Índice

/2

Problema 1

(los valores no son reales, sino que son supuestos para llevar a cabo el ejemplo)
En Una fábrica se elabora un producto en polvo. El paquete indica que tiene un peso de 800 grf. y el producto tiene un peso especifico de ρ =0,425 grf/ml

la máquina que dosifica el producto lo hace en forma volumétrica y el ajuste del cilindro dosificador tiene un error de 0,9 ml, ¿Cuál es el error que se comete en el peso del paquete durante el proceso de elaboración?

Solución
El peso especifico tal como se lo especifica tiene un error de medición de 0,005 grf/ml.
La máquina intenta dosificar 800grf. = 1882,35 ml cosa que no es posible ya que el error que comete la máquina es cercano a 1 ml.

Volumen dosificado = $\mathbf{1882} \pm \mathbf{0{,}9}\ ml$

la ecuación que permite calcular el peso es $Peso = \rho.Volumen$
el error en el peso es:

$$|\Delta P| \le \left|\frac{\partial P}{\partial \rho}\right||\Delta \rho| + \left|\frac{\partial P}{\partial V}\right||\Delta V|$$

en nuestro caso

$$|\Delta P| \le |V||\Delta \rho| + |\rho||\Delta V|$$

$$|\Delta P| \le |1882||0{,}005| + |0{,}425||0{,}9|\,grf = 9{,}79\ grf.$$

el error relativo es $$\varepsilon_r(P) = \frac{\Delta P}{P} = \frac{9{,}79\,grf}{800\,grf} = 0{,}0122 \Rightarrow \varepsilon_{\%}(P) = 1{,}22\%$$

evidentemente el error porcentual es más que aceptable para el proceso de elaboración que se esta desarrollando y el producto es lanzado al mercado con un peso de

$$P = (800 \pm 9{,}79)grf$$

es decir la cota máxima y mínima son

$$P_{max} = 809{,}79\,grf \qquad P_{min} = 790{,}21\,grf$$

El diferencial

Supongamos que la función

$$y = f(x)$$

es derivable sobre el segmento [a,b], la derivada de esta función queda definida por la igualdad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

cuando $\Delta x \to 0$, la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

tiende a un número determinado $f'(x)$, pero dicha razón se diferencia de la derivada $f'(x)$ en una magnitud infinitamente pequeña:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

donde $\alpha \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$.
Multiplicando todos los términos de la última igualdad por Δx, obtenemos:

$$\Delta y = f'(x).\Delta x + \alpha.\Delta x \qquad (1)$$

El producto $f'(x).\Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña de primer orden con respecto a Δx.
El producto $\alpha.\Delta x$ es siempre una magnitud infinitamente pequeña de orden superior a Δx.

Ejemplo:
¿Qué significa una magnitud infinitamente pequeña de orden Δx?
Supongamos tener la función

$$y = f(x) = x$$

su derivada

$$y' = f'(x) = 1$$

y el producto

$$f'(x).\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x$$

si Δx adopta distintos valores como los indicados en la tabla el producto $f'(x).\Delta x$ es:

Δx	$f'(x).\Delta x$
1	1
0,1	0,1
0,01	0,01
0,001	0,001
0,0001	0,0001
0,00001	0,00001

pero el producto $\alpha.\Delta x$ es de orden superior cuando α es una magnitud pequeña de primer orden y Δx también lo es, para entender esto observemos la siguiente tabla:

α	Δx	$\alpha.\Delta x$
1	1	1
0,1	0,1	0,01
0,01	0,01	0,001
0,001	0,001	0,00001
0,0001	0,0001	0,0000001

Se observa que un infinitésimo de orden superior tiende más rápido a cero que un infinitésimo de primer orden cuando se calcula el límite, lo que nos permite deducir que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha.\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

*Así pues, el incremento Δy de la función se compone de dos sumandos, de los cuales el primero recibe el nombre **parte principal del incremento**, que es **lineal** con relación a Δx. De esta manera el producto $f'(x).\Delta x$ se denomina **diferencial** de la función y se designa por dy o $df(x)$.*
De modo que, si la función

$$y = f(x)$$

*tiene derivada $f'(x)$ en el punto "x", el producto $f'(x).\Delta x$ se llama **diferencial** y se denota*

$$dy = f'(x).\Delta x$$

*si hallamos el diferencial de la función $y = x$. En este caso $y' = (x)' = 1$ y por tanto, $dy = dx = \Delta x$ o $dx = \Delta x$. De este modo, la **diferencial dx de la variable independiente "x" coincide con el incremento Δx**. La igualdad $dx = \Delta x$ podría ser considerada como definición de la **diferencial de una variable independiente**, y en este caso, el ejemplo examinado demostraría que ello no contradice a la definición de diferencial de la función. En cualquier caso la función diferencial se escribe:*

$$dy = f'(x).\Delta x$$

de esto se desprende que

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

reemplazando en la ecuación (1)

$$\Delta y = f'(x).\Delta x + \alpha.\Delta x$$

queda

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}.\Delta x + \alpha.\Delta x$$

dado que hemos aceptado que $dx = \Delta x$, simplificando llegamos a $\Delta y = dy + \alpha.\Delta x$
así, púes, el incremento de la función difiere de la diferencial de ésta en una magnitud infinitamente pequeña, de orden superior respecto a Δx.
Esto nos permite, a veces, utilizar en los cálculos aproximados la igualdad aproximada

$$\Delta y \approx dy$$

o, en su forma desarrollada,

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x).\Delta x$$

con lo cual se abrevian los cálculos.

Ejemplo:

Calcular el diferencial dy *y el incremento* Δy *de la función* $y=x^2$

1. *Para valores arbitrarios de* x *y* Δx
2. *Para* $x=20$ *y* $\Delta x=0{,}1$

Solución

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=\mathbf{2}x.\Delta x+\Delta x^2$$

$$dy=(x^2)'.\Delta x=\mathbf{2}x.\Delta x$$

SI $x=20$ *y* $\Delta x=0{,}1$ *entonces*

$$\Delta y=\mathbf{2.20.0{,}1}+(\mathbf{0{,}1})^2=\mathbf{4{,}01}$$

$$dy=\mathbf{2.20.0{,}1}=\mathbf{4{,}00}$$

el error que resulta de la sustitución de Δy *por* dy *es de 0,01, en muchos casos se lo puede despreciar por considerarlo pequeño en comparación a* $\Delta y=4{,}01$.

Introducción al cálculo de errores

En la sección anterior hemos determinado que $\Delta y=f'(x).\Delta x+\alpha.\Delta x$ *si tomamos módulos a ambos lados de la igualdad, esta se sigue manteniendo.*

$$|\Delta y|=|f'(x).\Delta x+\alpha.\Delta x|$$

pero Δx *puede ser un número positivo o negativo, si en el miembro izquierdo tomamos módulos a cada uno de los sumandos, nos queda*

$$|\Delta y|\leq|f'(x).\Delta x|+|\alpha.\Delta x|$$

como el producto de $\alpha.\Delta x$ *es un infinitésimo de orden superior este puede despreciarse, quedando la estimación del incremento de la función*

$|\Delta y|\leq|f'(x).\Delta x|$ *lo que es lo mismo a* $\boxed{|\Delta y|\leq|f'(x)|.|\Delta x|}$

Ejemplo de aplicación:

Supongamos que queremos determinar el volumen de un cubo cuyo lado $x=30$ *cm y el intrumento de medición utilizado tiene una aproximación de 0,01 mm. Calcular su volumen y estimar el error máximo comentido.*

Solución

En nuestro caso el volumen (la función) es $y=x^3$, *se conoce la indeterminación de la variable "* x *" y se debe calcular el error de cálculo de la variable "* y *", para ello se calcula la derivada de la función siendo esta:*

$$y'=f'(x)=\mathbf{3}x^2$$

el error cometido en el cálculo del volumen será

$$|\Delta y|\leq|f'(x)|.|\Delta x|=|\mathbf{3}x^2|.\Delta x$$

en nuestro caso

$$|\Delta y| \leq \left|3.(300mm)^2\right|.0{,}01mm$$

$$|\Delta y| \leq 2700mm^3 = 2{,}7cm^3$$

el volumen será

$$Volumen = y = 27000000mm^3 = 27000cm^3$$

finalmente el volumen se expresa

$$Volumen = y = (27000 \pm 2{,}7)cm^3$$

Funciones de varias variables

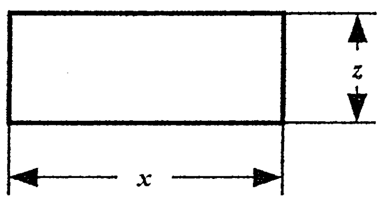
El estudio de diferentes fenómenos obliga a utilizar las funciones de dos y más variables independientes. Demos algunos ejemplos.

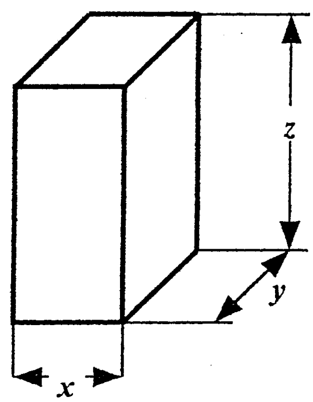
Ejemplo 1.

El área "S" de un rectángulo de lados x e y, se da por la fórmula:

$$S = x.y$$

A cada par de valores de x e y, corresponde un valor determinado del área S; S es una función de varias variables.





Ejemplo 2:

El volumen V de un paralelepipedo recto, en que las aristas tienen longitudes x,y,z, se da la formula:

$$V = x.y.z$$

aquí el volumen es una función de tres variables.

Definición

*si a cada par (x,z) de valores de dos variables, x e z, independientes una de otra, tomadas del dominio de la función, le corresponde un valor determinado de la magnitud "y", se dice que "y" es una **función de dos variables independientes** x e z, definidas en el dominio "**D**".*

La forma simbólica de una función de dos variables se representa así:

$$y = f(x,z)$$

Si la función fuese de más variables su representación sería

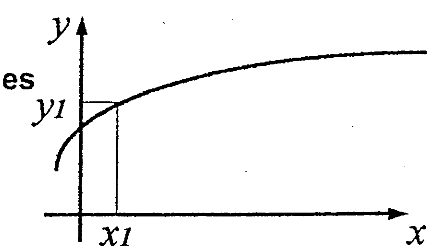
$$y = f(r,s,t,.......,w,x,z)$$

Representación geométrica de una función de dos variables

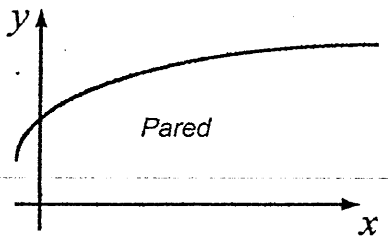
Ya hemos visto que la representación de una función de una variable

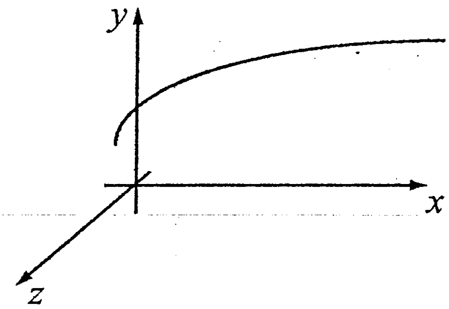
$$y = f(x)$$

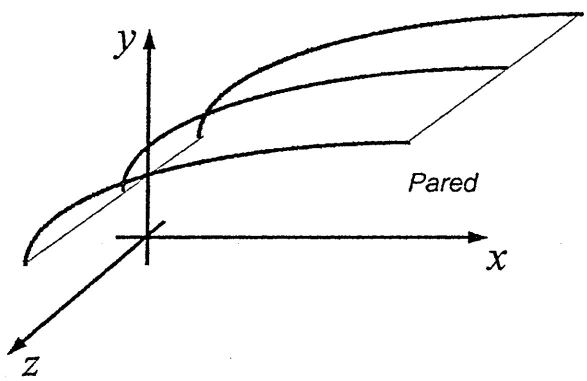
es la que se observa en la figura siguiente

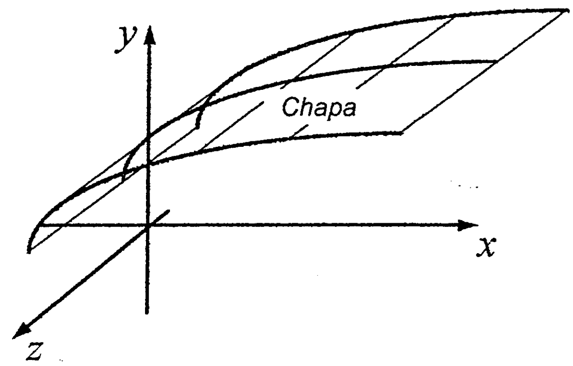


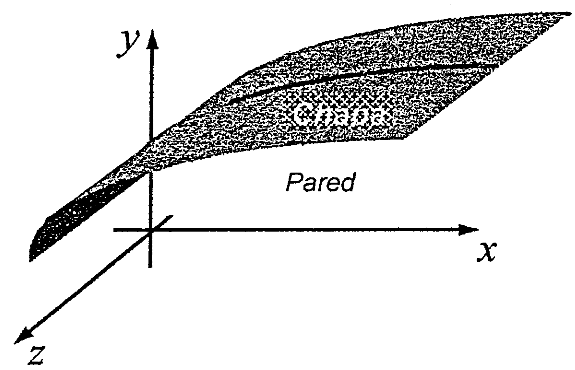
esta función de una sola variable puede interpretarse como la intersección de una superficie (chapa doblada) con un plano perpendicular a la superficie (plano de la pared), observar las figuras siguientes:











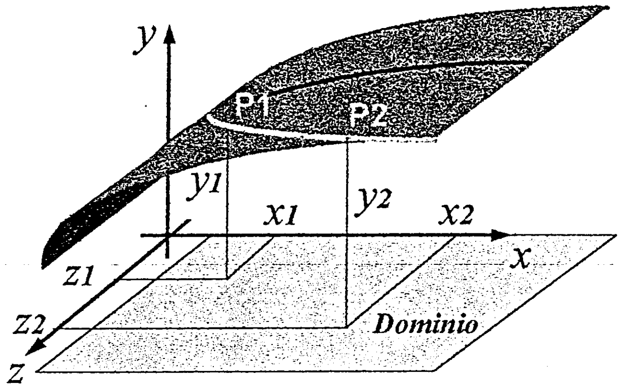
Estrictamente hablando una función de dos variables como la recien mostrada es

$$y = f(x, z) \quad (2)$$

*definida en el dominio del plano x-z. El lugar geométrico de los puntos "**P**", cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) determina una superficie en el espacio. Así la gráfica de una función de dos variables es una superficie cuya proyección sobre el plano x-z, es el dominio de definición de la función. Cada perpendicular al plano x-z corta a la superficie*

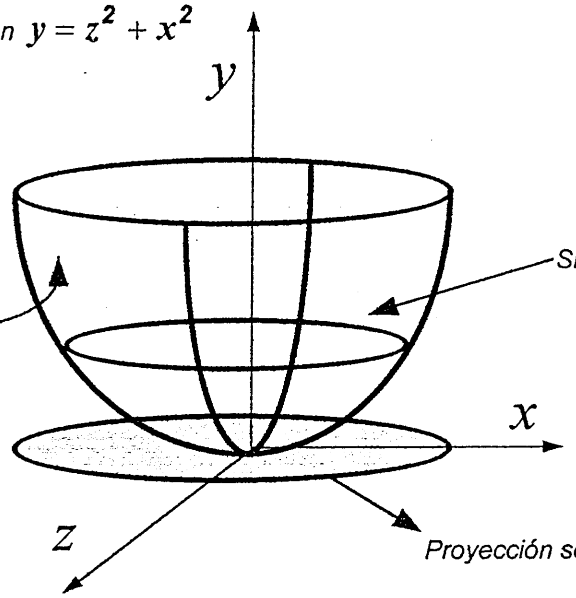
$$y = f(x, z)$$

no más que en un solo punto.

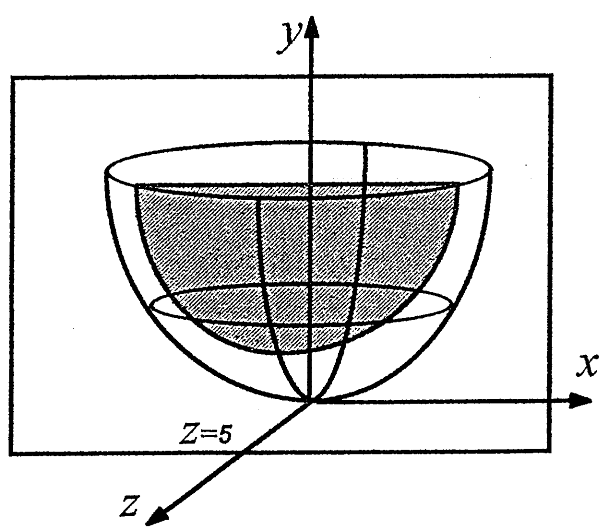


Ejemplo:

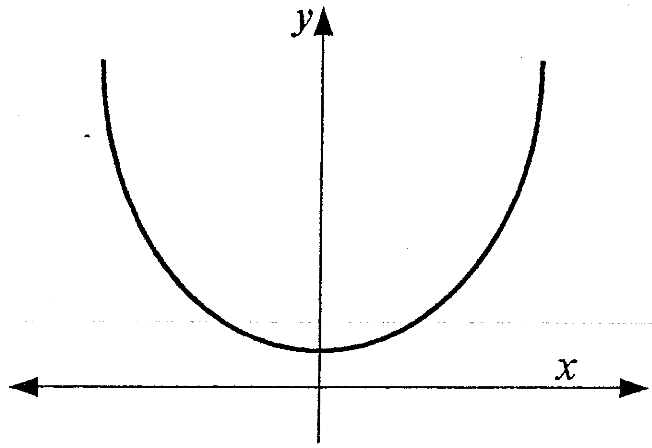
Representar geométricamente la función $y = z^2 + x^2$



si realizamos un corte a la figura recién mostrada por un plano paralelo al x-y, por ejemplo y que pase por z=5

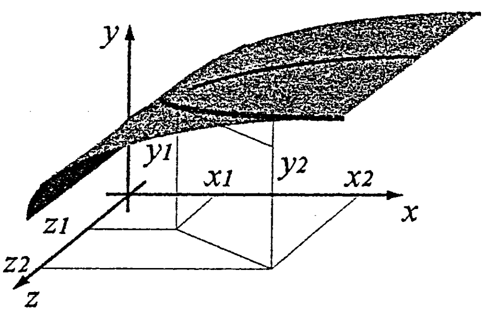


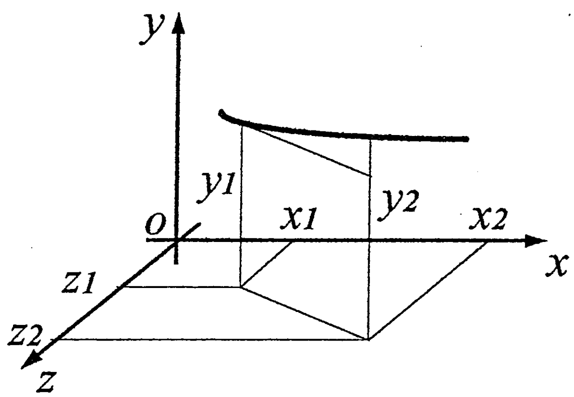
La representación en el plano es



Incremento parcial y total de una función

Examinemos la curva que se encuentra sobre la superficie que se muestra a continuación:





donde $y = f(x,z)$ *con el plano "x" constante, paralelo al plano "yOz".*

Puesto que "x" es constante en todos los puntos del plano indicado, "y" variará a lo largo de la curva solo en función de "z". Demos a la variable independiente "z" un incremento Δz *, entonces el incremento de* $y = f(x,z)$ *recibirá el nombre de **incremento parcial de "y" respecto a "z"** que designaremos con el símbolo*

$$\Delta_z y$$

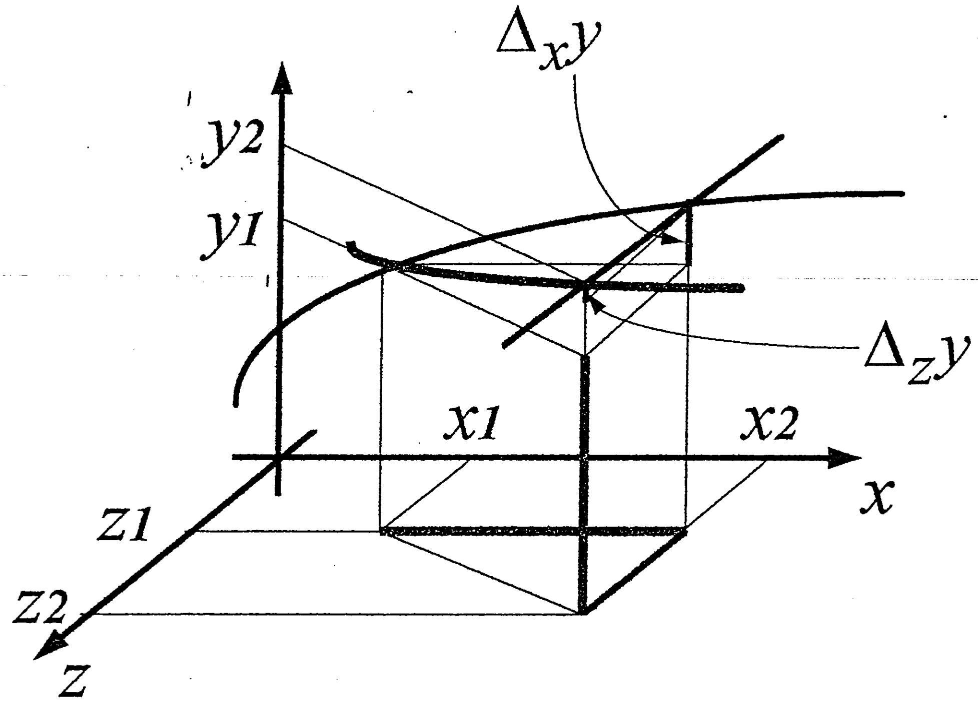
en nuestro caso

$$\Delta_z y = f(x, z + \Delta z) - f(x,z)$$

análogamente, si "z" es constante y damos a "x" un incremento Δx*, el incremento correspondiente a "y" recibirá el nombre de **incremento parcial de "y" respecto a "x"** y lo designaremos*

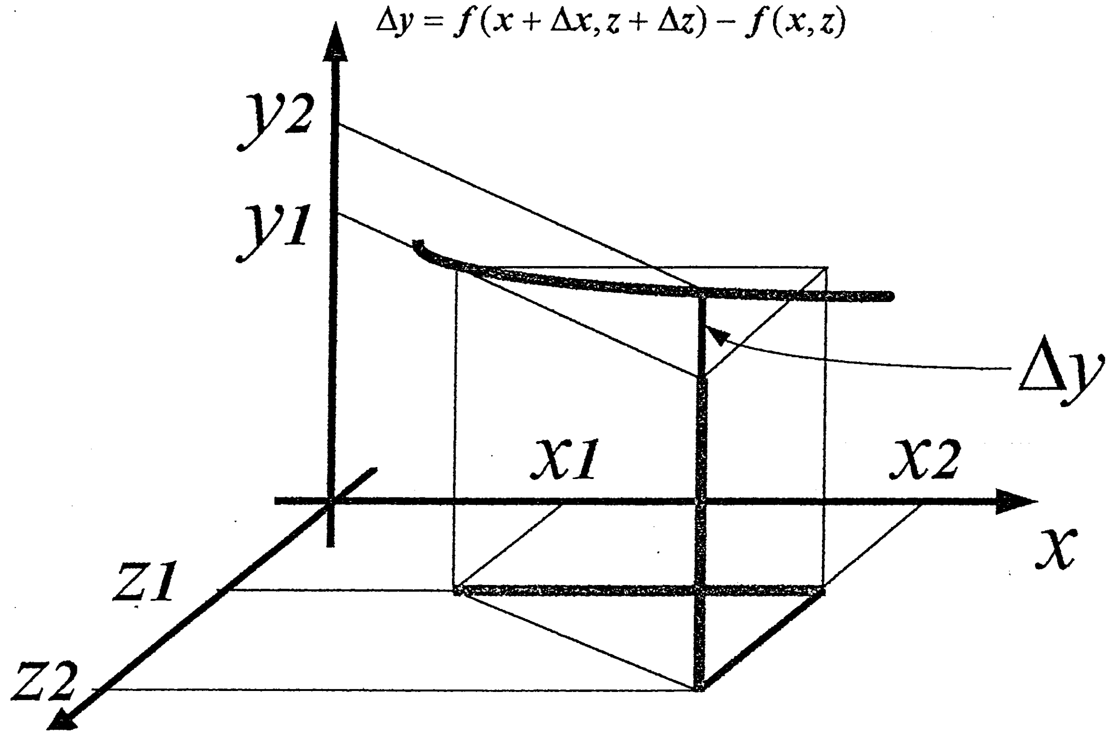
$$\Delta_x y = f(x + \Delta x, z) - f(x,z)$$

la función recibe el incremento $\Delta_x y$ *"a lo largo de la curva" de intersección de la superficie* $y = f(x,z)$ *con el plano "z" constante paralelo al plano "yOx"*



Por último, si damos simultáneamente un incremento Δx a la variable "x" y Δz a la variable "z" obtenemos el correspondiente incremento de la variable "y", Δy que se llama **incremento total de la función** y queda determinado por la fórmula:

$$\Delta y = f(x + \Delta x, z + \Delta z) - f(x, z)$$



Derivadas parciales de la función de varias variables

El límite del cociente incremental

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x y}{\Delta x}$$

se llama ***derivada parcial respecto a x*** *de la función* $y = f(x, z)$.
Nosotros denotaremos a esta derivada parcial como

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ o también } \frac{\partial f}{\partial x}$$

de tal modo, según la definición

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, z) - f(x, z)}{\Delta x}$$

análogamente la derivada parcial respecto a "z" de la función se determina como el límite del cociente incremental

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z y}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, z + \Delta z) - f(x, z)}{\Delta z}$$

Observemos que $\frac{\partial y}{\partial x}$ *se calcula manteniendo invariable "z" y* $\frac{\partial y}{\partial z}$ *manteniendo invariable "x".*
De las definiciones formuladas se deduce que las reglas para calcular las derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular la derivada de las funciones de una variable; es preciso, solamente, tener en cuenta, respecto a qué variable se busca la derivada.

Ejemplo:

Hallar las derivadas parciales $\frac{\partial y}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial y}{\partial z}$ *de la función* $y = x^2 \operatorname{sen}(z)$

Solución:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x.\operatorname{sen}(z)$$

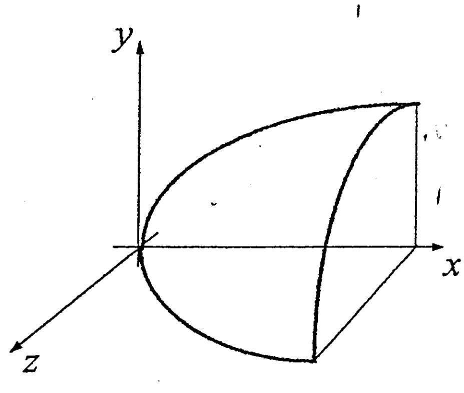
$$\frac{\partial y}{\partial z} = x^2.\operatorname{sen}(z)$$

Interpretación geométrica de la derivada

Sea

$$y = f(x, z)$$

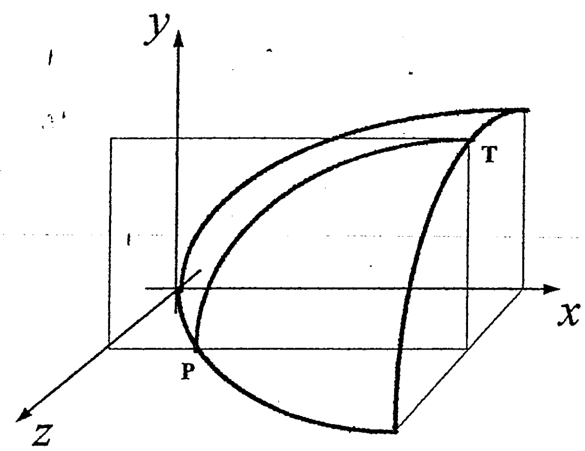
una ecuación de la superficie representada en la figura.

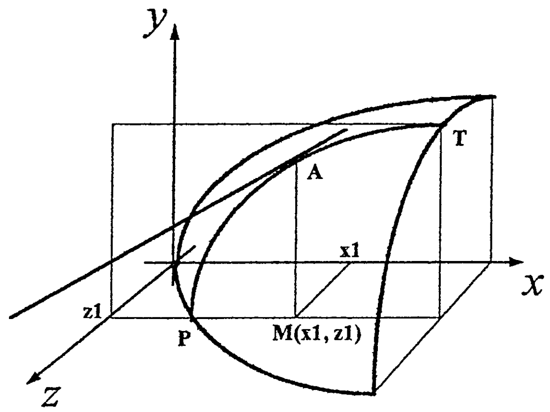


//2

Tracemos el plano "Z=contante". La intersección de este plano con la superficie determina una curva P-T. Examinemos el plano con el cual hemos cortado a la superficie, esta curva está contenida en el plano por lo que se puede hacer el mismo análisis que se ha realizado en funciones de una sola variable.

Tracemos por el punto "A" una recta tangente a la curva, obviamente debe estar contenida en el plano de corte.

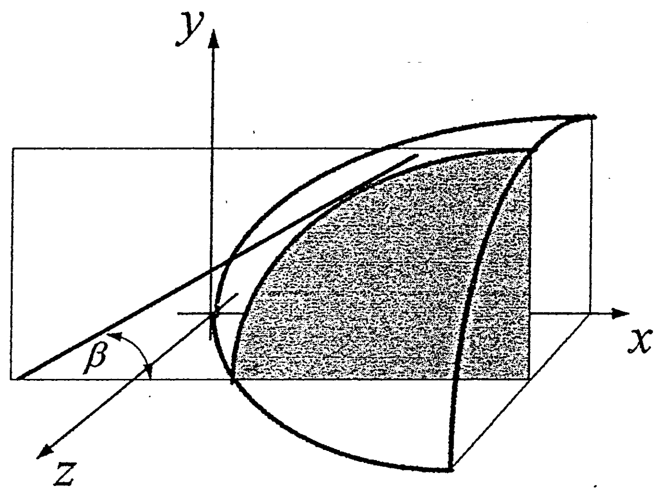


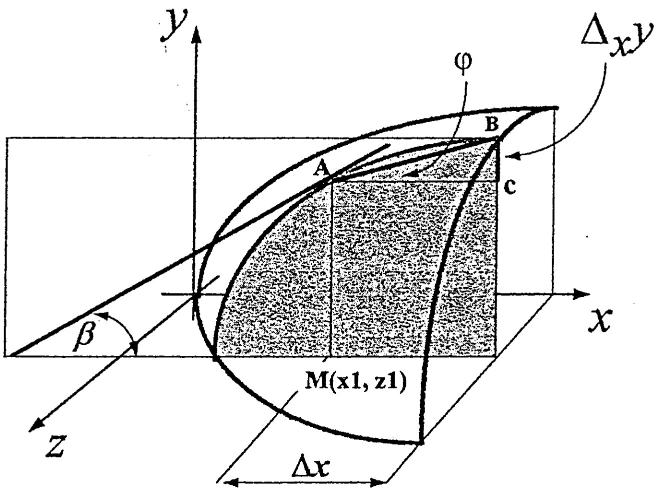


Esta recta tangente formará un ángulo con el plano "xOz" que denominaremos "β"

En el plano de corte como se mantiene invariable "z" podemos dar un incremente a "x" igual a Δx la función sufrirá un incremento $\Delta_x y$ que determinará en la superficie el punto "B".

De esta manera se obtiene una recta secante A - B que forma un ángulo "φ" con el segmento A - C, paralelo al plano "xOz".





12

al aplicar el limite del cociente incremental

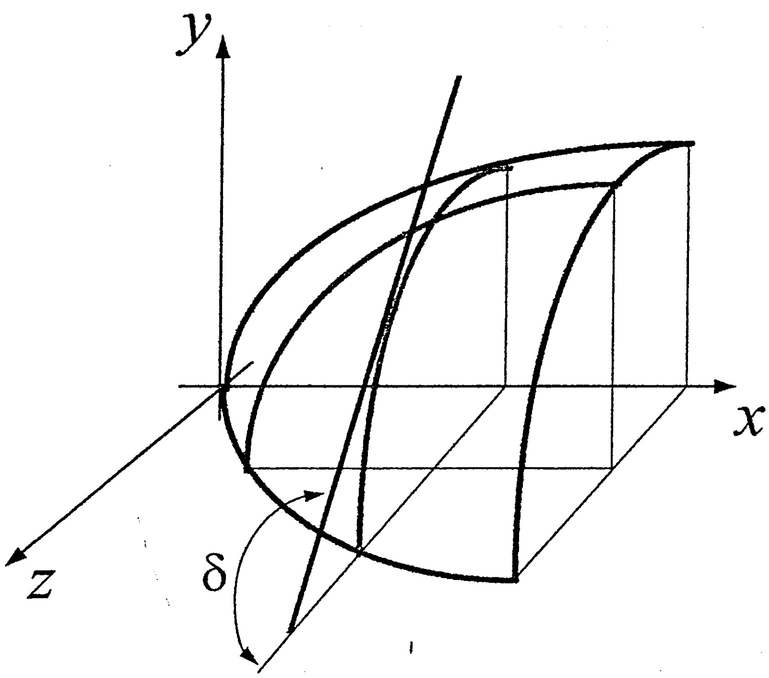
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, z) - f(x,z)}{\Delta x}$$

el ángulo "φ" tiende al ángulo "β", es decir que

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg}(\beta)$$

por lo tanto el valor número de la derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial x}$ *es igual a la tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente a la curva definida por la intersección de la superficie* $y = f(x,z)$ *con el plano Z=contante.*

De modo semejante el valor numérico de la derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial z}$ *es igual a la tangente del ángulo δ formado por la línea tangente a la curva definida por la intersección de la superficie* $y = f(x,z)$ *con el plano x=contante.*



Aplicación del diferencial total para el cálculo aproximado

Supongamos la función

$$y = f(x,z)$$

es derivable en el punto (x,z). Hallamos el incremento total de esta función

$$\Delta y = f(x+\Delta x, z+\Delta z) - f(x,z)$$

de donde $f(x+\Delta x, z+\Delta z) = f(x,z) + \Delta y$. Ya hemos deducido para una variable y generalizando para varias variables ocurre lo mismo que $\Delta y \approx dy$, de donde

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

reemplazando se obtiene $f(x+\Delta x, z+\Delta z) \approx f(x,z) + \dfrac{\partial f(x,z)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x,z)}{\partial z}\Delta z$

realizando pasaje de términos

$$\Delta y = f(x+\Delta x, z+\Delta z) - f(x,z) \approx \frac{\partial f(x,z)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\Delta z$$

Utilización del diferencial para evaluar el error de cálculo

Sea

$$u = f(x,y,z,\ldots,t)$$

una función de las variables $x, y, z, \ldots, t$.

Supongamos que la evaluación de los valores numéricos de las magnitudes $x, y, z, \ldots, t$ *se hace con cierto error correspondiente a* $\Delta x, \Delta y, \ldots\ldots, \Delta t$, *estos pueden ser los errores que se comenten en las lecturas de las variables debidas a los instrumentos de medición utilizados.*

En este caso, el valor de u, *calculado a base de los valores leídos, será también determinado con cierto error* Δu.

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots, t+\Delta t) - f(x,y,\ldots,t)$$

cuando los errores con los que se mide cada variable son conocidos podemos evaluar el error de la función Δu.

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t$$

aquí los valores de las derivadas parciales como los de los incrementos pueden ser tanto positivos como negativos.

Sustituyéndolos por valores absolutos, obtenemos la desigualdad:

$$|\Delta u| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y| + \ldots\ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta t|$$

Ejemplo:

En un circuito eléctrico se puede medir solo la resistencia del mismo con un instrumento que tiene una indeterminación de 2 Ohm y la corriente que circula por los conductores con un error de 0,5 Ampere. Sabiendo que el valor de resistencia leído es 20 Ohms y el de corriente 4 Ampere. Determinar la caída de tensión en la resistencia y con que error se la calculó.

La ley de Ohm dice

$$U = I.R$$

por lo tanto el error con que se calcula la caída de tensión en el circuito es

$$|\Delta U| = \left|\frac{\partial U}{\partial R}\right||\Delta R| + \left|\frac{\partial U}{\partial I}\right||\Delta I| = |I||\Delta R| + |R||\Delta I| = \boldsymbol{4A.2\Omega + 20\Omega.0{,}5A = 18Volt}$$

y la tensión es $U = R.I = \boldsymbol{20\Omega.4A = 80Volt}$ *por lo tanto la tensión es* $U = \boldsymbol{80 \pm 18Volt}$

Error relativo y error porcentual de una magnitud física

El error relativo y el error porcentual son simplemente definiciones:

Error relativo

$$\varepsilon_r(u) = \frac{\Delta u}{u}$$

Error porcentual es

$$\varepsilon_{\%}(u) = \frac{\Delta u}{u}.100$$

en el ejercicio anterior el error relativo que se ha cometido en el cálculo del error es

$$\varepsilon_r(u) = \frac{\boldsymbol{18Volt}}{\boldsymbol{80Volt}} = \boldsymbol{0{,}225}$$

se observa que este error es un número adimensional y el error relativo es

$$\varepsilon_{\%}(u) = \frac{\Delta u}{u}.100 = 22{,}5\%$$

cabe la pena aclarar que cuando se tiene un error inferior al 5% se considera que se ha realizado una medición de la magnitud aceptable. Cuando esto no ocurre se debe replantear el método o los instrumentos de medición utilizados.
El método de medición influye en la ecuación y evidentemente en sus derivadas parciales que darán origen al cálculo del error, y los instrumentos de medición son los que proveen los errores de incertidumbre de los instrumentos. Cuanto más groseros sean estos errores mayor será también el error relativo y por ende el error porcentual.

152