ¿Qué es medir?

Es el proceso de cuantificar nuestra experiencia del mundo exterior.

Medir una magnitud física es asociar a la misma un valor dimensionado en relación a una determinada unidad (J. Balseiro, Mediciones Físicas).

Factores que intervienen en una medición



1) Objeto
2) Aparato o instrumento
3) Unidad o patrón de comparación
4) Operador
5) Medio

Noción de magnitud, cantidad, unidad y medida

Se identificarán estos conceptos a través de un ejemplo.
Al medir la longitud de un escritorio se obtuvo un resultado de 1,5 m.

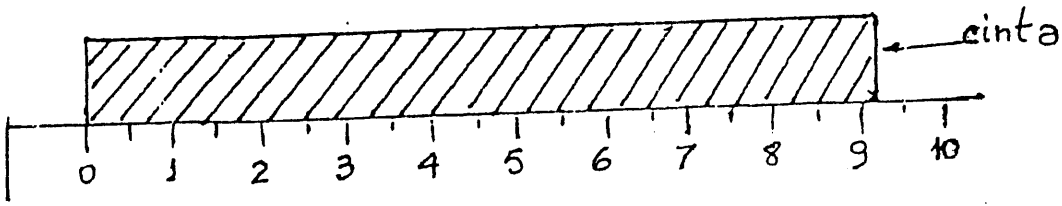
Magnitud medida: longitud
Cantidad medida: 1,5
Unidad utilizada: m
Medida: 1,5 m

Clasificación de las mediciones

Se pueden clasificar en directas e indirectas.
Medición directa: a la operación de lectura en un instrumento aplicado a medir cierta cantidad de una magnitud. Ej. : longitud con una regla, corriente con un amperímetro, temperatura con un termómetro,...
Medición indirecta: es la que resulta de vincular mediciones directas a través de relaciones matemáticas. Ej.: cálculo de la densidad de un cuerpo conocidas su masa y volumen, de la resistencia eléctrica teniendo los valores de la intensidad de corriente y de la diferencia de potencial,...

Valor representativo e incertezas

Cuando se mide una variable continua sólo se puede determinar un conjunto de valores o franja de indeterminación, entre los cuales se asegura se encuentra el "verdadero" valor de esa magnitud.



En este ejemplo lo que se puede asegurar es que el resultado de la medición es mayor que 9 cm y menor que 9,5 cm. Se define la franja de indeterminación como Xmáximo-Xmínimo= 0,5 cm.
Para cada medición directa el error de apreciación, error absoluto o incerteza absoluta (ΔX), depende no sólo del observador (error de lectura) sino de la escala del instrumento (error de clase). De modo que ΔX = E lectura + E clase.
Para instrumentos confiables el E lectura = E clase, por lo tanto ΔX = 2 E lectura o E lectura = menor división del instrumento /2. De acuerdo con este criterio, en el ejemplo planteado, ΔX= 0,5 cm.
El valor representativo, en este caso, es X_0= 9 cm.
Por lo tanto el resultado de esta medición es $X = (9{,}0 \pm 0{,}5)$ cm.

Clasificación de incertezas

Sistemáticas: son los que provienen de una imperfección o ajuste inadecuado del instrumento de medición, de la acción permanente de una causa externa,...

Ejemplo: desigualdad en la longitud de los brazos de una balanza, paralaje, desplazamiento del cero. Afectan a todas las mediciones prácticamente por igual y son del mismo signo. Si bien no puede hacerse una teoría general para ellos, en casos particulares existen métodos para ponerlos de manifiesto o efectuar correcciones para eliminarlos.

Accidentales o casuales: si una misma cantidad de una magnitud se mide cierto número de veces con el mismo instrumento y en las mismas condiciones los valores difieren entre sí. Algunas de estas diferencias provienen del error de apreciación, pero otras se pueden atribuir a pequeñas variaciones en las condiciones ambientales (temperatura, presión,...), cambios en el observador y en el instrumento. Para mediciones de alta precisión es indispensable, para su ponderación, utilizar la teoría estadística.

Protocolo de medición

¿Para qué se mide? Objetivo de la medición.
¿Qué se mide? Elección de las magnitudes involucradas en acuerdo al objetivo.
¿Con qué se mide? Selección del o de los instrumentos.
¿Cómo se mide? Pasos a seguir para la determinación de la magnitud correspondiente.
¿Cuántas veces se mide? No se medirá una sola vez ya que pueden deslizarse errores groseros.
¿Cómo se expresa el resultado de la medición?--------"Expresar físicamente"
El resultado se expresará como $X_0 \pm \Delta X$.

En relación a estas dos últimas preguntas se establecerán ciertos criterios a seguir:

- Se han obtenido cuatro medidas, de las cuales tres están repetidas. Por ejemplo, en la medición del diámetro de una pieza, los valores son 4 cm, 5 cm, 4 cm, 4 cm con un error de apreciación de 1 cm. El resultado de la medición se expresará como (4 ± 1) cm.
- De las medidas realizadas ninguna está repetida. Se asignará al valor representativo la semisuma de las cotas extremas y su intervalo de incerteza $\Delta X = X$ máximo- Xmínimo/2. Por ejemplo, en la medición de una intensidad de corriente se obtuvieron los siguientes resultados: 1,5 A, 1,4 A, 1,3 A y 1,5 A con una incerteza de 0,1 A. Se adoptará como valor representativo $X_0 = 1{,}6\ A + 1{,}2\ A/2 = 1{,}4\ A$ con una incerteza de $\Delta X = 1{,}6\ A - 1{,}2\ A/2 = 0{,}2\ A$.

El resultado se expresará como $X = (1{,}4 \pm 0{,}2)$ A.

Mediciones comparables

Sólo se pueden comparar medidas de la misma magnitud.
Se dicen que son comparables cuando al representar sus bandas de incertezas tienen una franja de intersección común.

Incertidumbre relativa y relativa porcentual.

La incerteza absoluta no muestra si una medición fue realizada con buena precisión o no. Por ello es más conveniente compararla con el valor representativo. Se tienen así los conceptos de incerteza o error relativo ε (el error por cada unidad) o el error relativo porcentual ε % (el error por cada cien unidades). Decimos que cuanto menor es el error relativo mayor es la precisión de la medición, es decir definimos la precisión K = 1/ε.
Ejemplo:

x' (cm)	Δx (cm)	E_r	E_r%	K
2,5	0,1	0,04	4	25
8,3	0,1	0,012	1,2	83
15,0	0,1	0,0067	0,67	120

Cifras apropiadas para una constante.

Cuando en una medición indirecta aparece una constante se puede despreciar la influencia de su incerteza en el resultado, eligiendo un número adecuado de cifras. El criterio que se seguirá es el siguiente: será despreciado cuando su error relativo multiplicado por 10 sea menor o igual que la suma de los otros errores relativos.
Ejemplo: ¿Con cuántas cifras se expresará π para despreciar su error en el cálculo del volumen de un cilindro?.
Las dimensiones medidas fueron el diámetro y la altura de la pieza.
De la fórmula correspondiente $V = \pi . d^2 . h$, haciendo propagación de errores, el $\varepsilon (V) = \varepsilon (\pi) + 2. \varepsilon (d) + \varepsilon (h)$.
Se despreciará el error de π siempre que $10. \varepsilon (\pi) \leq 2. \varepsilon (d) + \varepsilon (h)$. Para ello es conveniente confeccionar un cuadro como el siguiente:

π	$\Delta\pi$	$\varepsilon(\pi)$	$10.\ \varepsilon(\pi)$
3	1	1/3	10. 1/3
3,1	0,1	0,1/3,1	10. 0,1/3,1
3,14	0,01	0,01/3,14	10. 0,01/3,14
---------------	---------------	---------------	-----------------

El resultado de la última columna se compara con la suma de los otros errores. Para el primer valor que da menor o igual se observa la primera columna. Ese valor de π es el que hay que tomar.

¿Cómo mejorar la calidad de una medida?

a) Cambiar de método.
b) Cambiar de instrumento.
c) Distribuir la incertidumbre.

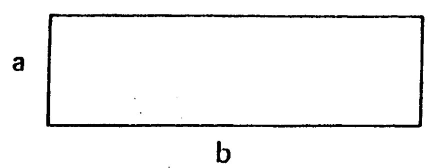
Propagación de incertezas en las mediciones indirectas

Adición

Se midió una determinada longitud, para la que se necesitó utilizar dos veces una regla milimetrada. Las medidas directas fueron $a' = 10$ mm y $b' = 5$ mm. Entonces la medida de la longitud total será: $a + b = (a' \pm \Delta a) + (b' \pm \Delta b) = (10 \text{ mm} \pm 1 \text{mm}) + (5 \text{ mm} \pm 1 \text{mm}) = 15 \text{ mm} \pm 2 \text{ mm}$.
En el caso de la sustracción se procede de igual modo: $a - b = (a' \pm \Delta a) - (b' \pm \Delta b) = (a' - b') \pm (\Delta a' + \Delta b')$.

Multiplicación

Se desea medir el área de la superficie de un rectángulo.
La medición de la cantidad de longitud de los lados del mismo da como resultados:



$a = a' \pm \Delta a$

$b = b' \pm \Delta b$

Sustituyéndolos en la expresión del área:

$$A = a \ . \ b$$

obtenemos:

$$A = (a' \pm \Delta a) \ . \ (b' \pm \Delta b)$$

y operando queda:

$$A = a' . b' \pm a' . \Delta b \pm b' . \Delta a \pm \Delta a . \Delta b$$

el último sumando puede despreciarse ya que es el producto de dos valores, cada uno de los cuales es significativamente menor que los valores de las cantidades medidas. Entonces queda:

$$A = a'\,b' \pm a'\,\Delta b \pm b'\,\Delta a$$

y:

$$A = a'\,b' \pm (a'\,\Delta b + b'\,\Delta a)$$

donde:

$$A' = a'\,b'$$

y

$$\Delta A = (a'\,\Delta b + b'\,\Delta a)$$

Si dividimos ambos miembros de la última expresión por $A' = a'b'$ obtenemos:

$$\frac{\Delta A}{A'} = \frac{a'\,.\,\Delta b}{a'\,b'} + \frac{b'\,.\,\Delta a}{a'\,b'}$$

$$\frac{\Delta A}{A'} = \frac{\Delta a}{a'} + \frac{\Delta b}{b'}$$

de donde:

$$\Delta A = \left(\frac{\Delta a}{a'} + \frac{\Delta b}{b'}\right) A'$$

y el resultado final se expresa como:

$$A = A' \pm \Delta A$$

Para la división se llega al mismo resultado.

En el caso de la multiplicación y división el error relativo de la medición indirecta es igual a la suma de los errores relativos cometidos en cada una de las mediciones directas.

<u>Síntesis</u> (1)

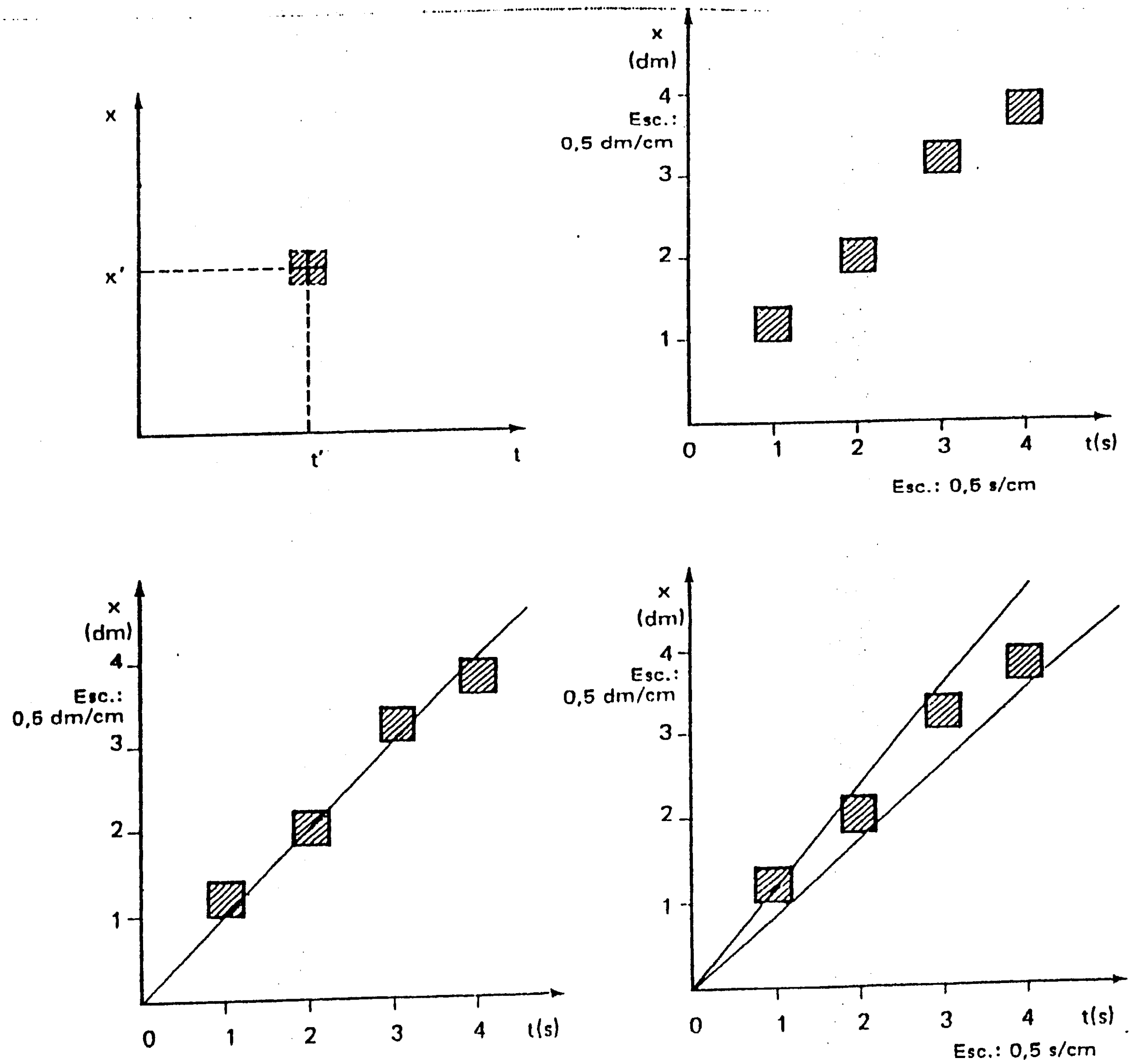
Incerteza absoluta de a : Δa
Incerteza relativa de a : $\varepsilon(a) = \Delta a / a$ ó $\%(a) = \varepsilon(a).100$
Incerteza absoluta de $(a \pm b)$: $\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b$
Incerteza relativa de $a \cdot b$: $\varepsilon(a \cdot b) = \Delta a/a + \Delta b/b = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$
Incerteza relativa de a / b : $\varepsilon(a/b) = \Delta a/a + \Delta b/b = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$
Incerteza relativa de a^n : $\varepsilon(a^n) = n \cdot \Delta a / a = n \cdot \varepsilon(a)$

Representaciones gráficas

Los siguientes gráficos corresponden a una experiencia con los que se quiere determinar la velocidad de un móvil. La pendiente de la recta obtenida, en relación a las respectivas escalas usadas en cada uno de los ejes, nos da el módulo de dicha velocidad.

Al representar los valores de posición y tiempo, con sus respectivas incertezas, se obtiene un rectángulo (para cada medición). ¿Cómo trazar la mejor curva por dichos puntos? Un método analítico riguroso es el de los cuadrados mínimos. Otro es el gráfico, no tan riguroso pero práctico. Se trazan dos rectas la de máxima y mínima pendiente que pasen por todos los rectángulos trazados, pivoteando en un punto seguro.

Representamos como mejor recta a aquella cuya pendiente (m) es la media aritmética de ambas: $m = \frac{m_1 + m_2}{2}$ con un intervalo de incerteza $\Delta m = \frac{m1 - m2}{2}$



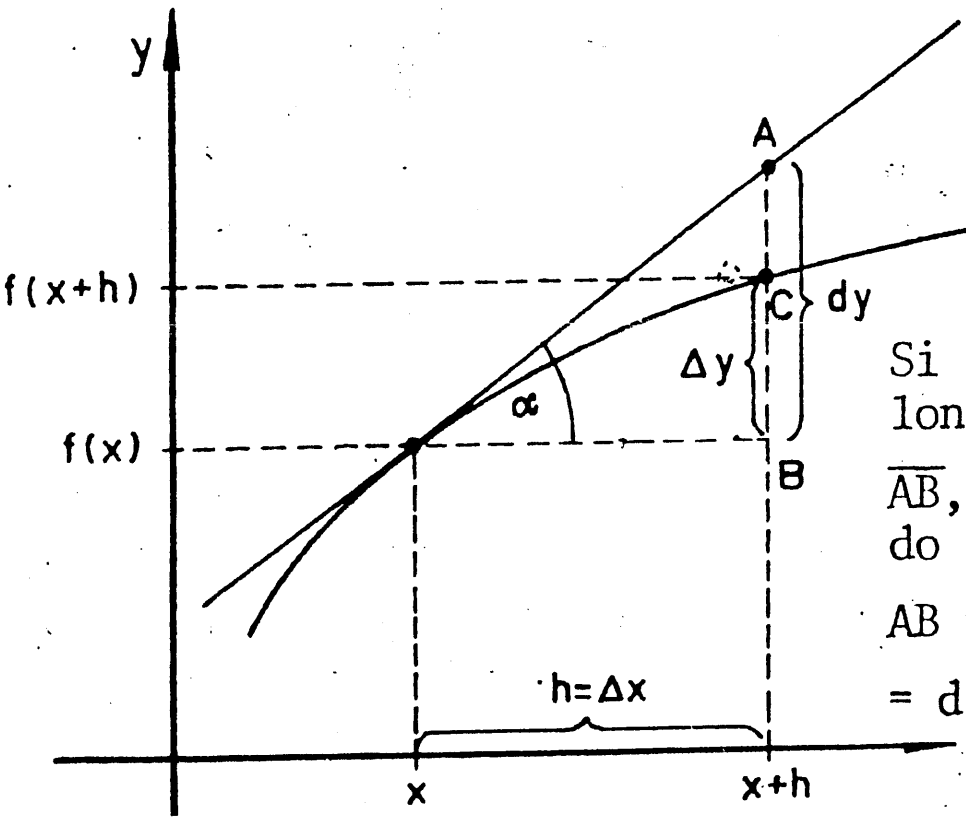
Método general para la incertidumbre en funciones de:

- Una variable

A través del cálculo diferencial se puede lograr una simplificación para la obtención de incertezas, especialmente en los casos para los que el planteamiento de diferencias finitas conduce a una importante complejidad algebraica. Para ello se revisará el concepto de diferencial de una función con el auxilio del siguiente gráfico:

$$\Delta y = \Delta f(x;h) = f(x+h) - f(x)$$

$$dy = df(x;h) = f'(x).h$$



Si designamos AB la longitud del segmento $\overline{AB}$, resulta, observando el gráfico:

$$AB = \operatorname{tg} \alpha .h = f'(x).h = df(x;h)$$

Si se utiliza AB en lugar de BC, se reemplaza el gráfico de f, entre x y x+h, por la recta tangente en el punto (x, f(x;h)). El error que se comete al reemplazar f(x+h) por f(x) + df(x) puede hacerse tan pequeño como se quiera con tal de que h sea convenientemente pequeño. De la expresión dy = f(x)´.dx se pueden deducir las reglas para diferenciar funciones en una variable.

Por ejemplo:
Sea $f(x) = x_2 - 2x + 1$, hallar Δy, dy en el punto $x=3$ para un $\Delta x= 0,1$. Verificar que el error que se comete al reemplazar $f(3,1)$ por $f(3) + df(3; 0,1)$ es de 0,01.

- Varias variables

Se tiene una $z = f(x,y)$. Para evaluar Δz se utiliza, como se dijo precedentemente, el dz. Pero al depender de más de una variable se realiza la derivación respecto de una sola de las variables, considerando las otras como constantes (concepto de derivada parcial).
Es decir, para este caso: $dz = \frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{\delta f}{\delta y} dy$, donde las derivadas se calculan en x_0 e y_0. Tener en cuenta que se están despreciando los diferenciales de orden superior al primero del desarrollo en serie de la función $z= f(x,y)$.

$$f(x,y) = f(x,y)\big|_{x_0,y_0} + \frac{\delta f}{\delta x}\Big|_{x_0,y_0} . dx + \frac{\delta f}{\delta y}\Big)\Big|_{x_0,y_0} . dy + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\Big|_{x_0,y_0} . d^2 x + \ldots$$

El máximo error se producirá cuando todos los términos que definen a Δz tienen el mismo signo.

$$\underbrace{f(x,y) - f(x,y)\big|_{x_0,y_0}}_{\Delta f} = \left|\frac{\delta f}{\delta x}\Big|_{x_0,y_0} . \Delta x\right| + \left|\frac{\delta f}{\delta y}\Big)\Big|_{x_0,y_0} . \Delta y\right|$$

<u>Ejemplo:</u>

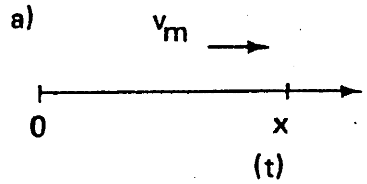
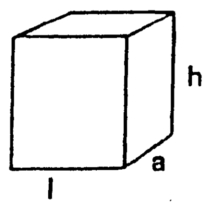
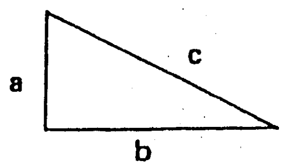
Estimar la incerteza en el cálculo del volumen de un prisma rectangular de dimensiones a, l y h.
El volumen es $V = a.l.h$. Utilizando el cálculo diferencial:

$$\Delta V = \left|\frac{\delta V}{\delta a}\Big|_{a_0,l_0,h_0}\right| .\Delta a + \left|\frac{\delta V}{\delta l}\Big|_{a_0,l_0,h_0}\right| . \Delta l + \left|\frac{\delta V}{\delta h}\Big|_{a_0,l_0,h_0}\right| \Delta h$$

$\Delta V = l_0 . h_0 . .\Delta a + a_0 . h_0 . .\Delta l + a_0 . h_0 . .\Delta h$
Si se divide por V_0 se obtiene:

$$\boxed{\varepsilon(V) = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{\Delta h}{h_0}}$$

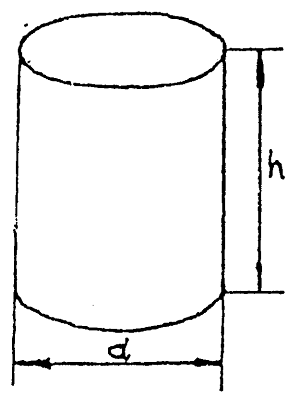
Verificar que se llega a igual resultado usando cuadro (1).

	MEDICIONES DIRECTAS	RELACION	MEDICION INDIRECTA
a) 	x t	$v_m = \frac{x}{t}$	Velocidad media
b) 	a l h	V=a.l.h	Volumen
c) 	a b c	P=a+b+c	Perímetro

Medición del volumen del cilindro con un calibre.

Calibre marca:

Esquema:



Aproximación del instrumento:

Δh =

Δd =

TABLA DE VALORES

i	h_i (mm)	d_i (mm)
1		
2		
3		

Bibliografía

Experimentación.Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos. D.C. Baird. Editorial Prentice Hall.

Módulo de Física. Volumen 1: Teoría de la Medida, Cinemática y Dinámica GDME. (63.01.22) CEI, 1992.

Errores de medición en el laboratorio. R. Adam, A. Bella, E. Cicerchia. Facultad de Cs Bioquímicas y Farmaceúticas. U.N.R.

Mediciones Físicas. J. Balseiro. Hachette.

Guía de Trabajos Prácticos : Física I (62.01). CEI, 1996.

Introducción al Análisis Matemático (Cálculo I y II). H. Rabuffetti. Ateneo.