NOTAS SOBRE
POLINOMIOS Y FUNCIONES DE TCHEBYCHEV

Ing. Juan Sacerdoti

Departamento de Matemática

Facultad de Ingeniería

Universidad de Buenos Aires

2002

V2

INDICE

POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV

1. INTRODUCCIÓN

1.1.- PORQUE TCHEBYCHEV

Los Polinomios de Tchebychev conforman un Sistema Ortogonal en el intervalo $x \in [-1\ 1]$ y por ello son un caso particular de los Sistemas Ortogonales sobre los cuales se pueden desarrollar Series de Fourier.

Otra propiedad relevante de los Polinomios Tchebychev es que tienen una mejor aproximación a un segmento de recta dado, en el sentido que el valor absoluto de sus extremos (máximos y mínimos) son menores o iguales a los de cualquier otro polinomio con el mismo primer coeficiente $a_n = 2^{n-1}$

1.2.- DEFINICION DE LOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV

Una forma de introducir a los polinomios de Tchebychev es a partir de la formula de De Moivre:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

simbolizando con

$C_{n,k}$: número combinatorio de n elementos tomados de a k
c : $\cos\theta$
s : $\sin\theta$

se tiene de la formula de Moivre:

$$\cos n\theta = C_{n,0}\, c^n - C_{n,2}\, c^{n-2} s^2 + C_{n,4}\, c^{n-4} s^4 - \ldots$$

$$\sin n\theta = C_{n,1}\, c^{n-1} s - C_{n,3}\, c^{n-3} s^3 + \ldots$$

$$\sin (n+1)\,\theta = C_{n+1,1}\, c^{n} s - C_{n+1,3}\, c^{n-2} s^3 + \ldots$$

$$\frac{\sin (n+1)\,\theta}{\sin\ \theta} = C_{n+1,1}\, c^{n} - C_{n+1,3}\, c^{n-2} s^2 + \ldots$$

y cambiando de variable

$x = \cos\theta$
$\theta = \text{Arccos } x$ (determinación principal)

resultan los Polinomios de Tchebychev $T_n(x)$ y $V_n(x)$

Def. Polinomios de Tchebychev

$$T_n(x) := \cos n\theta = \cos(n \text{ Arccos } x)$$

$$:= C_{n,0}\, x^n - C_{n,2}\, x^{n-2} (1-x^2) + C_{n,4}\, x^{n-4} (1-x^2)^2 - \ldots$$

$$V_n(x) := \frac{\sin (n+1)\,\theta}{\sin\ \theta}$$

$$:= C_{n+1,1}\, x^{n} - C_{n+1,3}\, x^{n-2} (1-x^2) + \ldots$$

1.3.- PROPIEDADES PRIMERA PARTE

1.3.1.- PARIDAD

Los polinomios $T_n(x)$, $V_n(x)$ tienen la paridad de n.

T₁.- $$\textbf{Def } T_n(x),\ V_n(x) \ \Rightarrow n \in \text{Par} \ \Rightarrow T_n(x),\ V_n(x) \in \text{Funciones Pares}$$
$$\Rightarrow n \in \text{Impar} \ \Rightarrow T_n(x),\ V_n(x) \in \text{Funciones Impares}$$

D.- De la definición se implica directamente la Tesis

1.3.2. VALORES NOTABLES

T.- Def $T_n(x)$, $V_n(x)$ $\Rightarrow$ ***T₂.-*** $T_n(1) = 1$
$V_n(1) = n+1$

$\Rightarrow$ ***T₃.-*** $T_n(-1) = (-1)^n$
$V_n(-1) = (n+1)\,(-1)^n$

$\Rightarrow$ ***T₄.-*** $$T_n(0) = \cos\frac{n\pi}{2} \xrightarrow{n=2k} T_{2k}(0) = (-1)^k$$
$$\xrightarrow{n=2k+1} T_{2k+1}(0) = 0$$
$$V_n(0) = \sin\frac{(n+1)\pi}{2} = \cos\frac{n\pi}{2} = T_n(0)$$

1.3.3.- EXPRESION DE LOS PRIMEROS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV

T₅.- $T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$

$T_5(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$

$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$

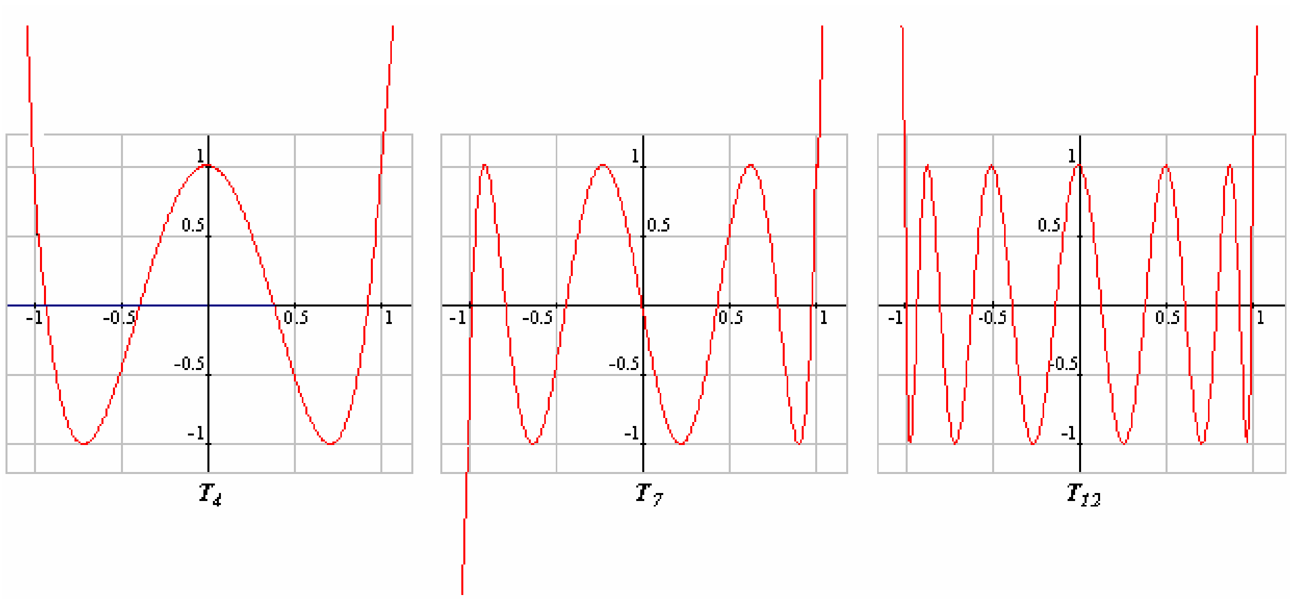
$V_0(x) = 1$

$V_1(x) = 2x$

$V_2(x) = 4x^2 - 1$

$V_3(x) = 8x^3 - 4x$

1.3.4.- REPRESENTACIÓN GRAFICA DE ALGUNOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV



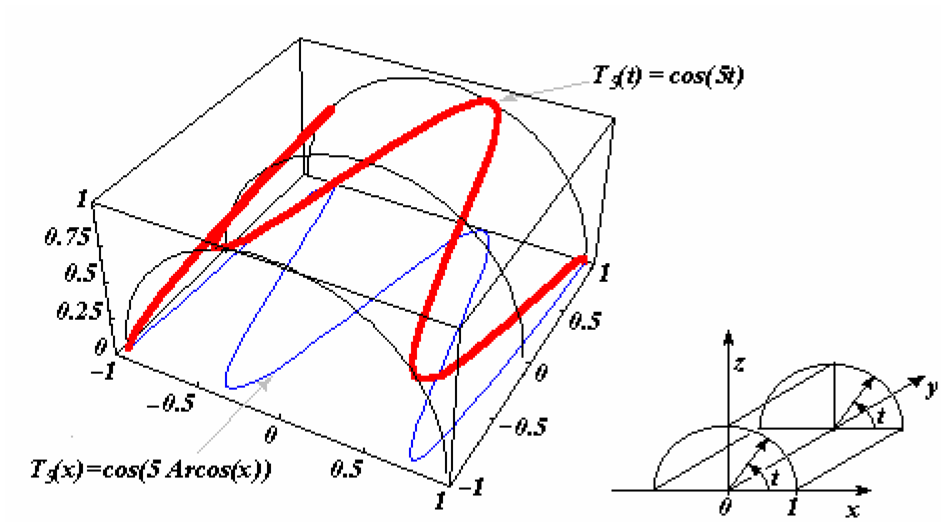
T_4 T_7 T_{12}

1.3.5.- LOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV COMO PROYECCIÓN DE UNA COSINUSOIDE DESARROLLADA SOBRE UN CILINDRO

Los polinomios de Tchebychev $T_n(x)$ en el intervalo $x \in [-1\ 1]$ es la proyección de una cosinusoide desarrollada sobre un cilindro de revolución, sobre un plano axial. Estas proyecciones son un caso particular de las curvas de Lissajous.

1.3.5.1.- Ejemplo $T_5(x)$

Se representa en la figura que sigue al Polinomio $T_5(x) = cos(5\ Arcos(x))$ como proyección de cosinusoide desarrollada sobre una superficie cilíndrica de radio 1.



Valores de cos(5t)

t	***0***	***π/10***	***2π/10***	***3π/10***	***4π/10***	***5π/10***	***6π/10***	***7π/10***	***8π/10***	***9π/10***	***π***
cos(5t)	***1***	***0***	***– 1***	***0***	***1***	***0***	***– 1***	***0***	***1***	***0***	***– 1***

Ecuación de la curva cosinusoide γ desarrollada sobre un cilindro: $x^2 + z^2 = 1$

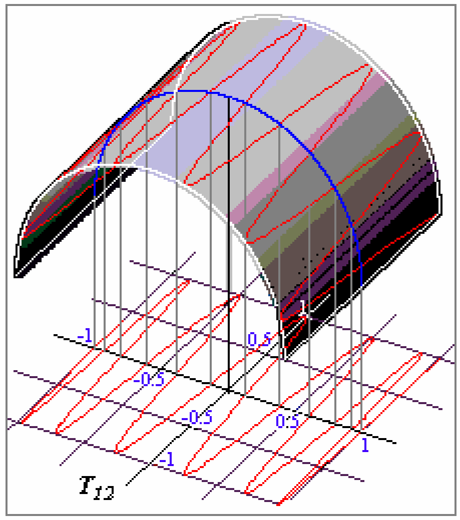
$$T_5(t) = cos(5t) \rightarrow \begin{cases} x = cos(t) \\ y = cos(5t) \\ z = sin(t) \end{cases}$$

Ecuación de la proyección de la curva cosinusoide desarrollada sobre un cilindro: $T_5(x)$

$$T_5(t) = cos(5\ Arcos(t)) \rightarrow \begin{cases} x = cos(t) \\ y = cos(5t) \\ z = 0 \end{cases}$$

1.3.5.2.- Ejemplo $T_{12}(x)$

Análogamente se representa en la figura el Polinomio $T_{12}(x) = cos(12\ Arcos(x))$ como proyección de cosinusoide desarrollada sobre una superficie cilíndrica de radio 1.



Valores de cos(5t)

t	*0*	*π/24*	*2π/24*	*3π/24*	*4π/24*	*5π/24*	*6π/24*	*7π/24*	*8π/24*	*9π/24*	*10π/24*	*11π/24*	*12π/24*
cos(12t)	*1*	*0*	*– 1*	*0*	*1*	*0*	*– 1*	*0*	*1*	*0*	*– 1*	*0*	*1*

Ecuación de la curva cosinusoide γ desarrollada sobre un cilindro: $x^2 + z^2 = 1$

$$T_{12}(t) = cos(12t) \rightarrow \begin{cases} x = cos(t) \\ y = cos(12t) \\ z = sin(t) \end{cases}$$

Ecuación de la proyección de la curva cosinusoide desarrollada sobre un cilindro: $T_{12}(x)$

$$T_{12}(t) = cos(12\ Arcos(t)) \rightarrow \begin{cases} x = cos(t) \\ y = cos(12t) \\ z = 0 \end{cases}$$

1.3.6.- ACOTACIÓN EN EL INTERVALO [–1 1]

T_6.- ***Def $T_n(x)$, $V_n(x)$*** $\Rightarrow$ $|\, T_n(x)| = |\cos n\theta\,| \leq 1$

$$\Rightarrow \quad |\, V_n(x)| = \left| \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta} \right| \leq n+1$$

D.- $|\, T_n(x)| = |\cos n\theta\,| \leq 1$

$$V_n(\theta) = \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta}} \; \frac{1 - e^{-i2(n+1)\theta}}{1 - e^{-i2\theta}}$$

$$= e^{in\theta}\,[\,1 + e^{-i2\theta} + (e^{-i2\theta})^2 + (e^{-i2\theta})^3 + \ldots + (e^{-i2\theta})^n\,]$$

$$|\, V_n(\theta)\,| \leq 1\,.\,(n+1)$$

1.3.7.- COEFICIENTES NOTABLES

T_7.- ***$T_n(x)$*** $\Rightarrow$ ***$Coef(x^n) = 2^{n-1}$***

$V_n(x)$ $\Rightarrow$ ***$Coef(x^n) = 2^n$***

D.- Pues por las Fórmulas del Cálculo Combinatorio

L.- (Lema) $C_{n,0} + C_{n,2} + C_{n,4} + \ldots = 2^{n-1}$

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} = 2^n$$

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\,(-1)^k$$

$$C_{n,0} + C_{n,2} + C_{n,4} + \ldots = C_{n,1} + C_{n,3} + C_{n,5} + \ldots$$

$$C_{n,0} + C_{n,2} + C_{n,4} + \ldots = C_{n,1} + C_{n,3} + C_{n,5} + \ldots = 2^{n-1}$$

Análogamente si se toma n+1 el lema anterior queda

$$C_{n+1,0} + C_{n+1,2} + C_{n+1,4} + \ldots = C_{n+1,1} + C_{n+1,3} + C_{n+1,5} + \ldots = 2^n$$

Como

$$T_n(x) = \cos n\theta = C_{n,0}\, c^n - C_{n,2}\, c^{n-2}(1-c^2) + C_{n,4}\, c^{n-4}(1-c^2)^2 - \ldots$$

$$Coef(x^n) = C_{n,0} + C_{n,2} + C_{n,4} + \ldots = 2^{n-1}$$

A su vez

$$V_n(x) = \frac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\,\theta} = C_{n+1,1}\, c^{\,n} - C_{n+1,3}\, c^{n-2}(1-c^2) + C_{n+1,5}\, c^{n-4}(1-c^2)^2 - \ldots$$

$$\mathrm{Coef}(x^n) = C_{n,1} + C_{n,3} + C_{n,5} + \ldots = 2^n$$

1.3.8.- CEROS

1.3.8.1.- EXPRESIÓN DE LOS CEROS

Los ceros de los polinomios de Tchebychev son todos reales y todos están comprendidos en el intervalo [–1 1] y su cantidad es n igual al orden del polinomio.

T₈.- $\quad$ ***Def*** $T_n(x)\,,\, V_n(x) \;\Rightarrow\; T_n(x) = 0 \;\Rightarrow\; z_k = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad k\in\langle 1..\, n\rangle$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;\Rightarrow\; V_n(x) = 0 \;\Rightarrow\; z_k = \cos\dfrac{k\pi}{n+1} \qquad k\in\langle 1..\, n\rangle$

D.-

$$T_n(z) := \cos n\theta = \cos(n \,\mathrm{Arccos}\, z) = 0$$

$$n\,\mathrm{Arccos}\, z = \frac{(2k-1)\pi}{2}$$

$$z_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

$$V_n(z) := \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\,\theta} = 0$$

$$\sin[(n+1)\,\mathrm{Arccos}\, z] = 0$$

$$(n+1)\,\mathrm{Arccos}\, z = k\,\pi$$

$$z_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}$$

Obs.1: Nótese que para $k = \{0,\pi\}$ de $z_k = \cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ se cumple $V_n(0) = V_n(\pi) = 1$ y por lo tanto no son ceros.

Obs.2: Se observa además que los ceros de los polinomios de Tchebychev son simétricos.

1.3.8.2.- LOS POLINOMIOS DE TCHEBICHEV EN FUNCIÓN DE LOS CEROS

Los polinomios de Tchebychev expresados en función de los ceros será.

T₉.- $\quad$ ***Def*** $T_n(x)\,,\, V_n(x)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\; T_{2p}(x) = 2^{2p-1}\;(x^2-x_1^2)\,(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_p^2)\\
&\Rightarrow\; T_{2p+1}(x) = 2^{2p}\;x\;(x^2-x_1^2)\,(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_p^2)\\
&\Rightarrow\; V_{2p}(x) = 2^{2p}\;(x^2-x_1^2)\,(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_p^2)\\
&\Rightarrow\; T_{2p+1}(x) = 2^{2p+1}\;x\;(x^2-x_1^2)\,(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_p^2)
\end{aligned}$$

Las expresiones de las Tesis surge inmediatamente del teorema fundamental del álgebra y de la expresión del coeficiente a_n de la potencia x^n.

1.3.9.- INTERRELACIONES ENTRE LOS DISTINTOS TIPOS DE POLINOMIOS

1.3.9.1.- SUMAS ENESIMAS

T_{10}.- Def $T_n(x)$, $V_n(x)$ $\Rightarrow$ $$\boldsymbol{V_n - V_{n-2} = 2\ T_n}$$

$$\boldsymbol{V_{2k} = V_0 + 2\,[\,T_2 + T_4 + T_6 + \dots + T_{2k}\,]}$$

$$\boldsymbol{V_{2k+1} = V_1 + 2\,[\,T_3 + T_5 + T_7 + \dots + T_{2k+1}\,]}$$

D.-
$$\begin{aligned} V_n - V_{n-2} &= \frac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\ \theta} - \frac{\sin(n-1)\,\theta}{\sin\ \theta} \\ &= 2\cos n\theta \\ &= 2\,T_n \end{aligned}$$

A partir de este resultado en forma recursiva se obtiene para n par e impar respectivamente:

$$V_{2k} = V_0 + 2\,[\,T_2 + T_4 + T_6 + \dots + T_{2k}\,]$$

$$V_{2k+1} = V_1 + 2\,[\,T_3 + T_5 + T_7 + \dots + T_{2k+1}\,]$$

1.3.9.2.- RELACION ENTRE LOS POLINOMIOS T_{n+1} y V_n

Los Polinomios de Tchebychev $T_{n+1}(x)$ y $V_n(x)$ se relacionan entre si por la expresión:

T_{11}.- Def $T_n(x)$, $V_n(x)$ $\Rightarrow$ $$\boldsymbol{T_{n+1}'(x) = (n+1)\,\frac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\ \theta} = (n+1)\,V_n(x)}$$

D.- La expresión se prueba directamente hallando la derivada de $T_{n+1}(x)$

$$\begin{aligned} T_{n+1}'(x) &= \frac{d\ \cos(n+1)\,\theta}{d\,\theta}\ \frac{1}{\dfrac{d\,x}{d\,\theta}} \\ &= \frac{d\ \cos(n+1)\,\theta}{d\,\theta}\ \frac{1}{\dfrac{d\cos\theta}{d\,\theta}} \\ &= (n+1)\ \frac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\ \theta} \\ &= (n+1)\ V_n(x) \end{aligned}$$

1.3.10.- MÁXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS

1.3.10.1.- PUNTOS EXTREMANTES DE T_n EN EL INTERVALO [–1 1]

Los ceros de los polinomios de Tchebychev son todos reales y todos están comprendidos en el intervalo [–1 1] y su cantidad es n igual al orden del polinomio.

T_{12}.- ***Def $T_n(x)$, $V_n(x)$*** $\Rightarrow$ $T_n'(x) = 0 \Rightarrow e_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$ $\quad k \in <1 .. n-1>$

D.- Como $T_n'(x) = n\, V_{n-1}(x)$

Existen entonces n–1 puntos extremantes para extremos relativos que son

$T_n'(x) = 0 \Rightarrow V_{n-1}(x) = 0 \Rightarrow e_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$ $\quad k \in <1 .. n-1>$

Y en esos puntos se cumple

$T_n(e_k) = \cos(n \text{ Arccos } e_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$

Resumiendo $T_n(x)$ tiene n–1 extremos relativos en el intervalo ***[–1 ; 1]*** y cuyo valor es

$\max_{x\in[-1\,;\,1]} (T_n(e_k)) = 1$
$\min_{x\in[-1\,;\,1]} (T_n(e_k)) = -1$

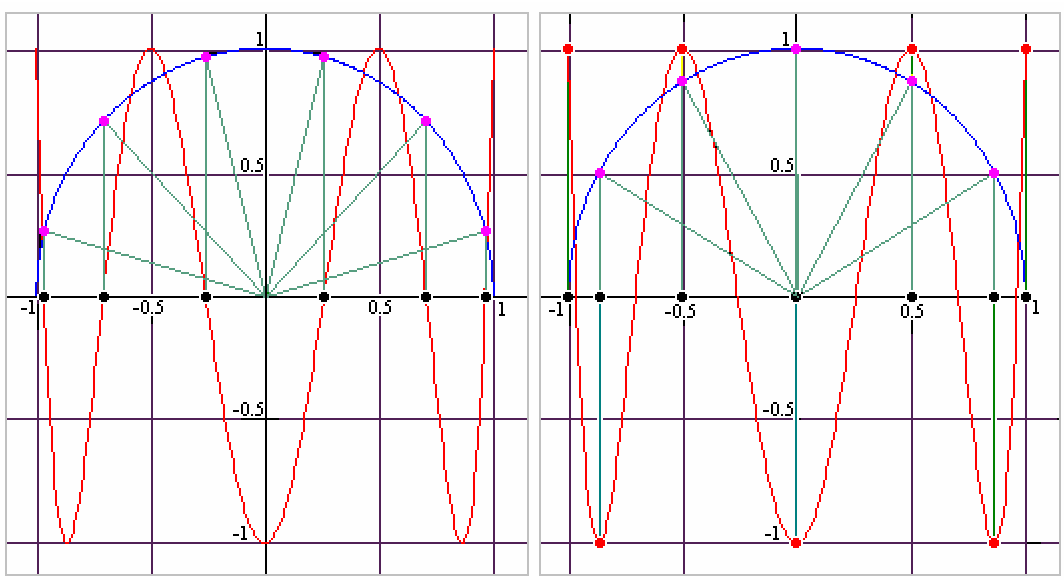
Además en el intervalo ***[–1 ; 1]*** existen 2 extremos absolutos en los extremos del intervalo que también tiene módulo 1. Es decir $T_n(x)$ en el intervalo ***[–1 ; 1]*** tiene n+1 extremos absolutos cuyo valor absoluto es 1.

$\sup_{x\in[-1\,;\,1]} | T_n(x)| = 1$

Obs.: El hecho que T_n son funciones continuas con n+1 extremos alternados coincide con que tiene n ceros.

1.3.10.2.- Ejemplo $T_6(x)$

Se presenta la representación gráfica de los ceros y etremos del polinomio T_6 en el intervalo [–1 1].



Ceros de T_6 *Extremos de T_6*

2.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE TCHEBYCHEV Y SOLUCIONES

2.1.- FORMA CANÓNICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE TCHEBYCHEV

Los dos tipos de Polinomios de Tchebychev $T_n(x)$ $V_n(x)$ verifican respectivamente las ecuaciones diferenciales siguientes:

Ecuaciones Diferenciales de Tchebychev

$(1-x^2)\, T_n''(x) - x\, T_n'(x) + n^2\, T_n(x) = 0$ **Primera ED de Tchebychev**

$(1-x^2)\, V_n''(x) - 3x\, V_n'(x) + n(n+2)\, V_n(x) = 0$ **Segunda ED de Tchebychev**

D.- Primera ecuación. La primera demostración consiste en calcular T_n' y T_n'' y verificar la ED

$$T_n'(x) = \frac{d \cos n\theta}{d\theta} \frac{1}{\frac{d\cos\theta}{d\theta}}$$

$$= n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

$$T_n''(x) = \frac{d\, T_n'(x)}{d\theta} \frac{1}{\frac{d\cos\theta}{d\theta}}$$

$$T_n''(x) = [n^2 \frac{\cos n\theta}{\sin\theta} + n \frac{\sin n\theta \cos\theta}{\sin^2\theta}]\ [\frac{1}{-\sin(\theta)}]$$

$$T_n''(x) = -n^2 \frac{\cos n\theta}{\sin^2\theta} + n \frac{\sin n\theta \cos\theta}{\sin^3\theta}$$

Reemplazando en la ED (recordando que $x = \cos\theta$)

$(1-x^2)\, T_n''(x) - x\, T_n'(x) + n^2\, T_n(x) = 0$

$$\sin^2\theta\, [-n^2 \frac{\cos n\theta}{\sin^2\theta} + n \frac{\sin n\theta \cos\theta}{\sin^3\theta}] - \cos\theta\ [n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}] + n^2 \cos n\theta =$$

$$= - n^2 \cos n\theta + n \frac{\sin n\theta\cos\theta}{\sin\theta} - n\cos\theta \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} + n^2 \cos n\theta = 0$$

D.- Segunda Ecuación. Para el caso de la segunda ED se recuerda que

$T_{n+1}'(x) = (n+1)\, V_n(x)$

derivando la primera ecuación diferencial se llega a la segunda.

$(1-x^2)\, y'' - x\, y' + (n+1)^2\, y = 0$

$(1-x^2)\, y''' - 2x\, y'' - x\, y'' - y' + (n+1)^2\, y' = 0$

$(1-x^2)\, y''' - 3x\, y''\ \ [(n+1)^2 - 1]\ y' = 0$

$(1-x^2)\, V_n''(x) - 3x\, V_n'(x) + n(n+2)\, V_n(x) = 0$

2.2.- FORMAS MODIFICADAS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE TCHEBYCHEV

2.2.1.- FORMA MODIFICADA DE LA PRIMERA ED DE TCHEBYCHEV

2.2.1.1.- CASO $|x| < 1$

La ED Modificada de la Primera ED de Tchebychev se obtiene con el cambio de variable

$x = \cos\theta \qquad |x| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad y''_{\theta\theta}(\theta) + \lambda\, y(\theta) = 0$ ***Ecuación modificada***

Obs: En particular si $\lambda = n^2$ se recuerda que las funciones de Tchebychev son los Polinomios T_n

D.- Partiendo de la Primera Ecuación de Tchebychev canónica

$$(1-x^2)\, y'' - x\, y' + \lambda\, y = 0$$

Cambiando $x = \cos\theta$

$$y'_x = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{y'_\theta}{-\sin\theta}$$

$$y''_{xx} = \left[\frac{y''_{\theta\theta}}{-\sin\theta} + \frac{y'_\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta\right]\left[\frac{1}{-\sin\theta}\right]$$

Reemplazando estas expresiones en la ED resulta

$$\sin^2\theta\left[\frac{y''_{\theta\theta}}{\sin^2\theta} - \frac{y'_\theta}{\sin^3\theta}\cos\theta\right] - \cos\theta\left[\frac{y'_\theta}{-\sin\theta}\right] + \lambda\, y = 0$$

$$y''_{\theta\theta} + \lambda\, y = 0$$

que es la ED modificada, cuya solución general es entonces:

$$y(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,\theta)$$

y volviendo a la variable x:

$$\boldsymbol{y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,Arc\cos(x)) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,Arc\cos(x)) \qquad |x| < 1}$$

Si se toma el caso particular $\lambda = n^2$ que incluye como primera solución a:

$$\boldsymbol{T_n(\theta) = \cos n\theta = \cos(n\,Arc\cos(x))}$$

En este caso la segunda solución es

$$y_2 = \sin n\theta$$

$$= V_{n-1}\ \sin\theta$$

$$= -\frac{1}{n}[\cos n\theta]'$$

$$= -\frac{1}{n}\ T_n'(\theta)$$

que lleva a

$T_n'(\theta) = -\, n\, V_{n-1}(\theta)\ \sin\theta$

Que se obtiene de la relación

$T_{n+1}'(x) = (n+1)\, V_n(x)$

2.2.1.2.- CASO $|x| > 1$

Esta forma modificada de la Ecuación de Tchebychev se obtiene con el cambio de variable:

$x = ch\,\theta \qquad |x| > 1 \qquad \Rightarrow \qquad y''_{\theta\theta}(\theta) - \lambda\, y(\theta) = 0$ ***Ecuación modificada***

D.- Partiendo de la Primera Ecuación de Tchebychev canónica

$(1-x^2)\, y'' - x\, y' + \lambda\, y = 0$

Cambiando $x = ch\,\theta$

$$y'_x = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{y'_\theta}{sh\theta}$$

$$y''_{xx} = \left[\frac{y''_{\theta\theta}}{sh\theta} - \frac{y'_\theta}{sh^2\theta}\, ch\,\theta\right]\left[\frac{1}{sh\theta}\right]$$

Reemplazando estas expresiones en la ED recordando $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$ resulta:

$$-\,sh^2\theta\left[\frac{y''_{\theta\theta}}{sh^2\theta} - \frac{y'_\theta}{sh^3\theta}\, ch\,\theta\right] - ch\,\theta\left[\frac{y'_\theta}{sh\theta}\right] + \lambda\, y = 0$$

$$y''_{\theta\theta} - \lambda\, y = 0$$

que es la ED modificada, cuya solución general es entonces:

$$y(\theta) = A\, ch(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B\, sh(\sqrt{\lambda}\,\theta)$$

y volviendo a la variable x:

$$\mathbf{y}(x) = A\, ch(\sqrt{\lambda}\ Arg\, ch(x)) + B\, sh(\sqrt{\lambda}\ Arg\, ch(x)) \qquad |x| > 1$$

2.2.2.- ED MODIFICADA DE LA SEGUNDA ED DE TCHEBYCHEV

2.2.2.1.- CASO $|x| < 1$

En el caso de la Segunda ED de Tchebychev para el caso particular $\lambda = n\,(n+2)$

$x = \cos\theta \qquad |x| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad y''_{\theta\theta}(\theta) + 2\, cotg\theta\ \ y'_\theta(\theta) + n\,(n+2)\ y(\theta) = 0$ ***Ecuación modificada***

D.- Realizando el cambio de variable propuesto en la Segunda ED de Tchebychev

$(1-x^2)\, y'' - 3\, x\, y' + n(n+2)\ y = 0$

se tiene:

$$\sin^2\theta\ \left[\frac{y''(\theta)}{\sin^2\theta} - \frac{y'(\theta)\ \cos\theta}{\sin^3\theta}\right] - 3\cos\theta\ \left[-\frac{y'(\theta)}{\sin\ \theta}\right] + n\,(n+2)\ y(\theta) = 0$$

La ecuación diferencial en θ es entonces:

$$y''(\theta) + 2\ \mathrm{cotg}\theta\ \ y'(\theta) + n\,(n+2)\ y(\theta) = 0$$

cuya solución general es :

$$y(\theta) = A\ \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} + B\ \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

que $V_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ es solución surge de la formación de la segunda ED diferencial (o verificando directamente) y la segunda solución se puede obtener a partir del conocimiento de la primera:

$$y_1 = V_n(\theta) := \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int p(\theta)d\theta}\, d\theta$$

entonces:

$$-\int p = -\int 2\ \mathrm{cotg}\theta\ \ d\theta$$

$$= -2\ L\ \sin\theta$$

$$e^{-\int p(\theta)d\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\int \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int p(\theta)d\theta}\, d\theta = \int \frac{\sin^2\theta}{\sin^2(n+1)\theta}\ \frac{1}{\sin^2\theta}\ d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2(n+1)\theta}\ d\theta$$

$$= -\frac{1}{n+1}\ \mathrm{cotg}(n+1)\theta$$

Finalmente

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int p(\theta)d\theta}\, d\theta$$

$$y_2 = -\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\ \frac{1}{n+1}\ \mathrm{cotg}(n+1)\ \theta$$

$$y_2 = -\frac{1}{n+1}\ \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

2.2.2.2.- CASO | x| > 1

Para este caso de la Segunda ED de Tchebychev se mantiene la condición $\lambda = \boldsymbol{n\,(n+2)}$ y se realiza el cambio de variable:

$\boldsymbol{x = ch\theta}$ $\quad$ $\boldsymbol{|x| > 1}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\boldsymbol{y''_{\theta\theta}(\theta) + 2\ \coth\theta\ \ y'_{\theta}(\theta) - n\,(n+2)\ y(\theta) = 0}$ ***Ecuación modificada***

D.- Partiendo de la Segunda Ecuación Diferencial de Tchebychev canónica

$(1-x^2)\, y'' - 3\, x\, y' + n\,(n+2)\, y = 0$

se tiene:

$$-\, sh^2\theta\ \left[\frac{y''_{\theta\theta}}{sh^2\theta} - \frac{y'_\theta}{sh^3\theta}\ ch\,\theta\right] - 3\, ch\theta\ \left[\frac{y'_\theta}{sh\theta}\right] + n\,(n+2)\ y(\theta) = 0$$

La ecuación diferencial en θ es entonces:

$$y''(\theta) + 2\coth\theta\ \ y'(\theta) - n\,(n+2)\ y(\theta) = 0$$

cuya solución general es :

$$y(\theta) = A\ \frac{sh\,(n+1)\theta}{sh\theta} + B\ \frac{ch(n+1)\theta}{sh\theta}$$

se puede verificar que $\frac{sh\,(n+1)\theta}{sh\theta}$ es solución y a partir de ella obtener la segunda

$$y_1 = \frac{sh\,(n+1)\theta}{sh\theta}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int p(\theta)d\theta}\, d\theta$$

entonces:

$$-\int p = -\int 2\coth\theta\ d\theta$$

$$= -\,2\ L\ sh\theta$$

$$e^{-\int p(\theta)d\theta} = \frac{1}{sh^2\theta}$$

$$\int \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int p(\theta)d\theta} d\theta = \int \frac{sh^2\theta}{s^2\,(n+1)\theta}\ \ \frac{1}{sh^2\theta}\ \ d\theta$$

$$= \int \frac{1}{sh^2\,(n+1)\theta}\ d\theta$$

$$= \frac{1}{n+1}\ \coth(n+1)\,\theta$$

Finalmente

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int p(\theta)d\theta}\, d\theta$$

$$y_2 = \frac{sh\,(n+1)\theta}{sh\theta}\ \frac{1}{n+1}\ \coth(n+1)\,\theta$$

$$y_2 = \frac{1}{n+1}\ \frac{ch(n+1)\theta}{sh\theta}$$

3.- RESOLUCION POR EL MÉTODO DE FUCHS

Tomando la ED Tchebychev

$$(1-x^2)\, y'' - x\, y' + \lambda\, y = 0$$

Cuyo campo de convergencia es

$$\left.\begin{array}{ll} p(x) = -x/(1-x^2) & \Rightarrow \quad CV(p) = \{\, |x| < 1\} \\ q(x) = \lambda/(1-x^2) & \Rightarrow \quad CV(q) = \{\, |x| < 1\} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad CV(y) = \{\, |x| < 1\}$$

Se ensaya la solución del tipo Fuchs

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^{r+k}$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (k+r)\, x^{r+k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (k+r)\, (k+r-1)\, x^{r+k-2}$$

$$\lambda\, y = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda\, C_k\, x^{r+k}$$

$$-x\, y' = \sum_{k=0}^{\infty} -C_k\, (k+r)\, x^{r+k}$$

$$(1-x^2)\, y'' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (k+r)\, (k+r-1)\, x^{r+k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} -C_k\, (k+r)\, (k+r-1)\, x^{r+k}$$

Tomando el coeficiente de la potencia x^{r+k-2} se forma la Ecuación de Recurrencia:

$$C_k\, (k+r)\, (k+r-1) - C_{k-2}\, [\, (k+r-2)\, (k+r-3) + (k+r-2) - \lambda\,] = 0$$

$$C_k\, (k+r)\, (k+r-1) - C_{k-2}\, [\, (k+r-2)^2 - \lambda\,] = 0$$

Que lleva a la Ecuación característica

$$C_0\, (r)\, (r-1) = 0$$

de donde

$$r_1 = 1; \quad r_2 = 0; \quad \Delta = 1$$

Para operar la Ecuación de Recurrencia más fácilmente se transforma el segundo término en producto de monomios para ello se completa el cuadrado perfecto tomando $\lambda = \nu^2$. Queda

$[\ (k+r-2)^2 - \lambda\ ] = (k+r-2-\nu)\ (k+r-2+\nu)$

$$C_k = \frac{C_{k-2}\ (k+r-2-\nu)(k+r-2+\nu)}{k\ (k+1)}$$

Para hallar la Primera solución y_1 con $r = r_1 = 1$;

$$C_k = \frac{C_{k-2}\ (k-1-\nu)(k-1+\nu)}{(k+1)\,k}$$

Para hallar la Segunda solución y_2 con $r = r_1 = 2$;

$$C_k = \frac{C_{k-2}\ (k-2-\nu)(k-2+\nu)}{k\ (k-1)}$$

4.- ECUACION DE RECURRENCIA DE LOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV

La solución de la ED Modificada es:

$y(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,\theta)$

Si $\sqrt{\lambda} = n$

$y(\theta) = A\cos(n\,\theta) + B\sin(n\,\theta)$

Estas soluciones desarrolladas en potencias de $\cos(\theta)$ son los Polinomios de Tchebychev.

$T_n(x) = \cos(n\,\theta)$

$\cos(0\,\theta) = 1$

$\cos(\theta) = x$

$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$

$= 2x^2 - 1$

$\cos(3\theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta)$

$= [2\cos^2(\theta) - 1]\cos(\theta) - 2\cos(\theta)\sin^2(\theta)$

$= [2\cos^2(\theta) - 1]\cos(\theta) - 2\cos(\theta)\,[1 - \cos^2(\theta)]$

$= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$

$= 4x^3 - 3x$

Se deduce una Ecuación de Recurrencia:

$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$

$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta)$

$\cos((n-1)\theta) - \cos((n+1)\theta) = 2\sin(n\theta)\sin(\theta)$

$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \frac{1}{2}[\cos((n+1)\theta) - \cos((n-1)\theta)]$

$\cos((n+1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) - \cos((n-1)\theta)$

La ER es :

$$\boldsymbol{T_{n+1}(x) = 2\,T_n(x)\,x - T_{n-1}(x)}$$

Aplicando los resultados de la ER

$T_2(x) = 2\ T_1(x)\ x - T_0(x)$

$\quad = 2\ x^2 - 1$

$T_3(x) = 2\ T_2(x)\ x - T_1(x)$

$\quad = 4\ x^3 - 3\ x$

$T_4(x) = 2\ T_3(x)\ x - T_2(x)$

$\quad = 8\ x^4 - 8\ x^2 + 1$

$T_5(x) = 2\ T_4(x)\ x - T_3(x)$

$\quad = 16\ x^5 - 20\ x^3 + 5\ x$

$T_6(x) = 2\ T_5(x)\ x - T_4(x)$

$\quad = 32\ x^6 - 48\ x^4 + 18\ x^2 - 1$

Se implica

$T_n = a_n\ x^n + a_{n-2}\ x^{n-2} + a_{n-4}\ x^{n-4} + \ldots$

$a_n = 2^{n-1}$

$(1-x^2)\ T_n'' - x\ T_n' + n^2\ T_n = 0$

$$a_n\ (n)(n-1)\ x^{n-2} + a_{n-2}\ (n-2)(n-3)\ x^{n-4} + a_{n-4}\ (n-4)(n-5)\ x^{n-6} + \ldots$$

$$- a_n\ (n)(n-1)\ x^n - a_{n-2}\ (n-2)(n-3)\ x^{n-2} - a_{n-4}\ (n-4)(n-5)\ x^{n-4} - \ldots$$

$$- a_n\ (n)\ x^n - a_{n-2}\ (n-2)\ x^{n-2} - a_{n-4}\ (n-4)\ x^{n-4} - \ldots$$

$$a_n\ n^2\ x^n + a_{n-2}\ n^2\ x^{n-2} + a_{n-4}\ n^2\ x^{n-4} + \ldots$$

De donde

$x^n)\qquad - a_n\ [\ (n)(n-1) + n - n^2\ ] = 0$

$x^{n-2})\qquad a_{n-2}\ [\ (n-2)(n-3) + (n-2) - n^2\ ] = a_n\ (n)(n-1)$

$$a_{n-2}\ [\ (n-2)^2 - n^2\ ] =$$

$$a_{n-2}\ [-2\ (2n-2)\ ] =$$

$$- 2^2\ a_{n-2}\ (n-1) =$$

$$a_{n-2} = - 2^{-2}\ n\ a_n$$

$x^{n-4})\quad a_{n-4}\ [\ (n-4)(n-5) + (n-4) - n^2\ ] = a_{n-2}\ (n-2)(n-3)$

$$a_{n-4}\,[\,(n-4)^2 - n^2\,] =$$

$$a_{n-4}\,[-\,4\,(2n-4)\,] =$$

$$-\,2^3\;\; a_{n-4}\,(n-2) =$$

$$a_{n-4} \;=-\,2^{-3}\,(n-3)\,a_{n-2}$$

x^{n-2k}) $\quad a_{n-2k}\,[\,(n-2k)(n-2k-1) + (n-2k) - n^2\,] = \; a_{n-2k+2}\,(n-2k+2)(n-2k+1)$

$$a_{n-2k}\,[\,(n-2k)^2 - n^2\,] =$$

$$a_{n-2k}\,[-4k\,(n-k)\,] =$$

$$-\,2^2\,k\;a_{n-2k}\,(n-k) =$$

$$a_{n-2k} = -\,2^{-2}\;\; a_{n-2k+2}\;\; \frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{k(n-k)}$$

$$a_{n-2k+2} = \;-\,2^2\;\; a_{n-2k}\;\; \frac{k(n-k)}{(n-2k+2)(n-2k+1)}$$

$$a_n = -\,2^2\;\; a_{n-2}\;\; \frac{k(n+k-2)}{n(n-1)}$$

Por Fuchs tiene que dar el mismo resultado

$$\boldsymbol{C_k = \frac{C_{k-2}\;\;(k-1-\nu)(k-1+\nu)}{k\;\;(k+1)}}$$

5.- *FUNCION GENERATRIZ*

Se puede formar una función generatriz para cada tipo de los Polinomios de Tchebychev.

$$\frac{1}{2}T_0 + \sum_{1}^{+\infty} \rho^n T_n = \frac{1}{2}\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho.x}$$

$$\sum_{0}^{+\infty} \rho^n V_n = \frac{1}{1+\rho^2-2\rho.x}$$

a partir de

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + z^3 + ... + z^n + ... = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-z} \qquad |z|<1$$

Tomando $z = \rho\, e^{i(\alpha-\theta)}$

$$\frac{1}{2} + \rho\, e^{i(\alpha-\theta)} + \rho^2 e^{i2(\alpha-\theta)} + \rho^3 e^{i3(\alpha-\theta)} + ... + \rho^n e^{in(\alpha-\theta)} + ... =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-\rho e^{i(\alpha-\theta)}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1-\rho e^{-i(\alpha-\theta)}}{(1-\rho e^{i(\alpha-\theta)})(1-\rho e^{-i(\alpha-\theta)})}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1-\rho\cos(\alpha-\theta)+\rho.\sin(\alpha-\theta)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha-\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\rho^2+i2\rho.\sin(\alpha-\theta)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha-\theta)}$$

Separando la parte Real e Imaginaria se obtienen las 2 funciones generatrices.

La parte Real es:

$$\frac{1}{2} + \rho\cos(\alpha-\theta) + \rho^2\cos 2(\alpha-\theta) + \rho^3\cos 3(\alpha-\theta) + ... + \rho^n\cos n(\alpha-\theta) + ... = \frac{1}{2}\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha-\theta)}$$

$$\frac{1}{2}T_0 + \sum_{1}^{+\infty} \rho^n T_n = \frac{1}{2}\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho.x}$$

La parte Imaginaria es:

$$\rho\sin(\alpha-\theta) + \rho^2\sin 2(\alpha-\theta) + \rho^3\sin 3(\alpha-\theta) + ... + \rho^n\sin n(\alpha-\theta) + ... = \frac{\rho.\sin(\alpha-\theta)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha-\theta)}$$

$$\sum_{0}^{+\infty} \rho^n \frac{\sin(n+1)(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{1}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha-\theta)}$$

$$\sum_{0}^{+\infty} \rho^n V_n = \frac{1}{1+\rho^2-2\rho.x}$$

6.- PROPIEDADES SEGUNDA PARTE

6.1.- RAICES DE LA ECUACION $T_n(x) = c$

6.1.1.- CASO $|c| < 1$

Para este caso $|c| < 1$ existen ***n*** raíces reales que se obtienen a continuación:

$$T_n(x) = c$$

$$\cos(n \text{ Arc} \cos(x)) = c$$

Definiendo:

$$\gamma := \text{Arccos}(c)$$

$$\cos \gamma = c$$

$$\text{Arc} \cos(x) = \frac{\gamma + 2k\pi}{n}$$

De aquí las ***n*** raíces

$$x = \cos\left(\frac{\gamma + 2k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\gamma}{n}\right) \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\gamma}{n}\right) \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

6.1.2.- CASO $|c| > 1$

6.1.2.1.- RAÍCES POSITIVAS DEL CASO $c > 1$

Se estudiarán las raíces positivas para el caso $c > 1$. Se verá que existe por 1 sola raíz real positiva.

$$T_n(x) = c$$

$$\text{ch}(n \text{ Arg ch}(x)) = c$$

$$w = \text{Arg ch}(x)$$

$$x = \text{ch}(w)$$

$$x = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w})$$

$$0 = e^{2w} - 2xe^w + 1$$

$$e^w = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$w = L(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

$$c = \text{ch}(y)$$

$$y = L(c \pm \sqrt{c^2 - 1})$$

$$n \text{ Arg ch}(x) = y$$

$$\text{Arg ch}(x) = \frac{1}{n} L(c \pm \sqrt{c^2 - 1})$$

$$= L(\ c \pm \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n}$$

$$L(\ x \pm \sqrt{x^2 - 1}\ ) = L(\ c \pm \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n}$$

$$(\ x \pm \sqrt{x^2 - 1}\ ) = (\ c \pm \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n}$$

$$(\ x + \sqrt{x^2 - 1}\ ) = (\ c + \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n}$$

$$(\ x - \sqrt{x^2 - 1}\ ) = (\ c - \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n}$$

$$2\,x = (\ c + \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n} + (\ c - \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}\ [(\ c + \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n} + (\ c - \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n}]}$$

6.1.2.2.- RAÍCES POSITIVAS Y NEGATIVAS EN EL CASO GENERAL | c | > 1

Como se ha visto en el caso $c > 1$ existe por 1 sola raíz real positiva.

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}\ [(\ c + \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n} + (\ c - \sqrt{c^2 - 1}\ )^{1/n}]}$$

A partir de la paridad de los polinomios T_n se analiza la existencia de los otros casos, con las soguientes conclusiones:

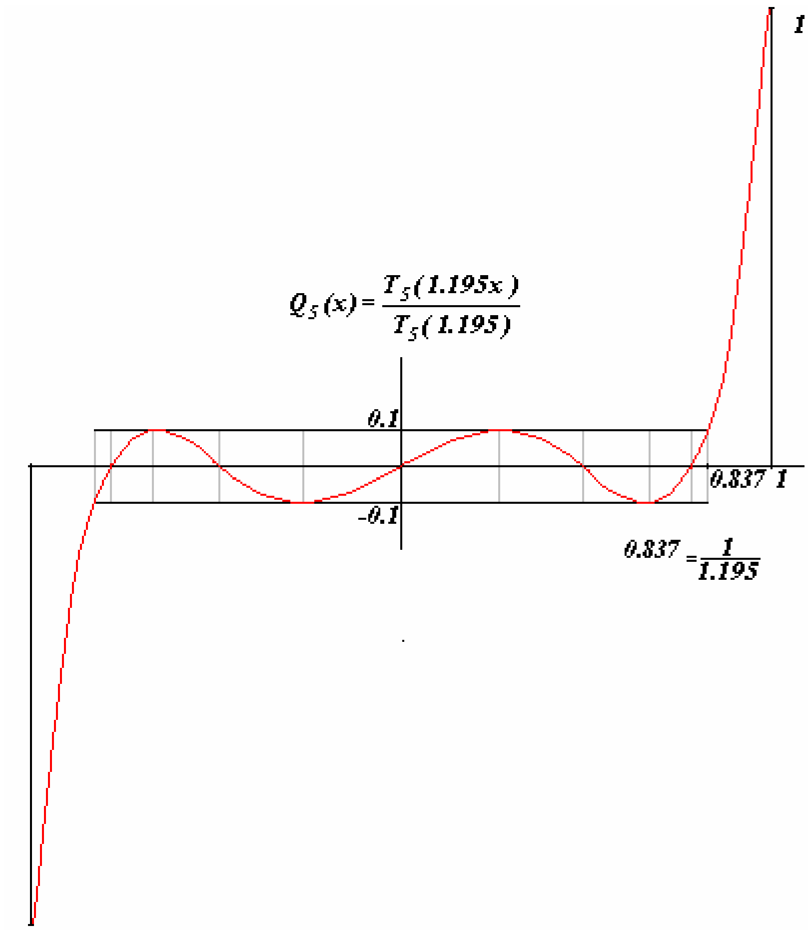
Caso	**Paridad**	**Raíces positivas**	**Raíces negativas**
$c > 1$	$n \in Par$	x	$-x$
	$n \in Impar$	x	$\nexists$
$c < -1$	$n \in Par$	$\nexists$	$\nexists$
	$n \in Impar$	$\nexists$	$-x$

6.1.2.3.- CAMBIO DE ESCALA PARA LIMITAR LA AMPLITUD DE UN POLINOMIO DE TCHEBYCHEV

Se plantea el problema de que por medio de un cambio de escala encontrar un intervalo $[-\alpha\ \alpha]$ para que un polinomio de Tchebychev este limitado por una cota dada.

Por ejemplo obtener un polinomio $\boldsymbol{Q_5(x) = \dfrac{T_5(\frac{1}{\alpha}x)}{T_5(\frac{1}{\alpha})}}$ limitado por $\boldsymbol{\frac{1}{c}} = 0.1$

Es un Polinomio que vale $Q_5(1) = 1$ y se desea determinar el intervalo $x \in [-\alpha\ \alpha]$ para que esté acotado por $\boldsymbol{\frac{1}{c}} = 0.1$



para $x = \alpha$ $\quad Q_5(\alpha) = \dfrac{T_5(1)}{T_5(\frac{1}{\alpha})} = \dfrac{1}{T_5(\frac{1}{\alpha})} = \dfrac{1}{10}$; $\quad Q_5(\alpha) = 0.1$; $\quad Q_5(\frac{1}{\alpha}) = 1$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}\left[\left(c + \sqrt{c^2 - 1}\right)^{1/n} + \left(c - \sqrt{c^2 - 1}\right)^{1/n}\right]$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}\left[\left(10 + \sqrt{10^2 - 1}\right)^{1/5} + \left(10 - \sqrt{10^2 - 1}\right)^{1/5}\right] = 1.195$$

$\alpha = 0.837$

6.2.- PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV

6.2.1.- PRESENTACION I

Los Polinomios de Tchebychev dan una mejor aproximación a un segmento de recta, en el sentido de que los valores absolutos de sus extremos son menores o iguales a los de cualquier otro polinomio con el mismo primer coeficiente $a_n = 2^{n-1}$

H.- $E_n := \{ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \; : \; a_n = 2^{n-1} \wedge x \in [-1\ 1] \} \quad \Rightarrow \quad \sup|P_n(x)| \geq \sup|T_n(x)|$

D.- *Los Polinomios de Tchebychev pertenecen al Conjunto E_n, pues cumplen con las condiciones previstas.*

$T_n(x) \in E_n$

Los puntos extremantes de $|T_n(x)|$ se calculan:

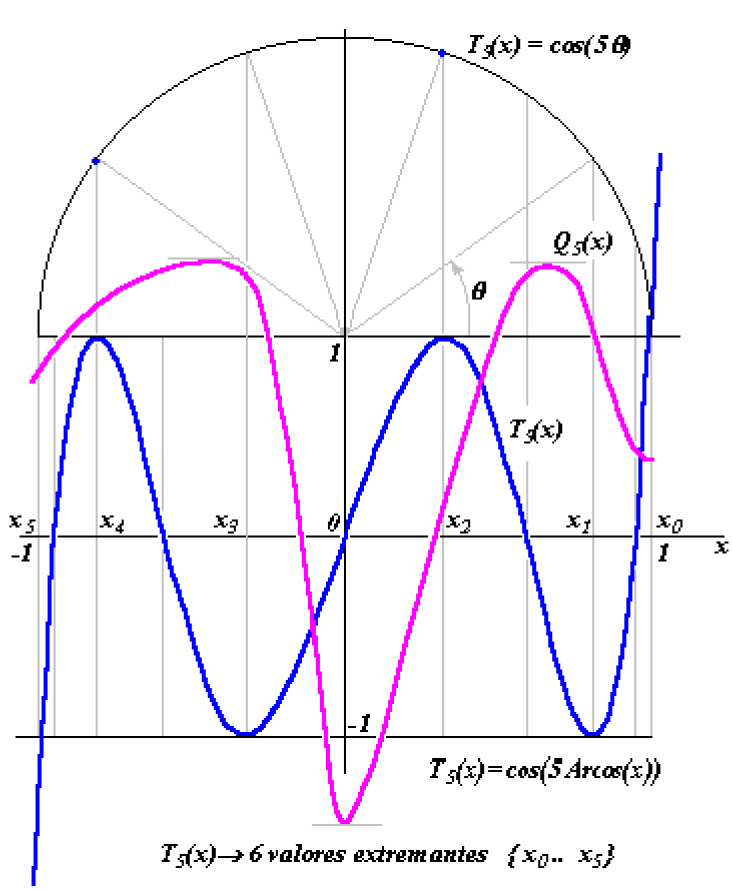
$$T_n'(x) = [\cos n\theta]' = \frac{-n\sin(n\theta)}{-\sin\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin n\theta = 0$$

La cantidad de puntos extremantes en $x \in [-1\ 1]$ es $n+1$ ($n-1$ extremos relativos y 2 extremos en -1 y 1)

$n\,\theta_k = k\,\pi$ para $k \in <0, n>$

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n}$$

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$



Los extremos son :

$T_n(x_k) = (-1)^k$

$| T_n (x) | = 1$

Eligiendo cualquier Polinomio Q_n de grado n perteneciente al Conjunto E_n , es decir con las dos condiciones: $a_n = 2^{n-1}$; $x \in [-1\ 1]$

$Q_n \in E_n$

se probará que

$\sup | Q_n(x) | \geq \sup | T_n(x) |$

Si se supone lo contrario

$\sup | Q_n(x) | < \sup | T_n(x) |$

$\sup | T_n(x) | - \sup | Q_n(x) | > 0$

El Polinomio de la diferencia

$D_{n-1}(x) = T_n(x) - Q_n (x)$

$D_{n-1}(x)$ es de orden n–1 y tiene a lo sumo n–1 raíces reales.

Por otro lado

$$\sup | D_{n-1}(x) | = \sup | T_n(x) - Q_n(x) | \geq \sup | T_n(x) | - \sup | Q_n(x) | > 0$$

Por eso se cumple que los signos

$$sg (D_{n-1}(x_k)) = sg (T_n(x_k))$$

Recordando que

$$sg (T_n(x_k)) = (-1)^k \qquad \text{para} \qquad k \in < 0 , n >$$

Entonces D_{n-1} cambia de signo por lo menos n+1 veces y por lo tanto tendría n raíces, lo cual es absurdo.

Resulta válida entonces la Tesis:

$$\sup | Q_n(x) | \geq \sup | T_n(x) |$$

<u>6.2.2.- PRESENTACION II</u>

Los Polinomios de Tchebychev dan una mejor aproximación a un segmento de recta, en el sentido de que sus extremos en modulo son menores o iguales a los de cualquier otro polinomio con las siguientes condiciones:

H.- $E_n := \{ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad : \quad n \in Impar \Rightarrow P_n \in Impar$

$n \in Par \Rightarrow P_n \in Par$

$P_n(1) = 1 \qquad P_n(-1) = (-1)^n$

$z_i \in \{ P_n(z_i) = 0 \}$

$\forall i \in <1\ n> \quad z_i \in [-1\ 1] \quad \} \quad \Rightarrow \quad \sup|P_n(x)| \geq \sup|T_n(x)|$

E_n: Conjunto de Polinomios donde se analiza la mejor aproximación a un segmento de recta en un intervalo

Dado $[-1\ 1]$

$P_n(x)$: Polinomio genérico de E_n

z_i : Raíces del Polinomio de $P_n(x)$

$T_n(x)$: Polinomio de Tchebychev

D.- *En primer término los polinomios de Tchebychev verifican la pertenencia al conjunto* E_n.

Sean $w_j \in \{ T_n(w_j) = 0 \}$ *los ceros de los polinomios de Tchebychev, se define entonces:*

$z_p := Max(z_i , P_n)$

$w_t := Max(w_i , T_n)$

Construyendo el polinomio $Q_n(x)$, este pertenece al conjunto P

$$Q_n(x) := \frac{T_n\left(\frac{w_t}{z_p} x\right)}{T_n\left(\frac{w_t}{z_p}\right)} \in P$$

Sea $M := \text{Sup } Q_n$ en $[-z_p\ z_p]$

Sea $M_p := \text{Sup } P_n$ donde P_n es un Polinomio genérico de P.
Se demostrará entonces que $M \leq M_p$ en $[-z_p\ z_p]$. Es decir que M es el menor de todos los posibles M_p en $[-z_p\ z_p]$.

Supongamos lo contrario $M > M_p$

El Polinomio

$D = Q_n(x) - P_n(x)$

Tiene por ceros a $x=1$ $x=-1$ $x=z_p$

Tomando los valores $x_i = \left(\frac{z_p}{w_t}\right) \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)$ para $i \in <2 , n-1>$. Para $Q_n(x_i)$ es alternativamente igual a $\pm M$

$Q_n(x_i) = \pm M$

$D(x_i) = \pm M - P_n(x_i)$

Como $M > M_p$ entonces

$sg[D(x_i)] = sg\,[Q_n(x_i)]$

$D(x_i)$ cambia de signo $n-2$ veces luego por esta razón tiene $n-2$ raíces. Como además tiene por ceros a $x=1$ $x=-1$ $x=z_p$ tiene entonces $n-2+3 = n+1$ raíces

Esto es absurdo porque D tiene a lo sumo n raíces.

Entonces por absurdo $M \leq M_p$

9.3.- UN TEOREMA SOBRE MAXIMOS Y MINIMOS. APLICACIÓN A LOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV.

El siguiente teorema presenta condiciones suficientes sobre la constancia de los máximos y mínimos de algunos polinomios, y en particular es aplicable a los Polinomios de Tchebychev.

T.- Teorema de Zonin-Polya

H_1.- $(p\,y')' + P\,y = 0$

H_2.- $pP = Cte$

H_3.- $\varphi = y^2 + \dfrac{1}{pP}(p\,y')^2$

$\Rightarrow \quad \varphi = Cte$

$\Rightarrow \quad [\; y' = 0 \;\Rightarrow\; \max|y| = Cte\;]$

D.- Derivando φ teniendo en cuenta que $p\,P = Cte$

$$\varphi' = 2\,y\,y' + \frac{1}{pP}\,2\,(p\,y')\,(p\,y')'$$

reemplazando el ultimo paréntesis a partir de la Primera Ecuación Diferencial

$$= 2\,y\,y' + \frac{1}{pP}\,2\,(p\,y')\,(-P\,y)$$

$$= 2yy' - 2yy'$$

$$= 0$$

$$\varphi = Cte$$

Aplicando estos resultados a los puntos extremantes donde $y' = 0$ se obtiene un teorema de Zonin-Polya

$$\varphi = Cte = y^2 + \frac{1}{pP}(p\,y')^2$$

$$\varphi = Cte = y^2$$

por lo tanto

$\max|y| = Cte$

Este teorema se puede aplicar a la ecuación diferencial de Tchebychev.

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + n^2 y = 0$$

$$(1-x^2)^{1/2}\,y'' - \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}\,y' + \frac{n^2}{(1-x^2)^{1/2}}\,y = 0$$

$$[(1-x^2)^{1/2}\,y']' + \frac{n^2}{(1-x^2)^{1/2}}\,y = 0$$

$$p\,P = (1-x^2)^{1/2}\,\frac{n^2}{(1-x^2)^{1/2}}$$

$$p\,P = Cte$$

Se está en las condiciones del teorema de Zonin-Polya, por lo tanto los $\max|y|$ son todos iguales.

7.- LOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV COMO POLINOMIOS ORTOGONALES

7.1.- EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

El estudio de la ortogonalidad de los Polinomio y Funciones de Tchebychev se puede hacer por medio del planteo de Sturm-Liouville

7.1.1.- FORMA AUTOADJUNTA DE STURM-LIOUVILLE

A partir de la ED de Tchebychev:

$$(1-x^2)\ y'' - x\,y' + \lambda\ y = 0$$

Se puede escribir:

$$(1-x^2)^{1/2}\ y'' - \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}\ y' + \lambda\ \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\ y = 0$$

Lo que lleva a una ED de forma autoadjunta de SL

$$[(1-x^2)^{1/2}\ y']' + \lambda\ \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\ y = 0$$

Con

$$\begin{cases} r = (1-x^2)^{1/2} \\ p = \dfrac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \\ q = 0 \end{cases}$$

7.1.2.- PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE

7.1.2.1.- PROBLEMA I

H_1 $[(1-x^2)^{1/2}\ y']' + \lambda\ \dfrac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\ y = 0$

H_2 $x \in [-1\ ,\ 1]$

7.2.- NORMAS DE LOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV

Las normas de Polinomios de Tchebychev son:

T.- ***H) Def*** T_n $\Rightarrow$ $\| T_0(x) \| = \pi$

$\Rightarrow$ $n > 0$ $\| T_n(x) \| = \dfrac{\pi}{2}$

H) Def V_n $\Rightarrow$ $\| V_n(x) \| = \dfrac{\pi}{2}$

D.- Verificando la ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{(1-x^2)^{1/2}}\, dx = \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{1/2} V_m(x)\, V_n(x)\, dx = \int_0^{\pi} \sin(m+1)\theta \, \sin(n+1)\theta \, d\theta = 0 \qquad m \neq n$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\, dx = 1$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n^{\,2}(x)}{(1-x^2)^{1/2}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta = 1$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{1/2}\, V_n^2(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(n+1)\theta \, d\theta = 1$$

7.3.- LOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV COMO SISTEMA ORTONORMADOS

Los Polinomios de Tchebychev conforman 2 Sistemas Ortonormados en el intervalo [–1 1] con respecto a los respectivos núcleos $p(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$ para T_n y $p(x) = (1-x^2)^{1/2}$ para $V_n(x)$

T.- ***H) Def*** T_n $\Rightarrow$ $\left\{ \dfrac{T_0(x)}{\pi^{1/2}} \; ; \; \dfrac{2^{1/2}\, T_n(x)}{\pi^{1/2}} \right\} \in$ ***SON / p*** $= \dfrac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$ ***; [–1 1]***

H) Def V_n $\Rightarrow$ $\left\{ \dfrac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}} \; V_n \right\} \in$ ***SON / p*** $= (1-x^2)^{1/2}$ ***; [–1 1]***

Obs. Se podría haber presentado también el Sistema Ortonormalizado respecto del núcleo p(x) = 1 de la siguiente forma:

T.- ***H) Def*** T_n $\Rightarrow$ $\left\{ \dfrac{T_0(x)}{\pi^{1/2}(1-x^2)^{1/4}} \; ; \; \dfrac{2^{1/2}T_n(x)}{\pi^{1/2}(1-x^2)^{1/4}} \right\} \in$ ***SON***

H) Def V_n $\Rightarrow$ $\left\{ \dfrac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}} \; (1-x^2)^{1/4} \; V_n \right\} \in$ ***SON***

8.- APLICACIONES MATEMÁTICAS Y FÍSICAS

8.1.- APLICACIONES MATEMÁTICAS

8.1.1.- MEJOR ELECCION DE LAS ABSCISAS DE INTERPOLACIÓN DE LA FORMULA DE LAGRANGE

Se analizará como aplicación de los Polinomios de Tchebychev para la mejor elección de de las abscisas de construcción de los polinomios de Lagrange de manera tal que la aproximación de una función $| f(x) - L(x) |$ sea lo más pequeña posible.

8.1.1.1.- FORMULA DE LAGRANGE

Se recuerda la fórmula de Lagrange para construcción de Polinomios por n+1 puntos, que pueden ser empleados para aproximar funciones (interpolación o extrapolación de funciones)

4.- FORMULA DE LAGRANGE

4.1.- POLINOMIO DE LAGRANGE POR n+1 PUNTOS.

La fórmula de Lagrange es una forma de hallar un polinomio por n+1 puntos dados, todos de abscisas diferentes entre si $\{ (x_0\ y_0)\ (x_1\ y_1)\ (x_2\ y_2)\ (x_3\ y_3) \dots (x_{i-1}\ y_{i-1})\ (x_i\, y_i) \dots (x_n\, y_n) \}$

Se puede elegir sin pérdida de generalidad $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n$

4.1.1.- POLINOMIOS DE $L_i(x)$

La construcción de Lagrange se basa en la definición de n+1 polinomios de grado n

$$L_i(x) := \frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)}\frac{(x-x_1)}{(x_i-x_1)}\frac{(x-x_2)}{(x_i-x_2)}\cdots\frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}\frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})}\cdots\frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

Y de aquí se obtiene el polinomio llamado fórmula de Lagrange

$$L(x) := \sum_{k=0}^{n} y_i\ L_i(x)$$

L(x) : Polinomio de Lagrange

Que como se verá satisface el problema planteado

4.1.2.- PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS DE $L_i(x)$

T.- $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

$\forall i \quad \exists (x_i\, y_i)$

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$

$\mathbf{E_{n+1} = \{ P_n(x) \}}$

Def. $L_i(x) \quad \Rightarrow \quad L_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases}$

$\Rightarrow \{ L_i(x) \} \in li$

$\Rightarrow \{ L_i(x) \} \in Base/E_{n+1}$

$\Rightarrow L(x) := \sum_{k=0}^{n} y_i \; L_i(x) \;\in$ *único*

$\Rightarrow L(x_i) = y_i$

D.- Por su construcción se induce directamente

$L_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases}$

Los $n+1$ polinomios $L_i(x)$ son li pues planteando la combinación lineal:

$\lambda_0\; L_0(x) + \lambda_1\; L_1(x) + \ldots + \lambda_n\; L_n(x) = 0$

$\forall i \quad \lambda_0\; L_0(x_i) + \lambda_1\; L_1(x_i) + \ldots + \lambda_n\; L_n(x_i) = 0$

Como $L_i(x_k) = \delta_{ik}$ se implica

$\lambda_i\; L_i(x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \{ L_i(x) \} \in li$

La cantidad de polinomios linealmente independientes $\{ L_i(x) \}$ es $n+1$ y por lo tanto conforman una base de E_{n+1}.

El polinomio de coordenadas $\{ y_i \}$

$L(x) := \sum_{k=0}^{n} y_i \; L_i(x) \;\in$ *único*

Y satisface

$L(x_i) = y_i$

Lo cual resuelve el problema de construir un polinomio por $n+1$ de abscisas diferentes .

4.1.3.- COTA DEL ERROR DEL POLINOMIOS DE LAGRANGE

Cuando se desea aproximar una función real en un determinado intervalo [a b] por un polinomio, con el objeto de interpolar o extrapolar valores, se puede hacer por la fórmula de Lagrange. Para ello conviene dar una Cota del error:

T.- $f: [a\ b] \subset R \to R$

$f \in C^{n+1}$

$a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$

$\forall i \quad \exists (x_i\ ;\ y_i = f(x_i))$

Def. $L(x) \quad \Rightarrow \exists \xi \in [x_0\ x_n]: \qquad f(x) - L(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}\ (x-x_0)\ (x-x_1) \dots (x-x_n)\ f^{(n+1)}(\xi)$

$$\Rightarrow \quad |\ f(x) - L(x)\ | \quad \leq \frac{1}{(n+1)!}\ |\ (x-x_0)\ (x-x_1)\ \dots\ (x-x_n)\ |\ \ sup_{x\in[a\ b]}\ |\ f^{(n+1)}(x)\ |$$

D.- *La función* $f - L$ *cumple*

$\forall i \quad f(x_i) - L(x_i) = 0$

$f(x) - L(x) \in C^{n+1}$

Se construyen las funciones g *y* h

$$g(x) = \frac{f(x) - L(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)} \qquad\qquad x \in [a\ b] - \{x_i\}$$

$$h(t) = f(t) - L(t) - (t-x_0)\ (t-x_1)\ \dots\ (t-x_n)\ g(x) \qquad\qquad t \in [a\ b]$$

$h(t)$ *se anula en* $n + 2$ *puntos, a saber* $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x$

Por aplicación sucesiva del teorema de Rolle una función de clase C^{n+1} *se anula al menos en n+2 puntos de un intervalo I, entonces la derivada de orden n+1 se anula al menos en un punto de dicho intervalo. Existe entonces*

$\exists\ \xi \in [x_0\ x_n]: \qquad h^{(n+1)}(\xi) = 0$

Se debe observar que ξ *no es necesariamente único y que depende de x. Calculando* $h^{(n+1)}(t)$

$h^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\ g(x)$

En particular

$0 = h^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\ g(x)$

$$g(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Se deduce entonces

$$\exists\, \xi \in [x_0\ x_n]: \quad f(x) - L(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x - x_0)\,(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_n)\ f^{(n+1)}(\xi)$$

Como f es de clase C^{n+1} sobre [a b] , entonces se puede acotar esta expresión:

$$|\, f(x) - L(x)\, | \le \frac{1}{(n+1)!} |\,(x - x_0)\,(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_n)\,| \quad \sup_{x\in[a\ b]} |\, f^{(n+1)}(x)\,|$$

Ejemplo Sea $f(x) = e^x$ de clase C^∞

$$\sup_{x\in[a\ b]} |\, f^{(n+1)}(x)\,| = e^b$$

Por lo tanto, como

$$\forall x \in [a\ b] \ \Rightarrow |\,(x - x_0)\,(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_n)\,| \le (b-a)^{n+1}$$

$$|\, f(x) - L(x)\, | \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ e^b$$

Como esta cota no depende de x, demuestra además la convergencia uniforme de la sucesión $\{P_n(x)\}$ hacia la función f(x) cuando n tiende a ∞.

8.1.1.2.- MEJOR ELECCION DE LAS ABSCISAS LA FORMULA DE LAGRANGE

Como se ha visto se puede aproximar una ***$f\in C^{n+1}$*** en un intervalo ***$x\in[a\ b]$*** con una cota de error :

$$|\, f(x) - L(x)\, | \le \frac{1}{(n+1)!} |\,(x - x_0)\,(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_n)\,| \quad \sup_{x\in[a\ b]} |\, f^{(n+1)}(x)\,|$$

El problema se reduce a elegir un conjunto de n+1 abscisas

$$a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$$

de manera tal que para cualquier polimomio ***$Q\in E_{n+1} / a_{n+1} = 1$***

$$\sup_{x\in[a\ b]} |\,(x - x_0)(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_n)| \le \sup_{x\in[a\ b]} |Q(x)|$$

sin pérdida de generalidad se puede tomar como intervalo a ***[–1 1]*** al cual siempre se puede llevar el intervalo ***[a b]*** por un cambio de escala.

Se demostrará que la elección de los ceros $x_k = z_k$ del Polinomio T_{n+1} optimiza la cota del error

T.- $x \in [-1\,;\,1]$

$$z_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{(n+1)2} \qquad k \in \langle 0..n \rangle$$

$$\Rightarrow \ \forall Q \in E_{n+1} \,/\, a_{n+1} = 1 \qquad \sup_{x\in[-1\,;\,1]} |(x-x_0)(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_n)| \leq \sup_{x\in[-1\,;\,1]} |Q(x)|$$

D.- Sean W_n los Polinomios de Tchebychev modificados dividiendo T_n por el coeficiente 2^{n-1}

$$W_n := \frac{1}{2^{n-1}}\,T_n \Rightarrow \quad W_{n+1} := \frac{1}{2^n}\,T_{n+1}$$

Los ceros de W_{n+1} son los mismos ceros de T_{n+1}

$$W_{n+1}(z_k) = 0 \ \Rightarrow \ z_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{(n+1)2}$$

Por lo tanto

$$W_{n+1}(z_k) = (x - z_0)(x - z_1)\ \ldots\ (x - z_n)$$

Para el intervalo $x \in [-1\,;\,1]$ se los polinomios de Tchebychev cumplen:

$T_{n+1}(x) \ \Rightarrow \ e_k = \cos\frac{k\pi}{(n+1)} \qquad k \in \langle 0 \,..\, n+1 \rangle \qquad n+2$ puntos extremantes de T_{n+1}

$$\Rightarrow \ \textit{extremos}_{x\in[-1\,;\,1]}\ |T_{n+1}(e_k)| = (-1)^k$$

$$\Rightarrow \ \sup_{x\in[-1\,;\,1]}\ |T_{n+1}(e_k)| = 1$$

Asimismo para

$W_{n+1}(x) \ \Rightarrow \ e_k = \cos\frac{k\pi}{(n+1)} \qquad k \in \langle 0 \,..\, n+1 \rangle \qquad n+2$ puntos extremantes de W_{n+1}

$$\Rightarrow \ \textit{extremos}_{x\in[-1\,;\,1]}\ |T_{n+1}(e_k)| = (-1)^k\,\frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \ \sup_{x\in[-1\,;\,1]}\ |W_{n+1}(e_k)| = \frac{1}{2^n}$$

Suponiendo que existiera un Polinomio

$$Q \in E_{n+1} \ : \ \sup_{x\in[-1\,;\,1]}\ |Q(x)| < \frac{1}{2^n}$$

La diferencia entre los polinomios $Q - W_{n+1}$ es un polinomio de grado n

$$D_n = Q - W_{n+1} \in E_n$$

En los n+2 valores extremantes D_n cumpliría

$$D_n(e_k) = (Q - W_{n+1})(e_k) = Q(e_k) - (-1)^k\,\frac{1}{2^n}$$

Que sería n+2 valores alternativamente estrictamente positivos y negativos

Esto lleva a que el polinomio D_n siendo una función continua admita por lo menos n+1 ceros , que implica como única posiblidad que D_n sea el polinomio nulo

$$D_n(x) \equiv 0$$

$Q \equiv W_{n+1}$ se llega al absurdo

$\sup_{x\in[-1\,;\,1]} |Q(x)| < \dfrac{1}{2^n} \quad \wedge \quad \sup_{x\in[-1\,;\,1]} |W_{n+1}(x)| = \sup_{x\in[-1\,;\,1]} |Q(x)| = \dfrac{1}{2^n}$

Conclusión

$\sup_{x\in[-1\,;\,1]} |Q(x)| \geq \dfrac{1}{2^n} = \sup_{x\in[-1\,;\,1]} |W_{n+1}(x)|$

8.2.- APLICACIONES FÍSICAS

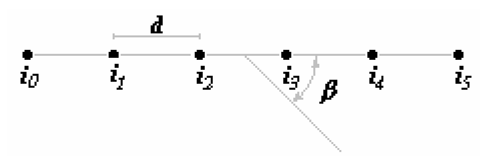
Sea un modelo de un fenómeno cuyas variaciones pueden ser representadas por variaciones de un polinomio. Si se desea que estas variaciones sean acotadas (inferiores o iguales a un límite dado) en un intervalo dado , y al contrario rápidamente crecientes en el exterior de dicho intervalo, será conveniente usar en el modelo un polinomio de Tchebychev.

8.2.1.- RADIACIÓN DE ANTENAS EN SERIE

Sea un conjunto de n (número par) antenas electromagnéticas alineadas separadas una de otra por una distancia ***d.***

Cada una de ellas está alimentada por las corrientes $i_0\ i_1\ i_2\ i_3 \ldots\ i_n$ con una condición de simetría $i_k = i_{n-k}$

La fase de las corrientes crece en progresión geométrica hasta las antenas centrales $i_{k-1} = i_k\, e^{j\delta}$



Se desea encontrar el campo (la radiación) producido por las antenas en la dirección β en un plano normal al de la red de antenas

Resumen:

n: Cantidad de antenas de la red lineal (n es par)

i_k ***: Corriente que alimenta la antena k***

$i_k = i_{n-k}$ ***: condición de simetría de la red***

$i_{k-1} = i_k\, e^{j\delta}$ ***: condición de desfasaje de las corrientes***

δ ***: ángulo de desfasaje entre las corrientes***

β***: ángulo de dirección de la radiación en el plano normal al de las antenas***

P_{n-1} ***: campo producido por la red de antenas***

Φ:

λ:

Sea $\Phi := \dfrac{2\pi d}{\lambda}\cos\beta - \delta$

El campo es igual al producido por una de las antenas aisladas recorrida por una corriente cualquiera multiplicada por el polinomio

$$P_{n-1} := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$$

Con

$$\frac{a_k}{a_0} = \frac{i_k}{i_0}\, e^{j\,k\delta}$$

$z = e^{j\Phi}$

Si interesan solo las amplitudes pares basta considerar el módulo de $P_{n-1}(z)$ para n par

$$| P_{n-1}(\cos\frac{\Phi}{2}) | = 2 \, | a_0 \cos(n-1)\frac{\Phi}{2} + a_1 \cos(n-3)\frac{\Phi}{2} + ... + a_{(n/2)-1} \cos\frac{\Phi}{2} |$$

Desarrollando este polinomio en potencias de $\cos\frac{\Phi}{2}$ y recordando que $\cos(k\frac{\Phi}{2}) = T_k(\cos\frac{\Phi}{2})$

$$P_{n-1}(\cos\frac{\Phi}{2}) = \frac{T_{n-1}(\frac{1}{\alpha}\cos\frac{\Phi}{2})}{T_{n-1}(\frac{1}{\alpha})}$$

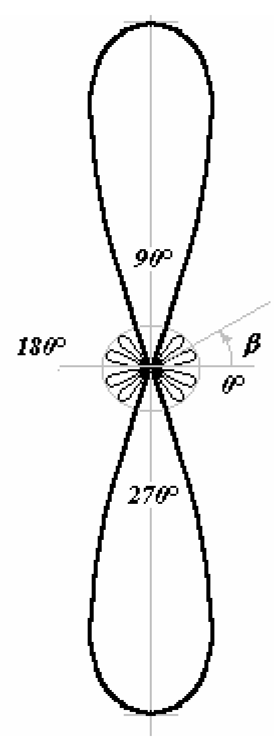
Los extremos del módulo de la radiación (lóbuloprincipal)

$$\sup | P_{n-1}(\cos\frac{\Phi}{2}) | = 1$$

En los restantes extremos relativos (lóbulos secundarios)

$$| P_{n-1}(\cos\frac{\Phi}{2}) | = \frac{1}{T_{n-1}(\frac{1}{\alpha})}$$

Representando la radiación en función de β se tiene una figura del tipo siguiente donde los extremos de $| P_{n-1}(\cos\frac{\Phi}{2}) |$ representan los extremos de los lóbulos primarios (max =1) y secundarios ($= \frac{1}{T_{n-1}(\frac{1}{\alpha})}$)



Si se desea fijar el límite de los lóbulos secundarios basta fijar α y por lo tanto los coeficientes α_n que consiguientemente dan las relaciones de corrientes en cada antena.

La apertura del lóbulo es

$$\alpha = \cos \frac{\pi}{2(n-1)}$$

y es la menor posible

Si por otro lado se parte de una apertura, esto determina α y por consiguiente el nivel de corrientes. El nivel de los lóbulos entonces el más bajo posible.

Ejemplo: Sea una red de 6 antenas (dipolos)

$n = 6$ cantidad de antenas o dipolos

$\delta = 0$

$d = \frac{\lambda}{2}$ distancia entre antenas

Se desea determinar la relaciones $\frac{I_1}{I_0}$ $\frac{I_2}{I_0}$ de modo que las relaciones de lóbulo principal y secundarios sea 10.

Es decir $T_5(\frac{1}{\alpha}) = 10$ (Ver ejemplo de cambio de escala para limitar la amplitud de un polinomio de Tchebychev)

$$\frac{1}{\alpha} = 1.195$$

$$P_5(\cos\frac{\Phi}{2}) = 2\,a_0\ \cos 5\frac{\Phi}{2} + 2\,a_1 \cos 3\frac{\Phi}{2} + 2\,a_2 \cos\frac{\Phi}{2}$$

$$= 2\,a_0\ T_5(\cos\frac{\Phi}{2}) + 2\,a_1\,T_3(\cos\frac{\Phi}{2}) + 2\,a_2\,T_1(\cos\frac{\Phi}{2})$$

$$= 32\,a_0\ \cos^5\frac{\Phi}{2} - (40\,a_0 - 8\,a_1)\ \cos^3\frac{\Phi}{2} + (10\,a_0 - 6\,a_1 + 2\,a_2)\cos\frac{\Phi}{2}$$

Se tiene

$$\frac{T_5(\frac{1}{\alpha}\cos\frac{\Phi}{2})}{T_5(\frac{1}{\alpha})} = 2.907\cos^5\frac{\Phi}{2} - 2.950\cos^3\frac{\Phi}{2} + 0.597\cos\frac{\Phi}{2}$$

de donde

$a_0 = 0.0908$

$a_1 = 0.0857$

$a_2 = 0.101$

$$\frac{I_1}{I_0} = 0.944$$

$$\frac{I_2}{I_0} = 1.113$$

El diagrama de radiación es de la función $Q_5(x)$ tomando como variable el ángulo $\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{x} = \cos\frac{\Phi}{2} = \cos(\frac{\pi d}{\lambda}\cos\beta) = \cos(\frac{\pi}{2}\cos\beta)$$