NOTAS PARA LOS ALUMNOS DEL CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

POLINOMIOS Y FUNCIONES DE LEGENDRE

Ing. Juan Sacerdoti

Departamento de Matemática
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

2002
V 2.03

INDICE

FUNCIONES Y POLINOMIOS DE LEGENDRE

1.- PORQUÉ LEGENDRE

Los Polinomios de Legendre son uno de los ejemplos más importantes de los Polinomios Ortogonales, porque aparecen como soluciones en varios problemas clásicos de la física como:

1.- Movimiento de los planetas: Ecuación de Kepler.

2.- Resolución de los modelos de la física con Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDDP) en coordenadas esféricas.

Son ejemplo de estos modelos de la física, los campos conservativos, no conservativos, propagación de calor, propagación de ondas, propagación de señales telegráficas, propagación de ondas de partículas simples.

Una lista de algunos de los modelos más destacados es

EDDP	*ECUACIÓN*	*MODELO*
Laplace	$\nabla^2 u = 0$	*Potencial de campos conservativos* ***a.- Potencial gravitatorio en el vacío*** ***b.- Potencial de velocidades de un fluido ideal incompresible,*** *sin* ***torbellinos, sin fuentes ni sumideros y distribución continua.*** ***c.- Potencial electrostático en régimen permanente generado por corrientes eléctricas en conductores aislados*** ***d.- Distribución de Temperaturas en sólidos para régimen estacionario***
Poisson	$\nabla^2 u = f$	*Potencial de campos no conservativos* ***a.- Potencial de velocidades de un fluido ideal incompresible e irrotacional,*** *con* ***fuentes y sumideros y distribución continua.*** ***b.- Potencial electrostático con cuerpos cargados*** ***c.- Distribución de Temperaturas en sólidos para régimen estacionario generada por focos caloríficos discretos*** ***d.- Función de esfuerzos de torsión en barras elásticas***
Fourier	$\nabla^2 u = b\, u_t$	*Propagación del calor*
D'Alembert	$\nabla^2 u = a\, u_{tt}$	*Propagación de ondas* ***a.- Vibraciones de cuerdas, membranas y cuerpos sólidos*** ***a.- Propagación de ondas sonoras, luminosas, de radio etc. con velocidad independiente de la longitud de onda.***
Raleigh	$\nabla^2 u = a\, u_{tt} + b\, u_t$	*Propagación de señales telegráficas*
Schrödinger	$\nabla^2 u = c(E-V)\, u$	*Propagación de ondas en la mecánica ondulatoria* ***a)Probabilidad de posición de una partícula cuya función de onda es u***
General	$\nabla^2 u = a\, u_{tt} + b\, u_t + c\, u + f$	
Maxwell	$D = \varepsilon E$ $B = \mu H$ $\iota = \gamma E$ $RotE = -\frac{\partial B}{\partial t}$ $RotH = \iota + \frac{\partial D}{\partial t}$ $divB = 0$ $divD = \rho$	*Potenciales eléctricos y magnéticos*

3.- Aplicaciones de matemática.

Algunas de las aplicaciones de los polinomios de Legendre son:

1.- Cálculo de Integrales
2.- Series de Fourier-Legendre
3.- Estudio de raíces de $z - a - w\ f(z) = 0$

2.- ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LEGENDRE.

2.1.- FORMA CANÓNICA

Se define como ***Ecuación Diferencial de Legendre en su forma canónica*** a:

Def.- $(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + \lambda\, y = 0$

cuya solución general es entonces la combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes

$y(x) = A\, y_1(x) + B\, y_2(x)$

Como caso particular de estas soluciones si $\lambda = \nu\,(\nu+1)$ con $\nu = n \in \mathbf{N}$ una de dichas soluciones es un Polinomio de Legendre de orden n. En este caso la solución general toma la forma:

$y(x) = A\, P_n\,(x) + B\, Q_n\,(x)$

2.2.- FORMAS MODIFICADAS DE LA ECUACIÓN DE LEGENDRE

Las Forma canónica de la ED de Legendre ha sido elegida como tal por la simplicidad en los cálculos de las soluciones. Las Formas Modificadas de la ED de Legendre se obtienen a partir de la Canónica por medio de un cambio de variables que se emplean en demostraciones matemáticas o en aplicaciones físicas.

2.2.1- PRIMERA FORMA MODIFICADA

La Ecuación Diferencial de Legendre en la resolución de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales en los Modelos usuales de la Física (Campos Conservativos, Transmisión de Calor, Transmisión de Ondas, etc.) planteadas en Coordenadas Esféricas aparece bajo la primera forma modificada.

T_1.-

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + \lambda\, y = 0 \quad \overset{x = \cos\theta}{\Leftrightarrow} \quad y''_{\theta\theta} + \operatorname{cotg}\theta\ y'_{\theta} + \lambda\, y = 0$$

$$y(x) = A\, y_1(x) + B\, y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(\theta) = A\, y_1(\cos\theta) + B\, y_2(\cos\theta)$$

$\boldsymbol{\lambda = \nu(\nu+1) \ \wedge \ \nu = n \in N}$

$$y(x) = A\,P_n(x) + B\,Q_n(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad y(\theta) = A\,P_n(\cos\theta) + B\,Q_n(\cos\theta).$$

D.- Esta forma modificada de la Ecuación de Legendre se obtiene con el cambio de variable $x = \cos\theta$

Partiendo de la Ecuación de Legendre canónica

$(1 - x^2)\,y'' - 2\,x\,y' + \lambda\,y = 0$

Cambiando de variable $x = \cos\theta$

$$y'_x = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{y'_\theta}{-\sin\theta}$$

$$y''_{xx} = \left[\frac{y''_{\theta\theta}}{-\sin\theta} + \frac{y'_\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta\right]\left[\frac{1}{-\sin\theta}\right]$$

Reemplazando estas expresiones en la ED resulta

$$\sin^2\theta\left[\frac{y''_{\theta\theta}}{\sin^2\theta} - \frac{y'_\theta}{\sin^3\theta}\cos\theta\right] - 2\cos\theta\left[\frac{y'_\theta}{-\sin\theta}\right] + \lambda\,y = 0$$

$$y''_{\theta\theta} + \text{cotg}\theta\ y'_\theta + \lambda\,y = 0$$

que es la ED modificada, cuya solución general será de la forma:

$y(\theta) = A\,y_1(\cos\theta) + B\,y_2(\cos\theta)$

si $\lambda = \nu(\nu+1)$ con $\nu = n \in \mathbf{N}$ las soluciones con Polinomios de Legendre de orden ***n*** tendrán la solución general de la forma:

$\boldsymbol{y(\theta) = A\,P_n(\cos\theta) + B\,Q_n(\cos\theta).}$

2.2.2- SEGUNDA FORMA MODIFICADA

Una segunda forma modificada se obtiene por translación $\boldsymbol{z = x - a}$ para llevarla a un desarrollo en un V(a). En particular se aplicará este cambio de variable en V(1) para encontrar otras formas de las soluciones de la ED de Legendre.

T₂.-

$$\boldsymbol{(1 - x^2)\,y'' - 2\,x\,y' + \lambda\,y = 0 \quad \overset{z = x-a}{\Leftrightarrow} \quad (1 - (z+a)^2)\,y'' - 2\,(z+a)\,y' + \lambda\,y = 0}$$

Partiendo de la ED canónica:

$\boldsymbol{(1 - x^2)\,y'' - 2\,x\,y' + \lambda\,y = 0}$

$$z = x - a \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= z + a \\ x - 1 &= z + a - 1 \\ x + 1 &= z + a + 1 \end{aligned}$$

se obtiene la segunda forma de ED modificada:

$$(1-(z+a)^2)\; y'' - 2(z+a)\; y' + \lambda y = 0$$

2.2.3.- TERCERA FORMA MODIFICADA

Esta tercera forma modificada de la ED de Legendre se emplea en la acotación de raíces de los Polinomios de Legendre.

T_3.-

$$y = \frac{z}{(\sin\theta)^{1/2}}$$

$$\lambda = \nu(\nu+1)$$

$$(1-x^2)\, y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z'' + [\,(\nu+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4(\sin\theta)^2}\,]\; z = 0$$

A partir de la ED modificada

$$y''_{\theta\theta} + \operatorname{cotg}\theta\; y'_{\theta} + \lambda\, y = 0$$

por el cambio de variable

$$y = \frac{z}{(\sin\theta)^{1/2}}$$

$$y' = \frac{z'}{(\sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{2}\frac{z\cos\theta}{(\sin\theta)^{3/2}}$$

$$y'' = \frac{z''}{(\sin\theta)^{1/2}} - 2\,\frac{1}{2}\frac{z'\cos\theta}{(\sin\theta)^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{z(\cos\theta)^2}{(\sin\theta)^{5/2}} + \frac{1}{2}\frac{z\sin\theta}{(\sin\theta)^{3/2}}$$

Reemplazando en:

$$y''_{\theta\theta} + \operatorname{cotg}\theta\; y'_{\theta} + \lambda\, y = 0$$

queda:

$$\frac{z''}{(\sin\theta)^{1/2}} - \frac{z'\cos\theta}{(\sin\theta)^{3/2}} + \frac{3}{4}\frac{z(\cos\theta)^2}{(\sin\theta)^{5/2}} + \frac{1}{2}\frac{z}{(\sin\theta)^{1/2}} + \operatorname{cotg}\theta[\frac{z'}{(\sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{2}\frac{z\cos\theta}{(\sin\theta)^{3/2}}] + \lambda\frac{z}{(\sin\theta)^{1/2}} = 0$$

$$z'' + [\,\frac{3}{4}\frac{(\cos\theta)^2}{(\sin\theta)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{(\cos\theta)^2}{(\sin\theta)^2} + \lambda\,]\, z = 0$$

Eligiendo $\lambda = \nu\,(\nu+1)$

$$z'' + [\,\frac{1}{4}\frac{1-(\sin\theta)^2}{(\sin\theta)^2} + \frac{1}{2} + \nu\,(\nu+1)\,]\, z = 0$$

$$z'' + [\,\nu^2 + \nu + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(\sin\theta)^2}\,]\, z = 0$$

resultando:

$$z'' + [\,(\nu+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4(\sin\theta)^2}\,]\, z = 0$$

3.- RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LEGENDRE.

3.1.- SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE FUCHS EN V(0)

La ED Legendre

$$(1-x^2)\, y'' - 2\,x\,y' + \lambda\, y = 0$$

tiene por campo de convergencia a

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \;\Rightarrow\; CV(p) = \{\, |\,x\,| < 1 \}$$

$$\Rightarrow \quad CV(y) = \{\, |\,x\,| < 1 \}$$

$$q(x) = \frac{\lambda}{1-x^2} \;\Rightarrow\; CV(q) = \{\, |\,x\,| < 1 \}$$

Se ensaya la solución aplicando el método de Fuchs

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^{k+r}$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (k+r)\, x^{k+r-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (k+r)\, (k+r-1)\, x^{r+k-2}$$

$$\lambda\, y = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda\, C_k\, x^{k+r}$$

$$-2\,x\,y' = \sum_{k=0}^{\infty} -2\, C_k\, (k+r)\, x^{k+r}$$

$$(1-x^2)\, y'' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (k+r)\, (k+r-1)\, x^{k+r-2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\, C_k\, (k+r)\, (k+r-1)\, x^{r+k}$$

$$0 =$$

Tomando el coeficiente de la potencia x^{k+r-2} se forma la Ecuación de Recurrencia

$$C_k\, (k+r)\, (k+r-1) - C_{k-2}\, [\, (k+r-2)\, (k+r-3) + 2\, (k+r-2) - \lambda\,] = 0$$

$$C_k\, (k+r)\, (k+r-1) - C_{k-2}\, [\, (k+r-2)\, (k+r-1) - \lambda\,] = 0$$

Que lleva a la Ecuación característica

$$C_0\, (r)\, (r-1) = 0$$

de donde

$r_1 = 1;\quad r_2 = 0;\quad \Delta = 1$

Se está en presencia de un caso III de Fuchs cuyo subcaso se discrimina en la ecuación de recurrencia con:
$r = r_2 = 0 \qquad k = \Delta = 1$

$C_1\,(1)\,(0) - C_{-1}\,[\,(-1)\,(0) - \lambda\,] = 0$

Donde se observa que la Condición Complementaria $-C_{-1}\,[\,(-1)\,(0) - \lambda\,] = 0$ es siempre nula porque $C_{-1} = 0$. Por lo tanto la Ecuación de Legendre es un Caso IIIA del método de Fuchs, es decir las dos soluciones son de la forma general $y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^{r+k}$

Para operar con mayor facilidad con la Ecuación de Recurrencia más fácilmente se transforma el segundo término en producto de monomios

$[\,(k + r - 2)\,(k + r - 1) - \lambda\,] = (k + r)^2 - 3\,(k + r) + 2 - \lambda$

Para ello se buscan las raíces de este polinomio de 2º grado

$(k + r) = 3/2 \pm \sqrt{(1/4) + \lambda}$

para ello se completa el cuadrado perfecto tomando $\lambda = \nu(\nu+1)$

$$= 3/2 \pm (\nu + 1/2) = \begin{cases} \nu + 2 \\ -\nu + 1 \end{cases}$$

queda

$[\,(k + r - 2)\,(k + r - 1) - \lambda\,] = (k - 2 + r - \nu)\,(k - 1 + r + \nu)$

Para hallar la Primera y Segunda solución simultáneamente se desarrollará la función $y(x, r)$:

$$C_k = \frac{C_{k-2}\,(k-2+r-\nu)\,(k-1+r+\nu)}{(k+r)(k+r-1)}$$

resulta entonces:

$C_0 = C_0$ arbitrario y no nulo.

$C_1 = 0$ válido para la primera solución, y elegido arbitrariamente nulo para la segunda. Además se arrastra

$C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{2p+1} = 0$

$$C_2 = \frac{C_0\,(r-\nu)\,(1+r+\nu)}{(r+2)(r+1)}$$

$$C_{2p} = \frac{C_0\,(r-\nu)\,(2+r-\nu)\ldots(2p-2+r-\nu)\,(1+r+\nu)\,(3+r+\nu)\ldots(2p-1+r+\nu)}{(r+2p)\,(r+2p-1)\ldots\,(r+4)\,(r+3)\,(r+2)\,(r+1)}$$

Entonces:

$$y(x,r) = C_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(r-\nu)(r+2-\nu)\ldots(r+2p-2-\nu)(r+1+\nu)(r+3+\nu)\ldots(r+2p-1+\nu)}{(r+2p)(r+2p-1)\ldots(r+4)(r+3)(r+2)(r+1)}\, x^{2p+r}$$

Para obtener la Primera solución y_1 se remplaza en $y(x,r)$: $r = r_1 = 1$

$$y_1 = y(x,r)\Big|_{r=r_1=1} = C_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(1-\nu)(3-\nu)\ldots(2p-1-\nu)(2+\nu)(4+\nu)\ldots(2p+\nu)}{(2p+1)!}\, x^{2p+1}$$

y para la Segunda solución y_2 se remplaza en $y(x,r)$: $r = r_2 = 0$

$$y_2 = y(x,r)\Big|_{r=r_2=0} = C_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)(2-\nu)\ldots(2p-2-\nu)(1+\nu)(3+\nu)\ldots(2p-1+\nu)}{(2p)!}\, x^{2p}$$

Estas soluciones y_1 e y_2 son las ***funciones de Legendre*** que generan a la solución general de la Ecuación de Legendre como la combinación lineal:

$$y = A\, y_1 + B\, y_2 \qquad\qquad CV(y) = \{\, |\, x\, | < 1\}$$

3.2.- POLINOMIOS DE LEGENDRE

Las funciones de Legendre para ciertos valores particulares de ν son Polinomios. En efecto dichas funciones para valores naturales de ν se reducen a Polinomios. La constante C_0 se fija de manera tal que dichos Polinomios, llamados de Legendre $P_n(x)$, tengan valor 1 para x = 1.

$n \in N \cup \{0\}$

C_0: $P_n(1) = 1$

Obs: Por supuesto que en el caso de los Polinomios de Legendre su Campo de Convergencia se extiende a todo el Plano Complejo y en particular se puede estudiar su comportamiento en otros puntos como el V(1).

3.2.1.- OBTENCIÓN DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE A PARTIR DE LAS FUNCIONES DE LEGENDRE. PRIMERA EXPRESIÓN

Una primera forma o expresión de los Polinomios de Legendre se deduce de la siguiente manera:

I.- En la primera solución y_1, si $\nu = n$ es Natural e Impar se obtiene un Polinomio de orden n pues los coeficientes de la serie se anulan a partir de $2p+1 > n$

$\nu = n \in Impar \quad \Rightarrow \qquad \forall p > (n-1)/2 \quad C_{2p} = 0$

$$y_1 = P_n(x) = C_0 \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \frac{(1-n)(3-n)\ldots(2p-1-n)(2+n)(4+n)\ldots(2p+n)}{(2p+1)!}\, x^{2p+1}$$

Con la convención que $C_0 : P_n(1) = 1$

II.- En la segunda solución y_2, si $\nu = n$ es Natural y Par también se obtiene un Polinomio de orden pues los coeficientes de la serie se anulan a partir de $2p > n$

$\nu = n \in Par \quad \Rightarrow \quad \forall p > n/2 \quad C_{2p} = 0$

$$y_2 = P_n(x) = C_0 \sum_{p=0}^{n/2} \frac{(-n)(2-n)\ldots(2p-2-n)(1+n)(3+n)\ldots(2p-1+n)}{(2p)!} x^{2p}$$

siempre con la convención que $C_0 : P_n(1) = 1$

3.2.2.- TABLA DE LOS PRIMEROS POLINOMIOS DE LEGENDRE

n	$y_1(x)$ si $n \in Par$ $y_2(x)$ si $n \in Impar$	C_0	$P_n(x)$
0	C_0	1	1
1	$C_0 x$	1	x
2	$C_0 [\, 1 - \frac{2.3}{2!} x^2 \,]$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} [\, 3x^2 - 1 \,]$
3	$C_0 [\, x - \frac{2.5}{3!} x^3 \,]$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} [\, 5x^3 - 3x \,]$
4	$C_0 [\, 1 - \frac{4.5}{2!} x^2 + \frac{4.2.5.7}{4!} x^4 \,]$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8} [\, 35x^4 - 30x^2 + 3 \,]$
5	$C_0 [\, x - \frac{4.7}{3!} x^3 + \frac{4.2.7.9}{5!} x^5 \,]$	$\frac{15}{8}$	$\frac{1}{8} [\, 63x^5 - 70x^3 + 15 \,]$

3.3.- SOLUCION DE LA ECUACION DE LEGENDRE EN V(1)

3.3.1.- PRIMERA SOLUCION POR EL METODO DE FUCHS EN V(1)

Si a la ED Legendre la llevamos al V(1) con la translación $z = x - 1$

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + \lambda\, y = 0$$

$$z = x - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = z + 1 \\ x + 1 = z + 2 \end{matrix}$$

toma la forma de ED modificada:

$$-\, z\,(z + 2)\, y'' - 2\,(z + 1)\, y' + \lambda\, y = 0$$

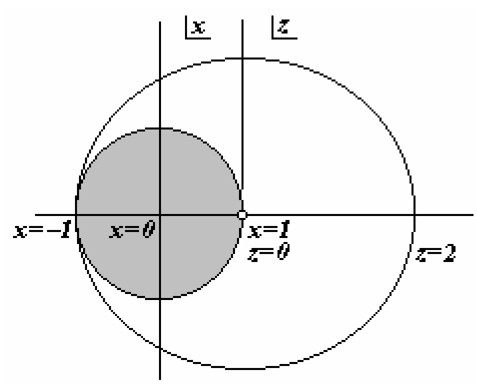
$$z\,(z + 2)\, y'' + 2\,(z + 1)\, y' - \lambda\, y = 0$$

Cuyo campo de convergencia es

$$p(x) = \frac{2(z+1)}{z(z+2)} \quad \Rightarrow \quad CV(p) = \{\, 0 < | z | < 2 \}$$

$$\Rightarrow \quad CV(y) = \{\, 0 < | z | < 2 \,\}$$

$$q(x) = -\,\frac{\lambda}{z(z+2)} \quad \Rightarrow \quad CV(q) = \{\, 0 < | z | < 2 \}$$



Aplicando el método de Fuchs

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, z^{r+k}$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (r+k)\, z^{r+k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (r+k)\, (r+k-1)\, z^{r+k-2}$$

$$-\lambda\, y = \sum_{k=0}^{\infty} -\lambda\; C_k\, z^{r+k}$$

$$2\,(z+1)\, y' = \sum_{k=0}^{\infty} 2\, C_k\, (r+k)\;\; z^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2\, C_k\, (r+k)\;\; z^{r+k-1}$$

$$z\,(z+2)\, y'' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (r+k)\;(r+k-1)\, z^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2\, C_k\, (r+k)\,(r+k-1)\, z^{r+k-1}$$

Tomando el coeficiente de la potencia z^{r+k-1} se forma la Ecuación de Recurrencia

$$C_k\,[2\,(r+k)\,(r+k-1) + 2\,(r+k)] + C_{k-1}\,[\,(r+k-1)\,(r+k-2) + 2(r+k-1) - \lambda\,] = 0$$

$$C_k\, 2\,(r+k)^2 + C_{k-1}\,[\,(r+k-1)\,(r+k) - \lambda\,] = 0$$

Que lleva a la Ecuación característica

$$C_0\, 2\, r^2 = 0$$

de donde

$r_1 = 0$; $r_2 = 0$; $\Delta = 0$ II Caso de Fuchs

Para operar la Ecuación de Recurrencia más fácilmente se transforma el segundo término en producto de monomios

$$[\,(r+k-1)\,(r+k) - \lambda\,] = (r+k)^2 - (r+k) - \lambda$$

Para ello se buscan las raíces de este polinomio de 2º grado

$$1/2 \pm \sqrt{(1/4)+\lambda}$$

y se completa el cuadrado perfecto dentro del radicando, tomando $\lambda = \nu(\nu+1)$

$$= 1/2 \pm (\,\nu + 1/2) = \begin{cases} \nu + 1 \\ -\nu \end{cases}$$

queda

$$C_k\, 2\,(r+k)^2 + C_{k-1}\;(r+k-\nu-1\,)\,(r+k+\nu) = 0$$

Para hallar la primera solución y_1 con $r_1 = 0$;

$$C_k = \frac{C_{k-1}\;(\nu+1-k)\,(k+\nu)}{2\,k^2}$$

De donde eligiendo $C_0 = 1$ recordando la convención $P_n(x)\Big|_{x=1} = P_n(z)\Big|_{z=0} = 1$

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = \frac{(\nu)(\nu+1)}{2\ 1^2}$$

$$C_2 = \frac{(\nu)(\nu-1)\ (\nu+1)(\nu+2)}{2^2\ (2!)^2}$$

$$C_k = \frac{(\nu)(\nu-1)\ldots(\nu+1-k)\ \ (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}{2^k\ (k!)^2} = \frac{\dfrac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}}{2^k\ (k!)^2}$$

Entonces la primera solución de la ecuación de Legendre es:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\dfrac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}}{2^k\ (k!)^2}\ z^k$$

3.3.2.- SEGUNDA EXPRESIÓN DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

En el caso de $\nu = n \in N \cup \{0\}$ la solución y_1 se reduce a Polinomios de grado $\nu = n$ que son los Polinomios de Legendre.

$$\boldsymbol{P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^k}$$

$$\boldsymbol{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k}$$

En efecto:

$$\forall\ k \geq n+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Gamma(n-k+1)} = 0$$

$$y_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\dfrac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)}}{2^k\ (k!)^2}\ z^k$$

Si $k \leq \nu = n$ entonces:

$$C_k = \frac{(n+k)!}{2^k\ (n-k)!\ (k!)^2} = \frac{n!\ (n+k)!}{2^k\ (n-k)!\ n!\ (k!)^2}$$

$$C_k = \frac{1}{2^k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

$$\boldsymbol{y_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^k =: P_n(z)}$$

3.3.3.- TERCERA REPRESENTACIÓN: FÓRMULA DE OLINDO RODRIGUES

Lema

$(x^2 - 1) = (x - 1)\,(x + 1)$

$\quad = z\ (z + 2)$

$(x^2 - 1)^n = z^n\ (z + 2)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{k+n}\ 2^{n-k}$$

$$D^{(n)}(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+n)(k+n-1)\ \ldots\ (k+1)\ z^k\ 2^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{k!}\ z^k\ 2^{n-k}$$

$$= 2^n\ n!\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\ (z/2)^k$$

$$= 2^n\ n!\ \ P_n(z)$$

De aquí resulta la fórmula de Olindo Rodrigues.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\ D^{(n)}\,(x^2 - 1)^n$$

De la cual se deducen los primeros Polinomios de Legendre que coinciden con lo ya vistos:

n	*Fórmula de Olindo Rodrigues*	$P_n(x)$
$P_0(x)$	$\frac{1}{2^0 0!}\ D^{(0)}\,(x^2 - 1)^0$	1
$P_1(x)$	$\frac{1}{2^1 1!}\ D^{(1)}\,(x^2 - 1)^1$	x
$P_2(x)$	$\frac{1}{2^2 2!}\ D^{(2)}\,(x^2 - 1)^2$	$\frac{1}{2}\ [\,3x^2 - 1]$
$P_3(x)$	$\frac{1}{2^3 3!}\ D^{(3)}\,(x^2 - 1)^3$	$\frac{1}{2}\ [\,5x^3 - 3x]$
$P_4(x)$	$\frac{1}{2^4 4!}\ D^{(4)}\,(x^2 - 1)^4$	$\frac{1}{8}\ [\,35x^4 - 30x^2 + 3]$
$P_5(x)$	$\frac{1}{2^5 5!}\ D^{(5)}\,(x^2 - 1)^5$	$\frac{1}{8}\ [\,63x^5 - 70x^3 + 15]$

3.4.- SEGUNDA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LEGENDRE EN V(1)

3.4.1.- LA ECUACIÓN DE RECURRENCIA GENERALIZADA DE Γ'

Se recuerda la Fórmula de Recurrencia de Γ'. Derivando en forma logarítmica la Fórmula de recurrencia de Γ

$$\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\ldots(\alpha+1)\,\alpha\,\Gamma(\alpha)$$

se obtiene la Fórmula de Recurrencia de Γ'

$$\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\alpha+k-2} + \ldots + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Para el caso de $\alpha = 1$ y $k = p-1$ la expresión se reduce a:

$$\frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \ldots + \frac{1}{2} + 1 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

y definiendo la Suma Armónica H(p) de p términos

$$H(p) := \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \ldots + \frac{1}{2} + 1$$

$$H(0) := 0$$

Queda

$$\frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} = H(p) + \Gamma'(1)$$

3.4.2.- SEGUNDA SOLUCIÓN POR EL MÈTODO DE D'ALEMBERT EN V(1)

Partiendo de la Ecuación de Recurrencia en V(1) sin reemplazar r

$$C_k\, 2\,(r+k)^2 + C_{k-1}\,(r+k-\nu-1)\,(r+k+\nu) = 0$$

Se halla la solución y(z, r)

$$C_k = \frac{C_{k-1}\,(\nu+1-r-k))\,(\nu+r+k)}{2(r+k)^2}$$

resulta entonces:

$C_0 = C_0$ arbitrario y no nulo.

$$C_k = C_0\,\frac{(\nu-r)(\nu-r-1)\ldots(\nu-r-k+1)(\nu+r+1)(\nu+r+2)\ldots(\nu+r+k)}{2^k[(r+1)(r+2)\ldots\ (r+k)]^2}$$

$$= C_0 \frac{\Gamma(\nu - r + 1)}{\Gamma(\nu - r - k + 1)} \frac{\Gamma(\nu + r + k + 1)}{\Gamma(\nu + r + 1)} \frac{\Gamma^2(r+1)}{\Gamma^2(r+k+1)} \frac{1}{2^k}$$

Para simplificar se elige la constante C_0 de manera que:

$$1 = C_0 \frac{\Gamma(\nu - r + 1)}{\Gamma(\nu + r + 1)} \Gamma^2(r+1)$$

$$C_0 = \frac{\Gamma(\nu + r + 1)}{\Gamma(\nu - r + 1)\ \Gamma^2(r+1)}$$

Se destaca que para $r = 0$ se mantiene la convención establecida para los Polinomios de Legendre

$$C_0 = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)\ \Gamma^2(1)} = 1 = P_n(x)\Big|_{x=1} = P_n(z)\Big|_{z=0} = 1$$

Entonces construyendo $y(z, r)$ con el C_0 elegido:

$$y(z, r) = z^r \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu + r + k + 1)}{\Gamma(\nu - r - k + 1)} \frac{1}{\Gamma^2(r+k+1)} \frac{1}{2^k} z^k$$

$$y(z, r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu + r + k + 1)}{\Gamma(\nu - r - k + 1)} \frac{1}{\Gamma^2(r+k+1)} \frac{1}{2^k} z^{r+k}$$

Para la Primera solución y_1 se remplaza $r = r_1 = 0$ en $y(z , r)$:

$$\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y(z, r)}\Big|_{r = r_1 = 0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu + k + 1)}{\Gamma(\nu - k + 1)} \frac{1}{(k!)^2} \frac{z^k}{2^k}$$

que es la solución y_1 ya hallada anteriormente.

La Segunda solución y_2 por el método de D'Alembert se obtiene derivando ***y(z, r)*** respecto de r y luego reemplazando $r = 0$.

$$\boldsymbol{y_2} = \frac{\partial y(z,r)}{\partial r}\Big|_{r = r_2 = 0} =$$

$$= \boldsymbol{y_1\, Lz} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu + r + k + 1)}{\Gamma(\nu - r - k + 1)} \frac{1}{\Gamma^2(r+k+1)} \left[\frac{\Gamma'(\nu + r + k + 1)}{\Gamma(\nu + r + k + 1)} - (-1) \frac{\Gamma'(\nu - r - k + 1)}{\Gamma(\nu - r - k + 1)} - 2 \frac{\Gamma'(r+k+1)}{\Gamma(r+k+1)} \right] \frac{z^{r+k}}{2^k}\Bigg|_{r=0}$$

$$= \boldsymbol{y_1\, Lz} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu + k + 1)}{\Gamma(\nu - k + 1)} \frac{1}{(k!)^2} \left[\frac{\Gamma'(\nu + k + 1)}{\Gamma(\nu + k + 1)} + \frac{\Gamma'(\nu - k + 1)}{\Gamma(\nu - k + 1)} - 2 \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} \right] \frac{z^k}{2^k}$$

$$= \boldsymbol{y_1\, Lz + H_2(z)}$$

En el caso de $\boldsymbol{\nu = n \in N \cup \{0\}}$ la solución $\boldsymbol{y_1}$ se reduce al Polinomio $\boldsymbol{P_n(z)}$ de grado con $\boldsymbol{\nu = n}$. Y en la segunda solución $\boldsymbol{y_2}$ la serie $\boldsymbol{H_2(z)}$ se reduce a un polinomio porque:

$$\forall\ k \geq n+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Gamma(n - k + 1)} = 0$$

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{1}{(k!)^2} \left[\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} + \frac{\Gamma'(n+1-k)}{\Gamma(n+1-k)} - 2\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} \right] \frac{z^k}{2^k}$$

Que en función de la Suma Armónica H(p) queda:

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{1}{(k!)^2} [\, H(n+k) + H(n-k) - 2\, H(k)] \frac{z^k}{2^k}$$

Entonces la segunda solución es de la forma:

$$y_2 = \left.\frac{\partial y(z,r)}{\partial r}\right|_{r = r_2 = 0} = Q_n(z)$$

$$= P_n(z)\, Lz + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{1}{(k!)^2} [\, H(n+k) + H(n-k) - 2\, H(k)] \frac{z^k}{2^k}$$

Si $k \le \nu = n$ entonces como ya se ha visto:

$$\frac{(n+k)!}{2^k\ (n-k)!\ (k!)^2} = \frac{n!\ (n+k)!}{2^k\ (n-k)!\ n!\ (k!)^2} = \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

$$Q_n(z) = P_n(z)\, Lz + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} [\, H(n+k) + H(n-k) - 2\, H(k)] \frac{z^k}{2^k}$$

<u>*3.4.3.- SEGUNDA SOLUCIÓN POR REDUCCIÓN DEL ORDEN EN V(1)*</u>

Por el método de reducción del orden la segunda solución $y_2(z)$ está dada por:

$$y_2(z) = y_1(z) \int \frac{1}{(y_1)^2} \exp\left(-\int \frac{2(z+1)}{z(z+2)} dz\right) dz$$

$$= y_1(z) \int \frac{1}{(y_1)^2} \exp\left(-\int \frac{1}{z} + \frac{1}{z+2} dz\right) dz$$

$$= y_1(z) \int \frac{1}{(y_1)^2} \left[\frac{1}{z}\ \frac{1}{z+2}\right] dz$$

Como por lo visto el término independiente de $y_1(z)$ es $C_0 = 1$

$$C_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(y_1)^2} \in H/V(0)$$

y además

$$\frac{1}{z+2} \in H/V(0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{(y_1)^2} \frac{1}{z+2} \in H/V(0)$$

$$= y_1(z) \int \frac{1}{z} H_3(z)\, dz$$

$= y_1(z)\ [\ L(z) + H_4(z)]$

$= y_1(z)\ L(z) + H_2(z)$

Obs: Nótese que la segunda solución y_2 en V(1) tiene L(z) en la solución. Análogo hecho se demuestra en V(–1)

En particular para los Polinomios de Legendre se tiene

$$y_2 = \boldsymbol{Q_n(z)} = P_n(z) \int \frac{1}{P_n^2} \exp\left(-\int \frac{2(z+1)}{z(z+2)}\, dz\right) dz$$

$$\boldsymbol{Q_n(z) = P_n(z)\ Lz + H_2(z)}$$

3.5.- SEGUNDA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LEGENDRE EN V(0) CASO $\nu = n$

3.5.1.-- SEGUNDA SOLUCIÓN POR REDUCCIÓN DEL ORDEN EN V(0) CASO $\nu = n$

Para el caso que $\lambda = n(n+1)$ una de las soluciones, como se sabe es un Polinomio de Legendre. Puede obtenerse una forma de la segunda solución correspondiente a partir del Método de Reducción del Orden.

$$Q_n = P_n \int \frac{1}{(1-x^2)(P_n)^2}\, dx$$

La forma de la segunda solución es entonces:

$$Q_n = u\, P_n(x)$$

que introducida en la Ecuación Diferencial da:

$$(1-x^2)\,[u''\,P_n + 2\,u'\,P_n' + u\,P_n''\,] - 2x\,[u'\,P_n + u\,P'_n\,] + n(n+1)\,u\,P_n = 0$$

$$(1-x^2)\,P_n\,u'' + [\,2\,(1-x^2)\,P_n' - 2\,x\,P_n\,]\,u' + [\,(1-x^2)\,P_n'' - 2\,x\,P_n' + n(n+1)]\,u = 0$$

$$(1-x^2)\,P_n\,u'' + [\,2\,(1-x^2)\,P_n' - 2\,x\,P_n\,]\,u' = 0$$

por lo tanto

$$\frac{u''}{u'} + 2\frac{P_n'}{P_n} - \frac{2x}{1-x^2} = 0$$

$$L\,u' + L\,(P_n)^2 + L\,(1-x^2) = 0$$

$$u' = \frac{1}{(1-x^2)(P_n)^2}$$

$$u = \int \frac{1}{(1-x^2)(P_n)^2}\, dx$$

se obtiene entonces la forma general de la segunda solución correspondiente a los Polinomios de Legendre, que se denomina Q_n, a:

$$Q_n = P_n \int \frac{1}{(1-x^2)(P_n)^2} dx$$

Para obtener la expresión de Q_n se considera

$$\frac{1}{(x^2-1)(P_n)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{(x-x_k)^2} + \frac{E_k}{x-x_k}$$

donde los valores x_k son los ceros (todos simples) del Polinomio P_n y los coeficientes de las fracciones simples toman los valores expresados a continuación. Los valores $x = 1$ y $x = -1$ no son ceros de P_n pues $P_n(1) = 1$ y
$P_n(-1) = (-1)^n$

$$A = \frac{1}{2.(P_n(1))^2} = \frac{1}{2.}$$

$$B = -\frac{1}{2.(P_n(-1))^2} = -\frac{1}{2.}$$

El cálculo de los coeficientes D_k es el siguiente:

Llamando f(x) a la función a descomponer por fracciones simples, la expresión de los coeficientes D_k es

$$D_k = \lim_{x \to x_k} (x-x_k)^2 f(x)$$

por lo tanto recordando que $P_n(x_k) = 0$

$$\frac{(x-x_k)^2}{(x^2-1)(P_n(x))^2} = \frac{1}{(x^2-1)[\frac{P_n(x)-P(x_k)}{x-x_k}]^2}$$

Pasando al Límite de esta expresión para $x \to x_k$ se obtiene:

$$D_k = \frac{1}{(x_k{}^2-1)[P_n'(x_k)]^2}$$

El valor de los E_k se obtiene a partir de:

$$E_k = \lim_{x \to x_k} D' (x-x_k)^2 f(x)$$

reemplazando f(x)

$$D \frac{(x-x_k)^2}{(x^2-1)(P_n(x))^2} = \frac{2(x-x_k)(x^2-1)P_n{}^2 - (x-x_k)^2[2xP_n{}^2 + (x^2-1)2P_n P_n']}{(x^2-1)^2 P_n{}^4}$$

$$= \frac{2(x-x_k)}{(x^2-1)^2 P_n} \frac{(x^2-1)P_n - (x-x_k)[x\ P_n + (x^2-1)\ P_n']}{P_n{}^2}$$

El primer factor tiende a un valor ***no*** nulo

$$\frac{2(x-x_k)}{(x^2-1)^2 P_n} \xrightarrow[x\to x_k]{} \frac{2}{(x^2-1)^2 P_n'} \neq 0$$

En el segundo factor es un limite indeterminado, y por lo tanto aplicando L'Hospital

$$\frac{2x\ P_n + (x^2-1)P_n' - [x\ P_n + (x^2-1)P_n'] - (x-x_k)[P_n + x\ P_n' + 2x\ P_n' + (x^2-1)P_n'']}{2\ P_n P_n'} =$$

Simplificando y reemplazando en virtud de la ED $\quad 2x\ P_n' + (x^2-1)\ P_n'' = n(n+1)\ P_n$

$$= \frac{x\ P_n - (x-x_k)[P_n + x\ P_n' + n(n+1)P_n]}{2\ P_n P_n'} =$$

$$= \frac{x\ P_n - (x-x_k)[x\ P_n' + (n^2+n+1)P_n]}{2\ P_n P_n'} =$$

Aplicando L'Hospital otra vez

$$= \frac{P_n + x\ P_n' - [x\ P_n' + (n^2+n+1)P_n] - (x-x_k)[P_n' + x\ P_n'' + (n^2+n+1)P_n']}{2\ (P_n')^2 + 2\ P_n P_n''} =$$

$$= \frac{P_n - (n^2+n+1)P_n - (x-x_k)[P_n' + x\ P_n'' + (n^2+n+1)P_n']}{2\ (P_n')^2 + 2\ P_n P_n''} \xrightarrow[x\to x_k]{} 0$$

Por lo tanto

$E_k = 0$

Observación: Otra forma de asegurar que $E_k = 0$ es a partir de que $\boldsymbol{Q_n \in H/x_k}$ pues el Campo de Convergencia de las soluciones de Legendre en el V(0) era $\boldsymbol{CV(y) = \{\, |x| < 1\}}$.

Suponiendo lo contrario que $E_k \neq 0$

$$E_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{E_k}{x-x_k}\,dx = E_k\ L(x - x_k)$$

esto implica $Q_n \notin H/x_k$ lo cual es ***absurdo.***

volviendo a las fracciones simples

$$\frac{1}{(x^2-1)(P_n)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{(x-x_k)^2} + \frac{E_k}{x-x_k}$$

queda entonces:

$$\frac{1}{(x^2-1)(P_n)^2} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{(x-x_k)^2}$$

integrando este resultado

$$u = \int \frac{1}{(1-x^2)(P_n)^2} \, dx = -\int \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{(x-x_k)^2}$$

$$u = \frac{1}{2} \, L \frac{1+x}{1-x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{(x-x_k)}$$

se obtiene finalmente

$$Q_n = u \, P_n(x) = P_n(x) \left[\frac{1}{2} \, L \frac{1+x}{1-x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{(x-x_k)} \right]$$

que es otra forma de presentar a la segunda solución Q_n

3.5.2.- TABLA DE LAS PRIMERAS FUNCIONES Q_n DE LEGENDRE

Los primeros valores de Q_n son:

n	***$Q_n(x)$***	***$Q_n(x)$***	***$Q_n(x)$***
$Q_0(x)$	$\int \frac{1}{(1-x^2)} \, dx$	$\frac{1}{2} \, L \frac{1+x}{1-x}$	$Q_0(x)$
$Q_1(x)$	$x \int \frac{1}{(1-x^2)x^2} \, dx$	$\frac{1}{2} x \, L \frac{1+x}{1-x} - 1$	$P_1 Q_0 - 1$
$Q_2(x)$	$P_2 \int \frac{1}{(1-x^2)(P_2)^2} \, dx$	$\frac{1}{2} P_2 \, L \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2} P_1$	$P_2 Q_0 - \frac{3}{2} P_1 = P_2 Q_0 - \frac{3}{2} x$
$Q_3(x)$	$P_3 \int \frac{1}{(1-x^2)(P_3)^2} \, dx$	$\frac{1}{2} P_3 \, L \frac{1+x}{1-x} - \frac{10}{3} P_2 - \frac{1}{3} P_0$	$P_3 Q_0 - \frac{5}{3} P_2 - \frac{1}{6} P_0 = P_3 Q_0 - \frac{5}{2} x^2 + \frac{2}{3}$

4.- REPRESENTACIONES INTEGRALES DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

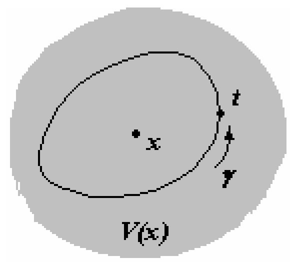
4.1.- REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE SCHLAFLI

Una representación de los Polinomios de Legendre es la Integral de Schlafli.

T.- Integral de Schlafli

$\gamma \in$ ***Lazo*** $\subset V(x)$
$x \in V(x)$

Def: $P_n(x) \quad \Rightarrow \quad P_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\,\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \dfrac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt$



D.- Esta representación se obtiene a partir del teorema de las derivadas sucesivas de Cauchy que se recuerda

$f(t) \in H/V(x)$
$\gamma \in$ *Lazo* $\subset V(x)$
$x \in V(x) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \dfrac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt$

eligiendo f(t)

$$f(t) = \frac{1}{2^n\,n!}\,(t^2-1)^n$$

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt$$

siendo

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)$$

queda la fórmula de Schlafli

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt$$

4.2.- REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LAPLACE DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

Otra representación Integral de los Polinomios de Legendre es la de Laplace, que tiene dos expresiones, una para $|x| < 1$ y otra para $x > 1$

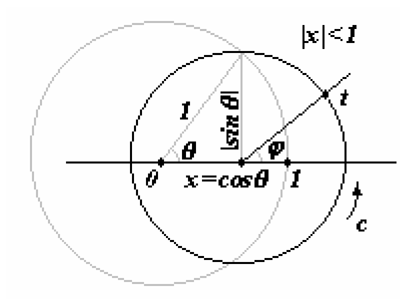
T. Representación Integral de Laplace de los Polinomios de Legendre

Def $P_n(x) \Rightarrow$ $|x| < 1$ $\quad x = \cos\theta$ $\qquad P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta \cos\varphi)^n \, d\varphi$

$x > 1$ $\quad x = ch\theta$ $\qquad P_n(ch\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (ch\,\theta + sh\theta\,\cos\varphi)^n \, d\varphi$

D.- I.- Para el caso de $|x| < 1$ se elige en la Integral de Schlafli

$x = \cos\theta$
y el camino c: circunferencia de radio $r = |\sin\theta|$



$t - x = \sin\theta\, e^{i\varphi}$
$dt = i \sin\theta\, e^{i\varphi}\, d\varphi$
$t = \cos\theta + \sin\theta\, e^{i\varphi}$

$$
\begin{aligned}
t^2 - 1 &= -1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta\, e^{i\varphi} + \sin^2\theta\, e^{i2\varphi} \\
&= -1 + 1 - \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta\, e^{i\varphi} + \sin^2\theta\, e^{i2\varphi} \\
&= 2\cos\theta\sin\theta\, e^{i\varphi} + \sin^2\theta\,(e^{i2\varphi} - 1) \\
&= 2\cos\theta\sin\theta\, e^{i\varphi} + \sin^2\theta\, e^{i\varphi}\,(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \\
&= 2\sin\theta\, e^{i\varphi}\,(\cos\theta + i\sin\theta\sin\varphi)
\end{aligned}
$$

reemplazando en Schlafli resulta

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{2^n}\int_{0+\alpha}^{2\pi+\alpha} 2^n \sin^n\theta\, e^{in\varphi}\,(\cos\theta + i\sin\theta\sin\varphi)^n \frac{1}{\sin^{n+1}\theta\; e^{i(n+1)\varphi}}\;\sin\theta\, e^{i\varphi}\; i\, d\varphi$$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{0+\alpha}^{2\pi+\alpha} (\cos\theta + i\sin\theta\sin\varphi)^n \, d\varphi$$

Cambiando de variable $\varphi \to \pi/2 - \varphi$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2+\alpha}^{\pi/2-2\pi+\alpha} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n \, (-d\varphi)$$

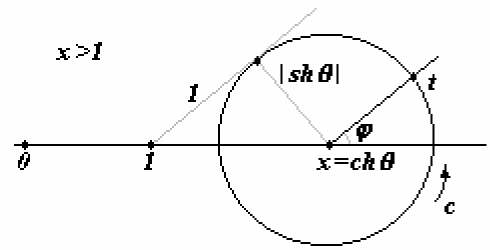
En particular invirtiendo el orden de integración y tomando $\alpha = \pi$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos\theta + i \sin\theta \cos\varphi)^n \, d\varphi$$

Por paridad

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta \cos\varphi)^n \, d\varphi$$

II.- Por otro lado en el caso $x > 1$



se elige

$x = \mathrm{ch}\theta$

y el camino c: circunferencia de radio $r = |\,\mathrm{sh}\theta\,|$

$$\begin{aligned} t - x &= \mathrm{sh}\theta\, e^{i\varphi} \\ dt &= i\, \mathrm{sh}\theta\, e^{i\varphi}\, d\varphi \\ t &= \mathrm{ch}\theta + \mathrm{sh}\theta\, e^{i\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^2 - 1 &= -1 + \mathrm{ch}^2\theta + 2\,\mathrm{ch}\theta\, \mathrm{sh}\theta\, e^{i\varphi} + \mathrm{sh}^2\theta\, e^{i2\varphi} \\ &= -1 + 1 + \mathrm{sh}^2\theta + 2\,\mathrm{ch}\theta\, \mathrm{sh}\theta\, e^{i\varphi} + \mathrm{sh}^2\theta\, e^{i2\varphi} \\ &= 2\,\mathrm{ch}\theta\, \mathrm{sh}\theta\, e^{i\varphi} + \mathrm{sh}^2\theta\, (e^{i2\varphi} + 1) \\ &= 2\,\mathrm{ch}\theta\, \mathrm{sh}\theta\, e^{i\varphi} + \mathrm{sh}^2\theta\, e^{i\varphi}\, (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ &= 2\,\mathrm{sh}\theta\, e^{i\varphi}\, (\mathrm{ch}\theta + \mathrm{sh}\theta \cos\varphi) \end{aligned}$$

reemplazando en Schlafli resulta

$$P_n(\mathrm{ch}\theta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^n} \int_{0+\alpha}^{2\pi+\alpha} 2^n\, \mathrm{sh}^n\theta\, e^{in\varphi}\, (\mathrm{ch}\theta + \mathrm{sh}\theta \cos\varphi)^n \frac{1}{\mathrm{sh}^{n+1}\theta\; e^{i(n+1)\varphi}}\; \mathrm{sh}\theta\, e^{i\varphi}\; i\, d\varphi$$

$$P_n(\mathrm{ch}\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{0+\alpha}^{2\pi+\alpha} (\mathrm{ch}\,\theta + \mathrm{sh}\theta \cos\varphi)^n \, d\varphi$$

Por paridad

$$P_n(\mathrm{ch}\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\mathrm{ch}\theta + \mathrm{sh}\theta \cos\varphi)^n \, d\varphi$$

4.3.- REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE LEGENDRE

Las soluciones de la Ecuación Diferencial de Legendre para un ν genérico (***no necesariamente n∈N***) pueden expresarse bajo Formas Integrales semejantes a la Integral de Schlafli.

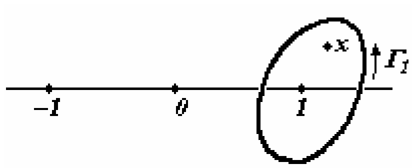
Para que la integral de Schlafli sea solución basta que la función integrando:

$$\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-x)^{\nu+2}}$$

retome el mismo valor al final del recorrido de un lazo sobre el cual se desarrolle la integral. Debe observarse que la función anterior tiene 3 puntos de ramificación: ***+1 –1 x.***

Eligiendo γ de forma conveniente se logran distintas formas de la solución de la ED de Legendre. Dos ejemplos de estos lazos son:

Ejemplo 1:



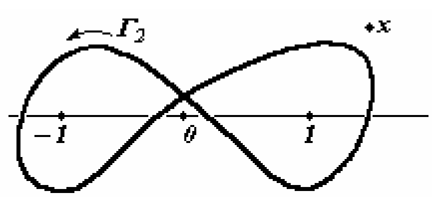
si se toma Γ_1 como indica la figura, se verifica que la función integrando retoma el valor inicial:

$$(t^2-1)^{\nu+1} \longrightarrow (t^2-1)^{\nu+1}\ e^{2\pi i(\nu+1)}$$

$$(t-x)^{\nu+2} \longrightarrow (t-x)^{\nu+2}\ e^{2\pi i(\nu+2)}$$

$$\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-x)^{\nu+2}} \longrightarrow \frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-x)^{\nu+2}}\ e^{2\pi i-4\pi i}$$

Ejemplo 2:



eligiendo Γ_2 de acuerdo a la figura también la función integrando retoma el valor inicial:

$$(t^2-1)^{\nu+1} \longrightarrow (t^2-1)^{\nu+1}\ e^{2\pi i(\nu+1)-2\pi i(\nu+1)}$$

5.- PROPIEDADES: PRIMERA PARTE

5.1.- PARIDAD

T₁. ***Def*** $P_n(x) \quad \Rightarrow \quad P_n(x)$ ***tiene la paridad de n***

D₁.- A partir de la fórmula de Olindo Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\, D^{(n)}(x^2-1)^n$$

se implica directamente que $P_n(x)$ tiene la paridad de n.

5.2.- VALORES NOTABLES

Como corolario de las Fórmulas de Laplace se obtienen las siguientes propiedades:

$$\textbf{T.}\quad \textit{Def } P_n(x) \;\Rightarrow\; T_{2}.-\quad P_n(1) = 1$$

$$\Rightarrow\; T_{3}.-\quad P_n(-1) = (-1)^n$$

$$\Rightarrow\; T_{4}.-\quad P_n(0) \xrightarrow[n=2k+1]{} P_{2k+1}(0) = 0$$

$$\xrightarrow[n=2k]{} P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

D.-

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n\, d\varphi \qquad |x| < 1$$

$$P_n(ch\,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (ch\,\theta + sh\,\theta\cos\varphi)^n\, d\varphi \qquad x > 1$$

Pasando al límite en la representación Integral de Laplace

$$T_{2}.-\quad P_n(\cos\theta) \xrightarrow[\substack{\theta\to 0\\ x\to 1}]{} P_n(1) = 1$$

$$T_{3}.-\quad P_n(\cos\theta) \xrightarrow[\substack{\theta\to \pi\\ x\to -1}]{} P_n(-1) = (-1)^n$$

En el caso de $\theta = \pi/2 \quad x = 0$

$$T_{4}.-\quad P_n(0) = \frac{i^n}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\varphi)^n\, d\varphi \xrightarrow[n=2k+1]{} P_{2k+1}(0) = 0$$

$$\xrightarrow[n=2k]{} P_{2k}(0) = \frac{i^n}{\pi} B\left(k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (-1)^k \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(k+1)}$$

$$= (-1)^k \frac{(k-1/2)(k-3/2)\ldots(3/2)(1/2)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

En particular los primeros valores de $P_{2k}(0)$ son:

$P_0(0)$	$P_2(0)$	$P_4(0)$	$P_6(0)$	$P_8(0)$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{35}{128}$

5.3.- ACOTACIÓN

Hay varios teoremas de acotación de los Polinomios de Legendre. Algunos son los siguientes:

T_5. Primera Acotación de los Polinomios de Legendre

$$x \in [-1,1] \quad \Rightarrow \quad |P_n(x)| = |P_n(\cos\theta)| \le 1$$

D.-

$|x| = 1 \quad \Rightarrow \quad |P_n(x)| = |P_n(\cos\theta)| = 1$

$|x| < 1$

$$|P_n(\cos\theta)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi|^n \, d\varphi$$

Expresión que se puede acotar por el módulo de su parte real:

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi|^{n/2} \, d\varphi$$

y también por

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos^2\theta + \sin^2\theta|^{n/2} \, d\varphi = 1$$

T_6.-. Segunda Acotación de los Polinomios de Legendre

$$x \in]-1,1[\quad \Rightarrow \quad |P_n(x)| = |P_n(\cos\theta)| \le \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{3}{2})}$$

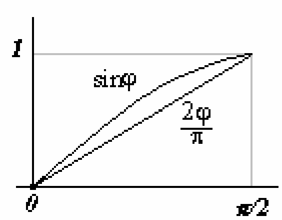
Partiendo de

$$|P_n(\cos\theta)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi|^{n/2} \, d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} |\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi|^{n/2} \, d\varphi$$

$$\le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} |\cos^2\theta + \sin^2\theta\,(1-\sin^2\varphi)|^{n/2} \, d\varphi$$

$$\le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} |1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi|^{n/2} \, d\varphi$$

Como en $\varphi \in [0 \;\; \pi/2] \;\Rightarrow\; \sin\varphi \ge \dfrac{2\varphi}{\pi}$



se tiene

$$|P_n(\cos\theta)| < \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left|1 - \sin^2\theta \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2\right|^{n/2} d\varphi$$

cambiando de variable $u = \sin\theta \dfrac{2\varphi}{\pi}$

$$\xrightarrow{u=\sin\theta(2/\pi)\varphi} = \frac{1}{\sin\theta} \int_0^{\sin\theta} | 1 - u^2 |^{n/2} du$$

$$< \frac{1}{\sin\theta} \int_0^{1} | 1 - u^2 |^{n/2} du$$

cambiando de variable otra vez

$$\xrightarrow{u=v^{1/2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin\theta} \int_0^{1} (1 - v)^{n/2} v^{-1/2} dv$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin\theta} B(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{3}{2})}$$

$$P_n(\cos\theta) | < \frac{1}{2} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{3}{2})}$$

$T_{7.-.}$ Tercera Acotación de los Polinomios de Legendre

$$x \in]-1,1[\quad \Rightarrow \quad | P_n(x) | = | P_n(\cos\theta) | \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n \sin^2\theta}}$$

Partiendo de

$$| P_n(\cos\theta) | \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} | \cos^2\theta + \sin^2\theta \cos^2\varphi |^{n/2} d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} | \cos^2\theta + \sin^2\theta \cos^2\varphi |^{n/2} d\varphi$$

$$| P_n(\cos\theta) | < \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} | 1 - \sin^2\theta \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2 |^{n/2} d\varphi$$

$$< \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} | 1 - \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2 |^{n/2} d\varphi$$

Además como $1 - y \leq e^{-y}$

$$1 - \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2 \leq e^{-\frac{n \sin^2\theta}{2}\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2} = e^{-\frac{2n\sin^2\theta}{\pi^2}(\varphi)^2}$$

$$| P_n(\cos\theta) | < \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2n\sin^2\theta}{\pi^2}(\varphi)^2} d\varphi$$

Cambiando de variable

$$t = (2n)^{1/2} \frac{\varphi}{\pi} \sin\theta$$

$$| P_n(\cos\theta) | < \sqrt{\frac{2}{n \sin^2\theta}} \int_0^{\sqrt{n/2}\sin\theta} e^{-t^2} dt$$

$$| P_n(\cos\theta) | < \sqrt{\frac{2}{n \sin^2 \theta}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{2}{n \sin^2 \theta}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$P_n(\cos\theta) | < \sqrt{\frac{\pi}{2n \sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{| \sin\theta |}$$

5.4.- COEFICIENTES NOTABLES

$T_{8.-}$. $\quad$ ***Def*** $P_n(x) \Rightarrow Coef(x^n) = \frac{1}{2^n n!} D^{(n)} x^{2n} \Big|_{x=1} = \frac{(2n)!}{2^n n! n!}$

D.- Derivando n veces x^{2n} se obtiene el resultado.

5.5.- CEROS DE LAS SOLUCIONES

5.5.1.- PROPIEDADES DE LOS CEROS

Se recuerdan los teoremas sobre los ceros de EDLH de segundo orden

$T_{1.-}$ *Los ceros de cualquier solución de una EDLH de segundo orden son simples*

$H_1 \quad L(y) := y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$
$H_2 \quad y_1 : L(y_1) = 0 \quad \wedge \quad y_1 \neq \sigma$
$H_3 \quad y_1(\zeta_k) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \zeta_k \in$ *Cero simple*

$T_{2.-}$ *Dos soluciones li de cualquier solución de una EDLH de segundo orden no pueden tener ceros comunes*

$H_1 \quad L(y) := y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$
$H_2 \quad y_1 : L(y_1) = 0 \quad \wedge \quad y_2 : L(y_2) = 0 \quad \{y_1\ y_2\} \in li$
$H_2 \quad y_1(\zeta_k) = 0 \qquad \Rightarrow \quad y_2(\zeta_k) \neq 0$

$T_{3.-}$ *Dos soluciones li de cualquier solución de una EDLH de segundo orden tiene los ceros intercalados (entre dos ceros consecutivos de una solución se intercalan uno solo de otra solución)*

$H_1 \quad L(y) := y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$
$H_2 \quad y_1 : L(y_1) = 0 \quad \wedge \quad y_2 : L(y_2) = 0 \quad \{y_1\ y_2\} \in li$
$H_3 \quad y_1(\zeta_k) = 0 \quad y_1(\zeta_{k+1}) = 0$ *ceros consecutivos* $\qquad \Rightarrow \exists \omega_k \in]\ \zeta_k\ \ \zeta_{k+1} [\ : \ y_2(\omega_k) = 0$
$\qquad \omega_k \in$ *único en* $[\ \zeta_k\ \ \zeta_{k+1}]$

5.5.2- ACOTACIÓN DE LOS CEROS

Una acotación de los Ceros de las Soluciones de Legendre está dada por la siguiente expresión de Bruns:

$$\frac{k-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi < \theta_k < \frac{k}{n+\frac{1}{2}}\pi$$

que se demuestra a continuación. A partir de la ED modificada

$$y''_{\theta\theta} + \operatorname{cotg}\theta\, y'_{\theta} + \lambda y = 0$$

por el cambio de variable

$$y = \frac{z}{(\sin\theta)^{1/2}}$$

queda la ED

$$z'' + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4(\sin\theta)^2} \right] z = 0$$

que puede compararse con la ED

$$w'' + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 w = 0$$

a los efectos de aplicar el Teorema de Sturm que asegura que z tendrá 1 cero entre 2 ceros consecutivos de w. Una integral particular de la ED en w es

$$w = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi$$

y sus raíces son

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi = 0$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_k = k\pi$$

$$\varphi_k = \frac{k}{n+\frac{1}{2}}\pi$$

por lo tanto un primer resultado es

$$\frac{k-1}{n+\frac{1}{2}}\pi < \theta_k < \frac{k}{n+\frac{1}{2}}\pi$$

cambiando ahora de subíndice

$k \longrightarrow n+1-k$

$$\frac{n-k}{n+\frac{1}{2}}\pi < \theta_{n+1-k} < \frac{n+1-k}{n+\frac{1}{2}}\pi$$

tomando esta desigualdad para

$\pi - \theta_k$

$n-k \longrightarrow n-k-n-\frac{1}{2}$

$n+1-k \longrightarrow n+1-k-n-\frac{1}{2}$

$$-\frac{k+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi < -\theta_k < -\frac{k-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi$$

$$\frac{k-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi < \theta_k < \frac{k+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi$$

reuniendo este resultado con el primero se obtiene esta Desigualdad de Bruns

$$\frac{k-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi < \theta_k < \frac{k}{n+\frac{1}{2}}\pi$$

6.- FÓRMULAS DE RECURRENCIA DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

6.1.- PRIMERA FÓRMULA DE RECURRENCIA

T.- ***Def.*** $P_n(x) \quad \Rightarrow \quad (n+1)\,P_{n+1} - (2n+1)\,x\,P_n + n\,P_{n-1} = 0$

D₁.- Partiendo de la fórmula de Olindo Rodrígues $\quad P_n(x) = \dfrac{1}{2^n\,n!}\,D^{(n)}\,(x^2-1)^n$

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\,D^{(n+1)}\,(x^2-1)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\,D^{(n)}\,[\,D(x^2-1)^{n+1}\,]$$

$$= \frac{1}{2^n\,n!}\,D^{(n)}\,[\,x\,(x^2-1)^n\,]$$

I.- Desarrollando esta derivada como producto de funciones

$$\frac{1}{2^n\,n!}\,D^{(n)}\,[\,x\,(x^2-1)^n\,] = x\,\frac{1}{2^n\,n!}\,D^{(n)}\,(x^2-1)^n + \frac{1}{2^n\,n!}\,n\,D^{(n-1)}\,(x^2-1)^n$$

$$= x\,P_n + \frac{1}{2^n\,n!}\,n\,D^{(n-1)}\,[\,(x^2-1)^n\,]$$

II.- Por otra parte derivando una vez a la misma expresión

$$D^{(n)}\,[\,(x^2-1)^n\,x\,] = D^{(n-1)}\,[\,(x^2-1)^n + 2\,n\,x^2\,(x^2-1)^{n-1}\,]$$

$$= D^{(n-1)}\,[\,(2n+1)\,(x^2-1)^n + 2n\,(x^2-1)^{n-1}\,]$$

$$= (2n+1)\,D^{(n-1)}\,(x^2-1)^n + 2\,n\,2^{n-1}\,(n-1)!\,P_{n-1}$$

Entonces

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n\,(n)!}\,D^{(n)}\,[\,(x^2-1)^n\,x\,] = \frac{1}{2^n\,(n)!}\,[(2n+1)\,D^{(n-1)}\,(x^2-1)^n + 2\,n\,2^{n-1}\,(n-1)!\,P_{n-1}\,]$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{2^n\,(n)!}\,D^{(n-1)}\,(x^2-1)^n + P_{n-1}$$

III.- Eliminando $D^{(n-1)}\,(x^2-1)^n$ entre las dos igualdades se obtiene:

$$\frac{2n+1}{n}\,[\,P_{n+1} - x\,P_n\,] = \frac{(2n+1)}{2^n\,(n)!}\,D^{(n-1)}\,[\,(x^2-1)^n\,] = [\,P_{n+1} - P_{n-1}\,]$$

$$(n+1)\,P_{n+1} - (2n+1)\,x\,P_n + n\,P_{n-1} = 0$$

D₂.- Un segundo método para llegar a la primera formula de recurrencia es partir de desarrollar el polinomio $x\,P_n$ de orden $n+1$ en función de los mismos Polinomios de Legendre:

$$x\,P_n = c_{n+1}\,P_{n+1} + c_n\,P_n + c_{n-1}\,P_{n-1} + \ldots +$$

Multiplicando por P_q con $(q < n-1)$ e integrando en el intervalo $[-1\ 1]$

$$\int_{-1}^{1} x\,P_n\,P_q\,dx = c_q\int_{-1}^{1} (\,P_q\,)^2\,dx \qquad\qquad q = n-2\,,\ n-3\,,\ n-4\,,..,\ 0$$

La primera integral es nula porque: calculando la primitiva

$$2^n\,n!\,2^q\,q!\int 2\,x\,P_n\,P_q\,dx = \int D^{(n)}\,(x^2-1)^n\,D^{(q)}\,(x^2-1)^q\,d\,(x^2-1)$$

$$= D^{(n-1)}\,D^{(q)} + D^{(n-2)}\,D^{(q+1)} + D^{(n-3)}\,D^{(q+2)} + \ldots + D^{(n-q-1)}\,D^{(2q)}$$

se anula en los extremos del intervalo [–1 1] y por lo tanto

$$c_q \int_{-1}^{1} (P_q)^2 \, dx = 0$$

$c_q = 0$ $\qquad\qquad q = n-2 , n-3 , n-4 ,.., 0$

Queda

$$x P_n = c_{n+1} P_{n+1} + c_n P_n + c_{n-1} P_{n-1}$$

Los polinomios $x P_n$, P_{n+1} , P_{n-1} tienen la misma paridad, distinta de la paridad de P_n y por lo tanto

$c_n = 0$

$$x P_n = c_{n+1} P_{n+1} + c_{n-1} P_{n-1}$$

para x = 1

$$1 = c_{n+1} + c_{n-1}$$

igualando los coeficientes de x^{n+1} en los dos miembros

$$\frac{(2n)!}{2^n n! n!} = c_{n+1} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!(n+1)!}$$

$$c_{n+1} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(n+1)}{(2n+1)}$$

$$c_{n-1} = 1 - c_{n+1} = \frac{n}{(2n+1)}$$

Finalmente

$$\boldsymbol{(n+1) P_{n+1} - (2n+1) x P_n + n P_{n-1} = 0}$$

Ejercicio: Aplicar la fórmula de Olindo Rodrigues y la relación de recurrencia anterior para construir los polinomios P_0 ,P_1 , P_2 , P_3, P_4

$$P_0 (x) = \frac{1}{2^0 0!} D^{(0)} (x^2 - 1)^0 = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!} D^{(1)} (x^2 - 1)^1 = x$$

$2 P_2 = 3 x P_1 - P_0$ $\qquad P_2(x) = \frac{1}{2} (3 x^2 - 1)$

$3 P_3 = 5 x P_2 - 2P_1$ $\qquad P_3 (x) = \frac{1}{2} (5 x^3 - 3 x)$

$4 P_4 = 7 x P_1 - 3P_0$ $\qquad 4 P_4 = \frac{7}{2} x (5 x^3 - 3 x) - \frac{1}{2} (3 x^3 - x)$

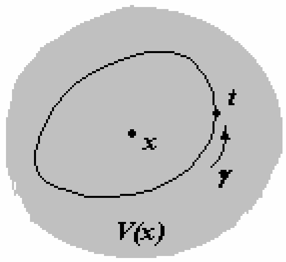
$$P_4 (x) = \frac{1}{8} (35 x^4 - 30 x^2 + 3x$$

6.2.- SEGUNDA FÓRMULA DE RECURRENCIA

T.- ***Def.*** $P_n(x)$ $\Rightarrow$ $(1-x^2)\,P'_n = (n+1)\,(x\,P_n - P_{n+1})$

D.- Para demostrar ésta segunda fórmula de recurrencia se puede aplicar la formula de Schlafli

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+2}}\,dt$$



La integral de la derivada con relación a ***t*** es ***(!!! Z !!! Ver Observación 1)***

$$0 = \frac{2(n+1)}{2^{n+1}}\,\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{t(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}\,dt - \frac{(n+2)}{2^{n+1}}\,\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+3}}\,dt$$

La primera Integral se desarrolla:

$$\oint_\gamma \frac{t(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}\,dt = \oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n(t-x+x)}{(t-x)^{n+2}}\,dt = \oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt + x\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}\,dt$$

queda entonces:

$$0 = \frac{(n+1)}{2^n}\,\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt + x\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}\,dt\right] - \frac{(n+2)}{2^{n+1}}\,\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+3}}\,dt$$

$$0 = (n+1)\,P_n + x\,P'_n - P'_{n+1}$$

si se integra esta expresión:

$$0 = (n+1)\int P_n + \int x\,P'_n - P_{n+1} - cte$$

$$0 = (n+1)\int P_n + x\,P_n - \int P_n - P_{n+1} - cte$$

$$n\int P_n + x\,P_n - P_{n+1} = cte$$

Por otra parte si se recuerda la Ecuación de Legendre

$$[(1-x^2)\,P'_n]' + n\,(n+1)\,P_n = 0$$

y se integra

$$(1-x^2)\,P'_n + n\,(n+1)\int P_n = cte$$

y en virtud de la relación anterior

$(1-x^2) P'_n - (n+1) [x P_n - P_{n+1}] = cte$

y teniendo en cuenta que $P_n(1) = P_{n+1}(1) = 1 \Rightarrow cte = 0$

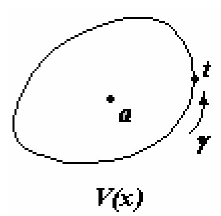
$\boldsymbol{(1-x^2) P'_n = (n+1) [x P_n - P_{n+1}]}$

Observación 1: ***(!!! Z !!!)*** La derivación respecto del parámetro t de integración, merece especial cuidado:

T.- $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (t-a)^n$

$\gamma \in$ Lazo Simple Frontera D

$a \in$ punto aislado Int(D) $\Rightarrow \oint_\gamma f'(t)\, dt = 0$



$$\oint_\gamma f(t)\, dt = 2\pi i\, R(a)$$

$$\oint_\gamma f(t)\, dt = \oint_\gamma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (t-a)^n\, dt$$

La integral de la derivada

$$\oint_\gamma f'(t)\, dt = \oint_\gamma \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} n\, a_n (t-a)^{n-1}\, dt$$

La serie derivada no tiene el término en $(t-a)^{-1}$ y por lo tanto es nula

$$\oint_\gamma f'(t)\, dt = 0$$

Observación 2: Esta igualdad también se puede obtener derivando con respecto a t

$$\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}$$

o también

$$\frac{t(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}$$

En particular resulta la Primera Ecuación de Recurrencia:

$\boldsymbol{(n+1) P_{n+1} - (2n+1) x P_n + n P_{n-1} = 0}$

6.3.- TERCERA FÓRMULA DE RECURRENCIA

Una tercera fórmula de recurrencia es

T.- ***Def.*** $\boldsymbol{P_n(x)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(2n+1)\, P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}}$

D.-

$$P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} D^{(n+2)} (x^2-1)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} D^{(n+1)} D[(x^2-1)^{n+1}]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} 2(n+1) D^{(n+1)} [(x^2-1)^n x]$$

$$= \frac{1}{2^n n!} D^{(n+1)} [x(x^2-1)^n]$$

$$= \frac{1}{2^n n!} D^{(n)} [(x^2-1)^n + 2n x^2 (x^2-1)^{n-1}]$$

$$= P_n(x) + 2n P_n(x) + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} D^{(n)} (x^2-1)^{n-1}$$

$$= P_n(x) + 2n P_n(x) + P'_{n-1}(x)$$

$\boldsymbol{(2n+1)\, P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}}$

7.- FUNCIÓN GENERATRIZ

7.1.- PRIMERA DEMOSTRACIÓN DE LA FUNCIÓN GENERATRIZ

La expresión de la Función Generatriz de los Polinomios de Legendre es

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \boldsymbol{P_n(x)\, h^n}$$

Los polinomios de Legendre tienen su origen histórico como coeficientes del desarrollo de la serie entera de la función:

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\, h^n$$

Debe probarse entonces que;

$a_n(x) = P_n(x)$

El desarrollo propuesto es posible si x y h son suficientemente pequeños

$$\frac{1}{(1-y)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!\, n!}\, y^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!}\, y^n = 1 + \frac{1}{2}\, y + \frac{3}{8}\, y^2 + \ldots + \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\, y^n + \ldots \qquad \text{con } |\, y \,| < 1$$

haciendo $y = 2xh - h^2$ con $|\, 2hx - h^2 \,| < 1$

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}\,(2xh - h^2) + \frac{3}{8}\,(2xh - h^2)^2 + \ldots + \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\,(2xh - h^2)^n + \ldots$$

Se hará un cambio de orden en el índice de sumación.

$$= 1 + x\,h + \left(\frac{3}{2}\, x^2 - \frac{1}{2}\right) h^2 + \left(\frac{5}{2}\, x^3 - \frac{3}{2}\, x\right) h^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, h^n$$

Observación 1: ***(!!!Z!!!)*** Este cambio de orden debe ser hecho con mucho cuidado porque no existen reglas generales para ello, y podría ser abusivo.

En las series dobles de potencias con respecto a (x, h) es condición suficiente la Convergencia Absoluta (CA) de la misma.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \in \text{CA} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty}$$

Para el análisis de la CA basta encontrar una Serie Mayorante de la forma

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n}\ x^p h^n \right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} | a_{p,n} | \, | x^p | \, | h^n |$$

que es convergente con la condición suficiente

$$| 2xh | + | h |^2 < 1$$

que es más estricta que la anterior

$$| 2xh | - | h |^2 < 1$$

Puede encontrarse una relación de recurrencia entre los coeficientes $a_n(x)$ derivando con respecto a h el desarrollo:

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\ h^n$$

$$\frac{x-h}{(1-2hx+h^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\ n\ h^{n-1}$$

$$(x - h) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\ h^n = (1 - 2xh + h^2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\ n\ h^{n-1}$$

identificando el coeficiente de h^n en ambos miembros de la igualdad lleva a la ecuación de recurrencia:

$$x\ a_n - a_{n-1} = (n+1)\ a_{n+1} - 2\ x\ n\ a_n + (n-1)\ a_{n-1}$$

$$(n+1)\ a_{n+1} - (2n+1)x\ a_n + n\ a_{n-1} = 0$$

que es la relación de recurrencia ya encontrada para los Polinomios de Legendre $P_n(x)$, y como

$$a_0(x) = 1 = P_0(x)$$

$$a_1(x) = x = P_1(x)$$

se implica

$$a_n(x) = P_n(x)$$

resulta la Función Generatriz

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\ h^n$$

Observación 2: Se pueden verificar fácilmente los primeros términos aplicando la Serie de Taylor

$$a_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} D^{(n)} \left[\frac{1}{(1-2hx+h^2)^{1/2}} \right] \Bigg|_{h=0}$$

7.2.- SEGUNDA DEMOSTRACIÓN DE LA FUNCIÓN GENERATRIZ

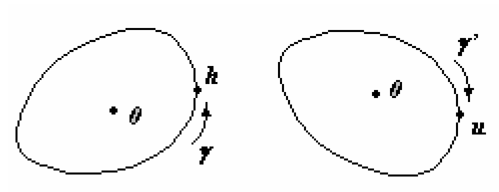
El desarrollo de la serie

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\, h^n$$

tiene por coeficiente

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{(1-2hx+h^2)^{1/2}} \frac{1}{h^{n+1}}\, dh$$

y cambiando de variable $h = 1/u$



$$a_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'-} \frac{u}{(1-2xu+u^2)^{1/2}} \frac{u^{n+1}}{u^2}\, du$$

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'+} \frac{u^n}{(1-2xu+u^2)^{1/2}}\, du$$

introduciendo otro cambio de variable $u \to t$

$$(1-2xu+u^2)^{1/2} = u - t$$

$$1 - 2xu + u^2 = u^2 - 2tu + t^2$$
$$u\, 2(t - x) = t^2 - 1$$

$$u = \frac{(t^2-1)}{2(t-x)}$$

$$du = \frac{t-u}{t-x}\, dt$$

En este cambio de variable el lazo γ' que encierra a O se transforma en el lazo γ'' que encierra a x. Se llega a

$$a_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma''} \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\, dt$$

aplicando Schlafli

$$a_n(x) = P_n(x)$$

8.- PROPIEDADES: SEGUNDA PARTE

8.1.- FORMACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE A PARTIR DE LA FÓRMULA DE OLINDO RODRIGUES

Los Polinomios de Legendre son una solución de un caso particular de la Ecuación de Legendre:

T.- $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n\, n!} D^{(n)} (x^2-1)^n \quad \Rightarrow \quad (1-x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + n(n+1)\, y = 0$ ***Forma canónica***

$\Rightarrow \quad [(1-x^2)\, y']' + n(n+1)\, y = 0$ ***Forma autoadjunta***

Partiendo de la formula de Olindo Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} D^{(n)} (x^2-1)^n$$

y llamando

$$w = (x^2-1)^n \quad \Rightarrow \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} D^{(n)}\, w$$

derivando w en forma logarítmica

$$\frac{w'}{w} = \frac{n2x}{(x^2-1)}$$

$$(x^2-1)\, w' - 2nx\, w = 0$$

derivando n+1 veces

$$(x^2-1)\, w^{(n+2)} + (n+1)\, 2x\, w^{(n+1)} + (n+1)n\, w^{(n)} - 2nx\, w^{(n+1)} - 2(n+1)n\, w^{(n)} = 0$$

$$(x^2-1)\, w^{(n+2)} + 2x\, w^{(n+1)} - (n+1)n\, w^{(n)} = 0$$

$$(x^2-1)\, [w^{(n)}]'' + 2x\, [w^{(n)}]' - (n+1)n\, [w^{(n)}] = 0$$

Resulta entonces $P_n(x)$ una integral particular de la llamada ecuación diferencial de Legendre (caso Particular)

$(1-x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + n(n+1)\, y = 0$ ***Forma canónica***

$[(1-x^2)\, y']' + n(n+1)\, y = 0$ ***Forma autoadjunta***

8.2.- FORMACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LEGENDRE A PARTIR DE LA FÓRMULA

DE SCHLAFLI

Sea I

$$I = \oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt \qquad = 2^n\ 2\pi\, i\ P_n(x)$$

$$I'_x = (n+1)\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}\,dt \qquad = 2^n\ 2\pi\, i\ P'_n(x)$$

$$I''_{xx} = (n+2)(n+1)\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+3}}\,dt \qquad = 2^n\ 2\pi\, i\ P''_n(x)$$

Se deberá verificar que I cumple:

$$(1-x^2)\, I'' - 2\,x\, I' + n(n+1)\, I = 0$$

reemplazando las expresiones obtenidas:

$$(1-x^2)\,(n+2)(n+1)\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+3}}\,dt\ -\ 2\,x\,(n+1)\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}\ + n(n+1)\oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt\ =$$

$$= \oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+3}}\ [\,(n+2)(n+1)(1-x^2) - 2x\,(n+1)\,(t-x) + (n+1)n\,(t-x)^2]\,dt =$$

$$= \oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+3}}\ (n+1)\,[\,(-(n+2)+2+n)\,x^2 + (-2t-2nt)\,x + (n+2) + n\,t^2\,] =$$

$$= \oint_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+3}}\ (n+1)\,[\,n\,t^2 - 2t\,(n+1)\,x + (n+2)\,] = 2\pi\, i\, R(x)$$

Siendo x un polo de orden n+3 el residuo será:

$$R(x) = \frac{(n+1)}{(n+2)!}\ D^{(n+2)}\{(t^2-1)^n\,[\,nt^2 - 2t(n+1)x + (n+2)\,]\,\}\Big|_x$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+2)!}\{\,[\,nt^2 - 2t(n+1)x + (n+2)\,]\,D^{(n+2)}(t^2-1)^n + (n+2)\,[\,2nt - 2(n+1)x\,]\,D^{(n+1)}(t^2-1)^n$$

$$+ \frac{1}{2}\ (n+2)(n+1)\,[\,2n\,]\,D^{(n)}\,(t^2-1)^n\,\}\Big|_x$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+2)!}\{\,[\,nx^2 - 2(n+1)x^2 + (n+2)\,]\,D^{(n+2)}(x^2-1)^n + (n+2)\,[\,2nx - 2(n+1)x\,]\,D^{(n+1)}(x^2-1)^n$$

$$+ \frac{1}{2}\ (n+2)(n+1)\,[\,2n\,]\,D^{(n)}\,(x^2-1)^n\,\}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)!}\ \{\,[1-x^2]\,D^{(n+2)}(x^2-1)^n + [-2x]\,D^{(n+1)}(x^2-1)^n + (n+1)\,n\,D^{(n)}\,(x^2-1)^n\,\}$$

$$R(x) = 2^n\ \{\,(1-x^2)\,P''_n(x)\ -2x\,P'_n(x) + (n+1)\,n\,P_n(x)\,\} = 0$$

siendo por lo tanto nulo el residuo $R(x) = 0$

9.- LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE COMO SISTEMA ORTOGONAL

9.1.- ORTOGONALIDAD

Los Polinomios de Legendre conforman un Sistema Ortogonal sobre el intervalo real $[-1,1]$ con respecto al núcleo $p(x) = 1$

Def $P_n \quad \Rightarrow \quad \{P_n(x)\} \in SOG/[-1,1]\ ;\ p(x) = 1$

$$P_m(x) \bullet P_n(x) = \int_{-1}^{1} P_m\ P_n = 0 \qquad m \neq n$$

Se plantea la Ecuación Diferencial de Legendre para los pares $(m\ P_m)$ y $(n\ P_n)$.

$$[\,(1-x^2)\,P'_m\,]' + (m+1)m\,P_m = 0 \qquad |\,*\,P_n$$

$$[\,(1-x^2)\,P'_n\,]' + (n+1)\,n\,P_n = 0 \qquad |\,*\,P_m$$

multiplicando las igualdades por P_n y P_m respectivamente se pueden restar miembro a miembro:

$$[\,(1-x^2)\,P'_m\,]'\,P_n - [\,(1-x^2)\,P'_n\,]'\,P_m + [(m+1)m - (n+1)n]\,P_m\,P_n = 0$$

Los dos primeros términos se pueden expresar como:

$$[\,(1-x^2)\,P'_m\,]'\,P_n - [\,(1-x^2)\,P'_n\,]'\,P_m =$$

$$= (1-x^2)\,P''_m\,P_n + (1-x^2)'\,P'_m\,P_n - (1-x^2)\,P''_n\,P_m - (1-x^2)'\,P'_n\,P_m$$

$$= (1-x^2)\,[\,P''_m\,P_n - P''_n\,P_m\,] + (1-x^2)'\,[P'_m\,P_n - P'_n\,P_m\,]$$

Definiendo el determinante W

$$W := \begin{pmatrix} P_n & P_m \\ P'_n & P'_m \end{pmatrix} \qquad \text{con } m \neq n$$

por lo tanto

$$W' = \begin{pmatrix} P_n & P_m \\ P''_n & P''_m \end{pmatrix}$$

se puede escribir entonces

$$[\,(1-x^2)\,P'_m\,]'\,P_n - [\,(1-x^2)\,P'_n\,]'\,P_m =$$

$$= (1-x^2)\,W' + (1-x^2)'\,W$$

$$= [\,(1-x^2)\,W\,]'$$

volviendo a la expresión original y reemplazando el último resultado queda

$$[\,(1-x^2)\,W\,]' + [(m+1)m - (n+1)n]\,P_m\,P_n = 0$$

integrando en $[-1\,,\,1]$

$[(m+1)m - (n+1)n] \int_{-1}^{1} P_m \; P_n = 0$

el primer corchete se anula para $m = n$ y $m = -(n+1)$, por lo tanto para valores naturales de m y n con $m \neq n$

$$\int_{-1}^{1} P_m \; P_n = 0$$

lo cual demuestra la ortogonalidad sobre el intervalo real $[-1,1]$ y con respecto al núcleo $p(x) = 1$.

9.2.- ORTOGONALIDAD EN GENERAL: MODELO DE STURM-LIOUVILLE

El teorema de Sturm-Liouville enuncia dos soluciones de una ED que cumpla con la forma definida en la Hipótesis 1 (Forma Autoadjunta de SL) y con Condiciones de Contorno establecidas en la Hipótesis 2, son ortogonales.

Teorema

H_1.- EDSL (Forma Autoadjunta)

$$(r\,y')' + (\lambda\, p + q)\, y = 0$$
$$r \;\; r'\, p \;\; q : R \to R$$
$$r'\, p \;\; q \in IR$$
$$p(x) \geq 0$$

H_2.- Condición de Contorno

$$(\lambda_1\; y_1) \in S$$
$$(\lambda_2\; y_2) \in S : \quad r\; W(\overline{y_2}\;\; y_1)\Big|_a^b = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_1 \quad \forall i \quad \lambda_i = \overline{\lambda_i} \qquad (\lambda_i \in R)$$
$$\Rightarrow \quad T_2 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad \Rightarrow \qquad y_1 \bullet y_2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad T_3 \quad y_1 \bullet y_2 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2$$

La Ecuación Diferencial de Legendre

$$[\,(1-x^2)\,y'\,]' + (\nu+1)\nu\, y = 0$$

satisface la primera hipótesis del teorema de Sturm - Liouville con:

$r = 1 - x^2$
$p = 1$
$q = 0$

y en cuanto a las condiciones de contorno puede hay varias que cumplen con Sturm-Liouville

W(a)=0 W(b)=0	W(a)=0 r(1)=0	r(–1)=0 W(b)=0	r(–1)=0 r(1)=0

De aquí entonces las Funciones de Legendre que satisfagan las condiciones anteriores son ortogonales.
Se recuerda sin embargo que las Funciones de Legendre, no Polinomios no son CV en V(1) y V(–1)

9.3.- NORMA

La Norma de los Polinomios de Legendre es

$$\boldsymbol{H.\text{- } Def\ \ P_n \quad \Rightarrow \quad \| P_n \|^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^{\,2}(x)\ dx = \frac{2}{2n+1}}$$

D**$_{1}$**.- Una forma de obtener la Norma es a partir del cuadrado de la Función Generatriz

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n^{\,2}(x)\, h^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0, m\neq n}^{+\infty} P_n(x)\, P_m(x)\ h^{n+m}$$

Integrando sobre el intervalo $[-1,1]$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(1-2hx+h^2)}\ dx &= \frac{1}{2h}\ L\,\frac{1+2h+h^2}{1-2h+h^2} \\ &= \frac{1}{h}\ L\,\frac{1+h}{1-h} \\ &= \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{h}\ \left(h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \ldots \right)\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado obtenido

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-1}^{+1} P_n^{\,2}(x)\ h^{2n}\ dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{2n}}{2n+1}$$

lleva a:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{\,2}(x)\ dx = \frac{2}{2n+1}$$

D**$_{2}$**.- Una segunda forma de obtener la Norma es:

Integrando por partes n veces se tiene:

$$\begin{aligned}\int u^{(n)}\, v\, dx &= u^{(n-1)}\, v - \int u^{(n-1)}\, v'\ dx \\ &= u^{(n-1)}\, v - u^{(n-2)}\, v' + \int u^{(n-2)}\, v''\ dx \\ &= u^{(n-1)}\, v - u^{(n-2)}\, v' + u^{(n-3)}\, v'' - u^{(n-4)}\, v^{(3)} + \ldots + (-1)^{n-2} u'\, v^{(n-2)} + (-1)^{n-1} u\, v^{(n-1)} + (-1)^n \int u\, v^{(n)}\ dx\end{aligned}$$

Por otro lado

$$(x^2-1)^n = (x-1)^n (x+1)^n \Big|_{-1}^{+1} = 0$$

$$p < n \quad \Rightarrow \quad D^{(p)}\,(x^2-1)^n = D^{(p)}\,(x-1)^n (x+1)^n \Big|_{-1}^{+1} = 0$$

$$\| P_n \|^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\ dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2^n\, n!} D^{(n)} (x^2-1)^n \ \frac{1}{2^n\, n!} D^{(n)} (x^2-1)^n \ dx$$

$$= \left(\frac{1}{2^n\, n!}\right)^2 \int_{-1}^{+1} D^{(n)} (x^2-1)^n \ D^{(n)} (x^2-1)^n \ dx$$

Aplicando los lemas anteriores

$$\| P_n \|^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\ dx = \left(\frac{1}{2^n\, n!}\right)^2 (-1)^n \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \ D^{(2n)} (x^2-1)^n \ dx$$

Como $D^{(2n)} (x^2-1)^n = (2n)!$

$$\| P_n \|^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\ dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} (-1)^n \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \ dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n \ dx$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n \ dx = 2 \int_{0}^{+1} (1-x^2)^n \ dx$$

$$= \xrightarrow{x=\sin\varphi} 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\varphi \ d\varphi = B\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\ \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{n!}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\ldots\frac{3}{2}\frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1}\, n!}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

de donde

$$\| P_n \|^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\ dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

9.4.- SISTEMA ORTONORMADO

Los Polinomios de Legendre ortonormalizados son entonces:

H.- Def $P_n \quad \Rightarrow \quad \left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\ P_n(x) \right\} \in SON/[-1,1]\ ;\ p(x) = 1$

Ejercicio 1: La ortogonalidad de los Polinomios de Legendre permite calcular fácilmente $\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,dx$ pues siendo $P_0 = 1$ uno de los Polinomios del Sistema Ortogonal

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,dx \xrightarrow{n=0} = 2$$

$$\xrightarrow{n>0} = 0$$

Ejercicio 2: Calcular

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(1-2rx+r^2)^{1/2}} \; \frac{1}{(1-2Rx+R^2)^{1/2}} \; dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-1}^{+1} P_n^2(x) \; (rR)^n \; dx$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(rR)^n}{2n+1}$$

$$= \frac{2}{(rR)^{1/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(rR)^{1/2}]^{2n+1}}{2n+1}$$

y en virtud del desarrollo conocido

$$L\frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

se obtiene:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(1-2rx+r^2)^{1/2}} \; \frac{1}{(1-2Rx+R^2)^{1/2}} \; dx = \frac{1}{(rR)^{1/2}} \; L\frac{1+(rR)^{1/2}}{1-(rR)^{1/2}}$$

10.- SERIES DE FOURIER-LEGENDRE

10.1.- SERIE ASOCIADA DE FOURIER-LEGENDRE

Sea f continua por partes en [–1 1]

$f \in CP/[-1\ 1]$

La Serie Asociada de Fourier-Legendre para dicha función se define como

$$f(x) \xrightarrow{\text{SAFL}} c_0\, P_0(x) + c_1\, P_1(x) + c_2\, P_2(x) + \dots + c_n\, P_n(x) + \ \dots$$

donde los coeficientes se toman en la definición como los obtenidos a partir de la expresión:

$$\int_{-1}^{+1} f\ P_n(x)\,dx = c_n \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx$$

$$= c_n\ \frac{2}{2n+1}$$

En resumen la Serie Asociada de Fourier-Legendre es por definición:

$$\boldsymbol{f(x) \xrightarrow{SAFL} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, P_n(x)\,.}$$

$$\boldsymbol{c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f\ P_n(x)\,dx}$$

10.2.- NÚCLEO DE FOURIER-LEGENDRE

Para el estudio de convergencia de las series de Fourier-Legendre es conveniente definir el Núcleo de Fourier-Legendre

Def. $\boldsymbol{K_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}\, P_k(t)\, P_k(x)}$

$\boldsymbol{K_n(t,x)}$ ***: Núcleo de Fourier-Legendre***

Como una de las propiedades del Núcleo puede calcularse el valor de la integral

$$\int_{-1}^{+1} K_n(t,x)\,dt = \int_{-1}^{+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}\, P_k(t)\, P_k(x)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}\, P_k(x) \int_{-1}^{+1} P_k(t)\,dt$$

por la ortogonalidad de $\{ P_k \}$ estas integrales son todas nulas salvo para $k = 0$, y además teniendo en cuenta que $P_0(x) = 1$

$$\int_{-1}^{+1} K_n(t,x)\,dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} 1\,dt = 1$$

10.3.- SUMA ENÉSIMA DE FOURIER-LEGENDRE

La Suma Enésima de la Serie Asociada de Fourier-Legendre es:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, P_k(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t)\, P_k(t)\, dt\right] P_k(x)$$

La Suma Enésima expresada en función del Núcleo es entonces:

$$\boldsymbol{S_n(x) = \int_{-1}^{+1} K_n(t,x)\; f(t)\; dt}$$

10.4.- IDENTIDAD DE DARBOUX-CHRISTOFFEL

Para el estudio de convergencia también se establece la fórmula de ***Darboux-Christoffel (D-C).***

$$\boldsymbol{(t-x) \sum_{k=0}^{n} (2k+1)\, P_k(t)\; P_k(x) = (n+1)\, [P_{n+1}(t)\; P_n(x) - P_{n+1}(x)\, P_n(t)\,]}$$

Ello se hace a partir de

$$(2k+1)\, x\, P_k(x) = (k+1)\, P_{k+1}(x) + k\, P_{k-1}(x)$$

$$(2k+1)\, x\, P_k(x)\, P_k(t) = (k+1)\, P_{k+1}(x)\, P_k(t) + k\, P_{k-1}(x)\, P_k(t)$$

$$(2k+1)\, t\, P_k(t)\, P_k(x) = (k+1)\, P_{k+1}(t)\, P_k(x) + k\, P_{k-1}(t)\, P_k(x)$$

$$(2k+1)\, (t-x)\, P_k(t)\, P_k(x) = (k+1)\, [\, P_{k+1}(t)\, P_k(x) - P_{k+1}(x)\, P_k(t)\,] + k\, [\, P_{k-1}(t)\, P_k(x) - P_{k-1}(x)\, P_k(t)\,]$$

se obtiene entonces la fórmula o identidad de D-C

$$(t-x) \sum_{k=0}^{n} (2k+1)\, P_k(t)\; P_k(x) = (n+1)\, [P_{n+1}(t)\; P_n(x) - P_{n+1}(x)\, P_n(t)\,]$$

10.5.- APLICACIÓN DE LA IDENTIDAD DE DARBOUX-CHRISTOFFEL

Una primera aplicación de la Identidad de Darboux-Christoffel es:

$$\boldsymbol{(n+1)\; \frac{P_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x} = P_n'(x) + P_{n+1}'(x)}$$

Como

$$(2n+1)\, P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$$

sumando

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)\, P_k(x) = P_0(x) + 3\, P_1(x) + 5\, P_2(x) + \ldots + (2n+1)\, P_n(x).$$

$$= 1+ [P_2' - P_0'] + [P_3' - P_1'] + [P_4' - P_2'] + [P_5' - P_3'] + \ldots + [P_{n-1}' - P_{n-3}'] + [P_n' - P_{n-2}'] + [P_{n+1}' - P_{n-1}']$$

$$= 1 - P_0' - P_1' + P_n' + P_{n+1}'$$

$$= P_n' + P_{n+1}'$$

la identidad D-C en particular para ***t = 1***

$$(1-x) \sum_{k=0}^{n} (2k+1)\, P_k(x) = (n+1)\, [\, P_n(x) - P_{n+1}(x)]$$

$$\boldsymbol{(n+1)\ \frac{P_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x} = P_n'(x) + P_{n+1}'(x)}$$

10.6.- ESTUDIO DEL NÚCLEO

Por medio de la identidad de Darboux-Christoffel se obtiene la siguiente expresión del Núcleo

$$\boldsymbol{K_n(t, x) = \frac{n+1}{2}\ \frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)}{t-x}}$$

Recordando la definición del Núcleo

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}\ P_k(t)\ P_k(x)$$

Aplicando la identidad de Darboux-Christoffel D-C

$$K_n(t, x) = \frac{n+1}{2}\ \frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)}{t-x}$$

10.7.- CONVERGENCIA

El teorema de Hobson da condiciones suficientes para la convergencia de la serie de Fourier-Legendre a f(x) El enunciado es el que sigue:

Teorema de Hobson

$$H_1\ \ \exists \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{(1-x)^2}\, dx$$

$$H_2\quad |f(x^{\pm})| < M \qquad x\in]-1\ 1[\qquad \Rightarrow \qquad S_n(x) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)}{t-x}\, f(t)\ dt$$

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\, [\, f(x^-) + f(x^+)\,]$$

$$H_2'\quad f \in \text{Lipschitz}/\ V(x) \qquad \Rightarrow \qquad S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

$$H_2''\quad f \in C \cup [\, |f(x^{\pm})| < M] \,/\, I_2 \supset I_1 \qquad \Rightarrow \qquad S_n(x) \xrightarrow{CU/I_1} f(x)$$

Partiendo de la expresión de la Suma Enésima

$$S_n(x) = \int_{-1}^{+1} K_n(t,x)\ f(t)\ dt$$

$$\boldsymbol{S_n(x) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)}{t-x}\ f(t)\ dt}$$

en particular si para la función constante $f(x) = 1$

$$\begin{aligned} f(x) = 1 \quad &\Rightarrow \quad S_n(x) = 1 \\ &\Rightarrow \quad S_n(x) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} S(x) = 1 \\ &\Rightarrow \quad S(x) = f(x) \end{aligned}$$

$$1 = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)}{t-x}\ dt$$

$$f(x_0) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x_0)\ \frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)}{t-x}\ dt$$

y también

$$S_n(x_0) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0) - P_{n+1}(x_0)P_n(t)}{t-x_0}\ f(t)\ dt$$

de donde

$$f(x_0) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0) - P_{n+1}(x_0)P_n(t)}{t-x_0}\ f(x_0)\ dt$$

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\ [P_{n+1}(t)\ P_n(x_0) - P_{n+1}(x_0)\ P_n(t)\ ]\ dt$$

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{n+1}{2}\ P_n(x_0) \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\ P_{n+1}(t)\ dt - \frac{n+1}{2}\ P_{n+1}(x_0) \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\ P_n(t)\ ]\ dt$$

Si se supone la existencia de las dos semiderivadas finitas entonces la función

$\dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} \in CP/[-1\ 1]$ es continua por partes

El paso siguiente es demostrar que la diferencia $S_n(x_0) - f(x_0)$ tiende a cero para n tendiendo a infinito.

I.- En primer lugar se ha visto previamente que:

$$|\ P_n(\cos\theta)\ | \le \sqrt{\frac{\pi}{2n\ \sin^2\theta}}$$

$$|\ P_n(\cos\theta)\ | \le \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\ \frac{1}{|\sin\theta|}$$

entonces

$$|\ P_n(x_0)\ | \le \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\ \frac{1}{|1-(x_0)^2|^{1/2}}$$

$$\frac{n+1}{2}\,|\,P_n(x_0)\,| \le \frac{n+1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\;\frac{1}{|1-(x_0)^2|^{1/2}}$$
$$\le \; M\; n^{1/2}$$

Esto acota $\frac{n+1}{2}\,|\,P_n(x_0)\,|$ con M independiente de x.

II.- En segundo lugar el coeficiente de Fourier de f en el Ortonormado $\{\frac{P_n}{\|P_n\|}\}$ es $c_n \|P_n\|$

Por el Teorema de la desigualdad de Bessel (Tesis de Bessel-Riemann)

$$c_n \|P_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

es decir

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\int_{-1}^{+1} f\,P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

o sea

$$n^{1/2}\int_{-1}^{+1} f\,P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

y entonces

$$|\,S_n(x_0) - f(x_0)\,| = \left|\,\frac{n+1}{2}\,P_n(x_0)\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\,P_{n+1}(t)\,dt - \frac{n+1}{2}\,P_{n+1}(x_0)\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\,P_n(t)\,]\,dt\,\right|$$

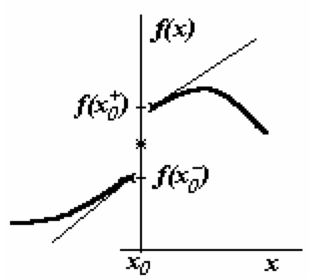
$$\le M\; n^{1/2}\;(\,|\,C_{n+1}\,| + |\,C_n\,|\,)$$

donde C_n son los coeficientes de la SAFL de la función $\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$. Entonces

$$\boldsymbol{S_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)} \qquad\qquad \boldsymbol{x\in\,]-1\;\;1[}$$

Si en particular x_0 es un punto de discontinuidad de primera especie con dos semiderivadas finitas

$$\boldsymbol{S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\,[\,f(x^-) + f(x^+)\,]}$$



Variantes de la H_2 son las siguientes con las cuales se puede demostrar

H₂' $\boldsymbol{f \in \text{Lipschitz}/\,V(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$

$$H_2'' \quad f \in C \cup [\, | f(x^{\pm}) | < M] \,/\, I_2 \supset I_1 \qquad \Rightarrow \qquad S_n(x) \xrightarrow{CU / I_1} f(x)$$

En resumen se ha demostrado el ***Teorema de Hobson*** que expresa:

$$H_1 \quad \exists \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{(1-x)^2}\, dx$$

$$H_2 \quad | f(x^{\pm}) | < M \qquad x \in]-1\ 1[\qquad \Rightarrow \qquad S_n(x) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)}{t-x}\, f(t)\, dt$$

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\,[\, f(x^-) + f(x^+) \,]$$

$$H_2' \quad f \in Lipschitz/\, V(x) \qquad \Rightarrow \qquad S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

$$H_2'' \quad f \in C \cup [\, | f(x^{\pm}) | < M] \,/\, I_2 \supset I_1 \qquad \Rightarrow \qquad S_n(x) \xrightarrow{CU / I_1} f(x)$$

10.8.- VALOR ASINTÓTICO DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

Se aplica un método para aproximar integrales del tipo

$$I(n) := \int_{\gamma} e^{n f(z)}\, dz$$

donde f es una función de variable compleja holomorfa en el vecinal de un punto z_0

$$f = P + i\,Q \in V(z_0)$$
$$z = x + i\,y$$

z_0 es un punto de ensilladura de la función P, o sea donde no existe ni máximo ni mínimo, pero se cumple

$f'(z_0) = 0$

si f(z) puede escribirse

$$\mathbf{f(z) = f(z_0) + \frac{f'(0)}{1!}\,(z - z_0) + \frac{f''(0)}{2!}\,(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,(z - z_0)^n + \ldots}$$

y como $f'(z_0) = 0$ entonces puede aproximarse

$$\mathbf{f(z) \cong f(z_0) + \frac{f''(0)}{2!}\,(z - z_0)^2}$$

resulta entonces

$$I(n) \cong e^{nf(z_0)} \int_{\gamma} e^{n\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2}\, dz$$

tomando

$z - z_0 = \lambda\, e^{i\theta}$

$dz = e^{i\theta}\, d\lambda$

de donde

$$| f''(z_0)\ (z - z_0)^2 | = \lambda^2\ | f''(z_0) |$$

$$\text{Arg}\,((z - z_0)^2) + \text{Arg}\,(f''(z_0)) = \pi$$

$$2\,\theta + \text{Arg}\,(f''(z_0)) = \pi$$

$$I(n) \cong e^{n[f(z_0)+i\theta]} \int_\gamma e^{-\lambda^2 \frac{1}{2} n|f''(z_0)|}\, d\lambda$$

$$I(n) \cong e^{n[f(z_0)+i\theta]} \sqrt{\frac{2\pi}{n\,|f''(z_0)|}}$$

Este resultado puede aplicarse a los Polinomios de Legendre para tener su valor asintótico. A partir de la representación de Laplace

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos\theta + i \sin\theta \cos\varphi)^n\, d\varphi$$

puede escribirse

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{nL(\cos\theta + i\sin\theta)}\, d\varphi$$

llamando

$$f(\varphi) = L(\cos\theta + i \sin\theta \cos\varphi) \qquad f(0) = L(e^{i\theta}) = i\theta$$

$$f'(\varphi) = \frac{-i\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(\varphi) = \frac{-i\sin\theta\cos\varphi(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi) - (i\sin\theta\sin\varphi)^2}{(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^2} \qquad f''(0) = \frac{-i\sin\theta}{e^{i\theta}}$$

entonces

$$I(n) \cong e^{2ni\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{n\,|\sin\theta|}}$$

11.- EJERCICIOS

Ejercicio 1.- ***Calcular*** $\int_0^1 P_n \, dx$

Para $n = 0$ $\quad \int_0^1 1 \, dx = 1$

Para $n > 0$ Recordando la tercera Ecuación de Recurrencia $(2n+1)\, P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$ e integrando

$$(2n+1) \int_0^1 P_n = \int_0^1 P'_{n+1} - \int_0^1 P'_{n-1} = P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)$$

Recordando $P_n(0) \xrightarrow{n=2k+1} P_{2k+1}(0) = 0$

$$\xrightarrow{n=2k} P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

$$(2n+1) \int_0^1 P_n = P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0) \xrightarrow{n=2k} = 0$$

$$\xrightarrow[n-1=2k]{n=2k+1} = P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)$$

$$= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} - (-1)^{k+1} \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}((k+1)!)^2}$$

$$= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} - (-1)^{k+1} \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}((k+1)!)^2}$$

$$= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \left[1 + \frac{(2k+2)(2k+1)}{4(k+1)^2}\right]$$

$$= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \left[1 + \frac{2k+1}{2(k+1)}\right]$$

$$= P_{2k}(0) \left[\frac{4k+3}{2k+2}\right]$$

En resumen dividiendo por $2n+1 = 4k+3$

$$\int_0^1 P_n \, dx \xrightarrow{n=0} = 1$$

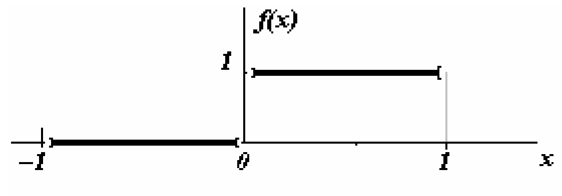
$$\xrightarrow{n=2k} = 0$$

$$\xrightarrow[n-1=2k]{n=2k+1} = P_{2k}(0) \left[\frac{1}{2k+2}\right]$$

Los primeros valores son

$\int_0^1 P_0$	$\int_0^1 P_1$	$\int_0^1 P_3$	$\int_0^1 P_5$	$\int_0^1 P_7$	$\int_0^1 P_9$
	$P_0(0)\ \frac{1}{2}$	$P_2(0)\ \frac{1}{4}$	$P_4(0)\ \frac{1}{6}$	$P_6(0)\ \frac{1}{8}$	$P_8(0)\ \frac{1}{10}$
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$\frac{7}{256}$

Ejercicio 2.- Desarrollar en Serie de Fourier-Legendre la función :



El coeficiente c_n será:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f\, P_n$$

$$n=0 \qquad c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f\ P_0 = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} 1\ dx = \frac{1}{2}$$

$$n>0 \qquad 2\, c_n = (2n+1) \int_{-1}^{1} f\ P_n = (2n+1) \int_{0}^{1} P_n\ dx = \int_{0}^{1} P'_{n+1} - \int_{0}^{1} P'_{n-1} = P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)$$

Recordando $P_n(0) \xrightarrow{n=2k+1} P_{2k+1}(0) = 0$

$$\xrightarrow{n=2k} P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

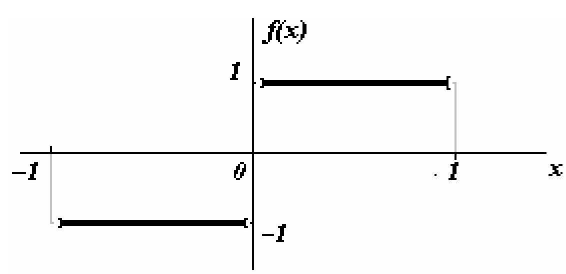
$$P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0) \xrightarrow{n=2k} = 0 \qquad \Rightarrow c_{2k} = 0$$

$$\xrightarrow[n-1=2k]{n=2k+1} = P_{2k}(0)\ [\frac{4k+3}{2k+2}] \quad \Rightarrow c_{2k+1} = P_{2k}(0)\ [\frac{4k+3}{4k+4}]$$

c_0	c_1	c_3	c_5	c_7	c_9
	$P_0(0)\ \frac{3}{4}$	$P_2(0)\ \frac{7}{8}$	$P_4(0)\ \frac{11}{12}$	$P_6(0)\ \frac{15}{16}$	$P_8(0)\ \frac{19}{20}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-7}{16}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{-75}{256}$	$\frac{133}{512}$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} P_1(x) + \frac{-7}{16} P_3(x) + \frac{11}{32} P_5(x) + \frac{-75}{256} P_7(x) + \frac{133}{512} P_9(x) + \ldots$$

Ejercicio 3: Desarrollar en Serie de Fourier-Legendre la función :



El desarrollo de Fourier-Legendre de f se puede obtener multiplicando la serie Ejercicio 2 por 2 y restando 1

$$f(x) = + \frac{3}{2} P_1(x) + \frac{-7}{8} P_3(x) + \frac{11}{16} P_5(x) + \frac{-75}{128} P_7(x) + \frac{133}{256} P_9(x) \ldots$$

Ejercicio 4.- Verificar a partir de la ED de Legendre que $\int_{-1}^{1} P_n \, dx = 0$ ***para n > 0***

Partiendo de la ED e integrando en [–1 1]

$[(1-x^2)\, y']' + n(n+1)\, y = 0$

$$(1-x^2)\, P'_n \Big|_{-1}^{1} = -n\,(n+1) \int_{-1}^{1} P_n$$

Para $n > 0$ $\quad \int_{-1}^{1} P_n = 0$

Obs: Siendo $P_0(x) = 1$ una de las funciones de la sucesión ortogonal $\{ P_n(x) \} / p(x) = 1$, $[-1\ 1]$ es inmediato que

$$\int_{-1}^{1} P_0\, P_n = \int_{-1}^{1} P_n = 0$$

Ejercicio 5.- Calcular $P'_n(0)$

Para $n = 0$ $\quad P'_0(0) = 0$

Para $n > 0$ una primera forma de calcular $P'_n(0)$ es a partir de la ED de Legendre

$[(1-x^2)\, y']' + n(n+1)\, y = 0$

Integrando en [0 1]

$$(1-x^2)\, P'_n \Big|_{0}^{1} = -n\,(n+1) \int_{0}^{1} P_n$$

$$-P'_n(0) = -n\,(n+1) \int_{0}^{1} P_n$$

$$P'_n(0) = n\,(n+1) \int_{0}^{1} P_n \, dx \xrightarrow{n=2k} = 0$$

$$\xrightarrow{n=2k+1} = P_{2k}(0)\,(2k+1)\,(2k+2)\,\left[\frac{1}{2k+2}\right] = P_{2k}(0)\,(2k+1)$$

Una segunda forma de calcular $P'_n(0)$ es a partir de la integral Schlafli

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\, dt$$

$$P'_n(x) = \frac{(n+1)}{2^n}\,\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}\, dt$$

$$P'_n(x) = \frac{(n+1)}{2^n}\; R\left(\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}, 0\right)$$

Para el calculo de este residuo en el caso de que n sea par $(n = 2k)$ el Desarrollo de Laurent de la función

$$\frac{(t^2-1)^n}{t^{n+2}}$$

solo existen potencias pares, por lo tanto

$P'_{2k}(0) = 0$

En el caso de que n sea impar $(n = 2k+1)$ debe calcularse el residuo de:

$$P'_{2k+1}(0) = \frac{(2k+2)}{2^{2k+1}} \quad R\left(\frac{(t^2-1)^{2k+1}}{t^{2k+3}} \; , 0 \right)$$

Buscando el residuo como coeficiente de 1/t

$$(t^2 - 1)^{2k+1} = \sum_{p=0}^{2k+1} C_{2k+1,\,p} \; t^{2p} \; (-1)^{2k+1-p}$$

El término correspondiente a

$p = k+1$ es $C_{2k+1,\,k+1}\, t^{2k+2}\, (-1)^k$

$$P'_{2k+1}(0) = \frac{(2k+2)}{2^{2k+1}} \quad C_{2k+1,\,k+1} \; (-1)^k$$

$$= \frac{(2k+2)}{2^{2k+1}} \quad \frac{(2k+1)!}{(k+1)!\,k!} \; (-1)^k$$

$$= (-1)^k \; \frac{(2k)!}{2^{2k}\; k!\,k!} \; (2k+1)$$

$$= P_{2k}(0)\; (2k+1)$$

Los primeros valores son

$P'_1(0)$	$P'_3(0)$	$P'_5(0)$	$P'_7(0)$	$P'_9(0)$
$P_0(0)$ 1	$P_2(0)$ 3	$P_4(0)$ 5	$P_6(0)$ 7	$P_8(0)$ 9
1	$\frac{-3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{-35}{16}$	$\frac{315}{128}$

Ejercicio 6.- ***Calcular*** $\int_0^1 x\, P_n \; dx$

Para n=0 $\quad \int_0^1 x \; 1 \; dx = \frac{1}{2}$

Para n>0 Recordando la primera Ecuación de Recurrencia $\quad (2n+1)\, x\, P_n = (n+1)\, P_{n+1} + n\, P_{n-1}$

$$(2n+1) \int_0^1 x\, P_n = (n+1) \int_0^1 P_{n+1} + n \int_0^1 P_{n-1}$$

Recordando $\int_0^1 P_n \, dx \xrightarrow{n=0} \; = 1$

$$\xrightarrow{n=2k} \; = 0$$

$$\xrightarrow{n=2k+1} \; = P_{2k}(0) \; \left[\frac{1}{2k+2} \right]$$

$$\int_0^1 x\, P_n = \xrightarrow{n=2k+1} \; = 0$$

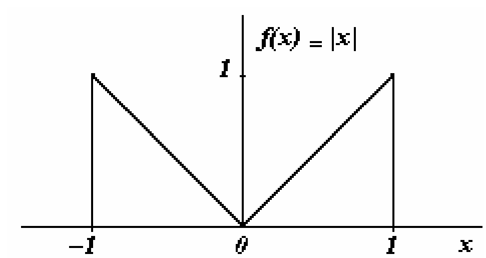
$$\xrightarrow{n=2k} \; = \int_0^1 x\, P_{2k} = \frac{1}{4k+1} \; \left[(2k+1) \int_0^1 P_{2k+1} + 2k \int_0^1 P_{2k-1} \right]$$

$$= \frac{1}{4k+1} \left[\frac{2k+1}{2k+2} \; P_{2k}(0) + P_{2k-2}(0) \right]$$

Los primeros valores son

$\int_0^1 x\, P_0$	$\int_0^1 x\, P_2$	$\int_0^1 x\, P_4$	$\int_0^1 x\, P_6$	$\int_0^1 x\, P_8$
	$\frac{1}{5}\,[\,\frac{3}{4}\,P_2(0)+P_0(0)]$	$\frac{1}{9}\,[\,\frac{5}{6}\,P_4(0)+P_2(0)]$	$\frac{1}{13}\,[\,\frac{7}{8}\,P_6(0)+P_4(0)]$	$\frac{1}{17}\,[\,\frac{9}{10}\,P_8(0)+P_6(0)]$
	$\frac{1}{5}\,[\,\frac{3}{4}\,\frac{(-1)}{2}+1]$	$\frac{1}{9}\,[\,\frac{5}{6}\,\frac{3}{8}+\frac{(-1)}{2}\,]$	$\frac{1}{13}\,[\,\frac{7}{8}\,\frac{(-5)}{16}+\frac{3}{8}\,]$	$\frac{1}{17}\,[\,\frac{9}{10}\,\frac{35}{128}+\frac{(-5)}{16}\,]$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{128}$	$-\frac{1}{256}$

Ejercicio 7.* *Desarrollar en Serie de Fourier-Legendre a la función $|\,x\,|$ en $x\in\,]-1\;\;1[$



El coeficiente c_n será:

$$c_n \;=\; \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} |\,x\,|\;P_n$$

n=0 $\qquad c_0 \;=\; \frac{1}{2}\;2\int_0^1 x\;dx \;=\; \frac{1}{2}$

n>0 $\qquad 2\,c_n = (2n+1)\int_{-1}^{1} |\,x\,|\,P_n = \xrightarrow{n=2k+1} = 0 \qquad \Rightarrow\;\; c_{2k+1} = 0$

$$\xrightarrow{n=2k} \;=\; (4k+1)\;2\int_0^1 x\;P_{2k}\;\;dx$$

$$\Rightarrow\;\; c_{2k} = \frac{2k+1}{2k+2}\;P_{2k}(0) \;+\; P_{2k-2}(0)$$

c_0	c_2	c_4	c_6	c_8
	$\frac{3}{4}\,P_2(0)+P_0(0)$	$\frac{5}{6}\,P_4(0)+P_2(0)$	$\frac{7}{8}\,P_6(0)+P_4(0)$	$\frac{9}{10}\,P_8(0)+P_6(0)$
	$[\,\frac{3}{4}\,\frac{(-1)}{2}+1]$	$[\,\frac{5}{6}\,\frac{3}{8}+\frac{(-1)}{2}\,]$	$[\,\frac{7}{8}\,\frac{(-5)}{16}+\frac{3}{8}\,]$	$[\,\frac{9}{10}\,\frac{35}{128}+\frac{(-5)}{16}\,]$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{13}{128}$	$-\frac{17}{256}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \;+\; \frac{5}{8}\;P_2\,(x) \;-\; \frac{3}{16}\;P_4\,(x) \;+\; \frac{13}{128}\;P_6\,(x) - \frac{17}{256}\;P_8\,(x) + \;\;\ldots$$

Ejercicio 8.- Calcular $\int_{-1}^{1} x^n P_k \, dx = 0$ ***para*** $n > 0$

I.- Para $n < k$ puede desarrollarse x^n en serie de Fourier-Legendre

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} c_i \, P_i(x)$$

por la ortogonalidad de los Polinomios de Legendre (todos son diferentes a P_k) se verifica que la integral es nula

$$\int_{-1}^{1} x^n P_k \, dx = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=0}^{n} c_i \, P_i(x)\right] P_k(x) \, dx = 0$$

II.- Para el caso de $n \geq k$ se recuerdan las siguientes fórmulas:

II.I) Integrando sucesivamente por partes se obtiene

$$\int u \, v^{(k)} = u \, v^{(k-1)} - u' \, v^{(k-2)} + u'' \, v^{(k-3)} - \ldots + (-1)^i u^{(i)} v^{(k-i-1)} + \ldots + (-1)^{k-1} u^{(k-1)} v + (-1)^k \int u^{(k)} v$$

II.II) Las derivadas de orden n-j con $0<j\leq n$ de la función $(x^2-1)^n$ se anulan en los puntos $x = 1$ y $x = -1$

$$D^{(n-j)} (x-1)^n (x+1)^n \Big|_{-1}^{1} = 0 \qquad 0 < j \leq n$$

Recordando que $n \geq k$ y que la integral que se quiere calcular es

$$\int_{-1}^{1} x^n P_k \, dx = \frac{1}{2^k k!} \int_{-1}^{1} x^n D^{(k)} (x^2-1)^n \, dx$$

Aplicando ahora I y II en la integral se obtiene

$$= \frac{(-1)^k}{2^k k!} \int_{-1}^{1} [D^{(k)} x^n] \, (x^2-1)^k \, dx$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{n!}{(n-k)!} \int_{-1}^{1} x^{n-k} \, (x^2-1)^k \, dx$$

Analizando la función integrando se observa que la paridad depende de x^{n-k}, por lo tanto

$$\int_{-1}^{1} x^n P_k \, dx \xrightarrow{(n-k)\in \text{Impar}} = 0$$

$$\xrightarrow{(n-k)\in \text{Par}} = 2 \int_{0}^{1} x^{n-k} \, (x^2-1)^k \, dx$$

Tomando la integral con $n-k \in$ Par, y haciendo $n-k = 2p$

$$\int_{-1}^{1} x^n P_k \, dx = \frac{(-1)^k C_{n,k}}{2^k} \, 2 \int_{0}^{1} x^{2p} \, (x^2-1)^k \, dx$$

resulta cambiando de variable $x = y^{1/2}$ una función B

$$\xrightarrow{x=y^{1/2}} = \frac{(-1)^k C_{n,k}}{2^k} \, 2 \int_{0}^{1} y^p \, (y-1)^k \, \frac{1}{2} \, y^{-1/2} \, dy$$

$$= \frac{C_{n,k}}{2^k} \int_{0}^{1} y^{p-1/2} \, (1-y)^k \, dy$$

$$= \frac{C_{n,k}}{2^k} \, B\left(p+\frac{1}{2}, k+1\right)$$

$$= \frac{C_{n,k}}{2^k} \quad \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(k+1)}{\Gamma(p+k+\frac{3}{2})}$$

Como por otra parte

$$\Gamma(p+k+3/2) = (p+k+1/2)\ (p+k-1+1/2)\ \ldots\ (p+1+1/2)\ (p+0+1/2)\ \ \Gamma(p+1/2)$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}}\ (2p+2k+1)\ (2p+2k-1)\ \ldots\ (2p+3)\ (2p+1)\ \Gamma\ (p+1/2)$$

Multiplicando y dividiendo por

$(2p+2k)\ (2p+2k\text{-}2)\ \ldots\ (2p+4)\ (2p+2)$

resulta

$$= \frac{1}{2^{k+1}} \quad \frac{(2p+2k+1)(2p+2k)(2p+2k-1)\ \ldots\ (2p+2)(2p+1)\Gamma(p+\frac{1}{2})}{2^k\,(p+k)(p+k-1)\ \ldots\ (p+2)(p+1)}$$

$$= \frac{1}{2^{2k+1}} \quad \frac{(2p+2k+1)!}{(2p)!} \quad \frac{p\,!}{(p+k)!}\,\Gamma\,(p+\frac{1}{2})$$

Volviendo a la integral

$$\int_{-1}^{1} x^n P_k\ dx = \frac{C_{n,k}}{2^k} \quad \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(k+1)}{\Gamma(p+k+\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{C_{n,k}}{2^k}\ 2^{2k+1} \quad \frac{(2p)!}{(2p+2k+1)!} \quad \frac{(p+k)\,!}{p\,!}\,\Gamma\,(k+1)$$

$$= 2^{k+1} \quad \frac{(n)!}{k!(n-k)!} \quad \frac{(2p)!}{(2p+2k+1)!} \quad \frac{(p+k)\,!}{p\,!} \quad k!$$

como $n-k = 2p$

$$= 2^{k+1} \quad \frac{n!}{(2p+2k+1)!} \quad \frac{(p+k)\,!}{p\,!}$$

$$= 2^{k+1} \quad \frac{n!}{(n+k+1)!} \quad \frac{(\frac{n+k}{2})\,!}{(\frac{n-k}{2})\,!}$$

Nótese que si (n-k) es par también (n+k) lo es.

En resumen

$$\int_{-1}^{1} x^n P_k\ dx \xrightarrow{n<k} = \ 0$$

$$\xrightarrow{n\geq k} \quad \xrightarrow{(n-k)\in \mathrm{Im\,par}} = \ 0$$

$$\xrightarrow{(n-k)\in \mathrm{Par}} = \ 2^{k+1} \quad \frac{n!}{(n+k+1)!} \quad \frac{(\frac{n+k}{2})\,!}{(\frac{n-k}{2})\,!}$$

En particular si $n = k$

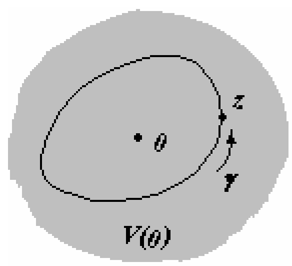
$$\int_{-1}^{1} x^n P_n\ dx \ = 2^{n+1} \ \frac{n!\,n!}{(2n+1)!}$$

Ejercicio 9 ***Calcular*** $\displaystyle\int_0^{\theta} \frac{\cos((2n+1)/2)\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}\,d\varphi$

Partiendo de la expresión

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{z^{n+1}(1-2zx+z^2)^{1/2}}\,dz$$

donde γ es un lazo en el vecinal de 0.



Eligiendo $x = \cos\theta$ $0 \le \theta \le \pi$

Las raíces del radicando son:

$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$

$z = \cos\theta \pm (\cos^2\theta - 1)^{1/2} = e^{\pm i\theta}$

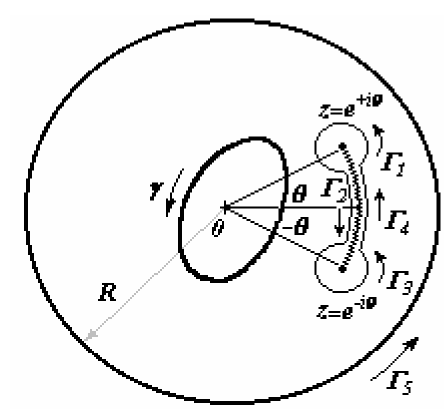
El radicando entonces puede expresarse:

$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = (z - e^{+i\theta})(z - e^{-i\theta})$

Por lo tanto

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{z^{n+1}[(z-e^{+i\theta})(z-e^{-i\theta})]^{1/2}}\,dz$$

La relación del integrando tiene dos puntos de ramificación en $z = e^{\pm i\theta}$ y puede uniformizarse con una cortadura entre los dos puntos. Tomando un arco de circunferencia de radio 1 como tal cortadura.



Llamando $\Gamma := \Gamma_1 \vee \Gamma_2 \vee \Gamma_3 \vee \Gamma_4$ se tiene por el corolario del teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma_5} = \int_{\gamma} + \int_{\Gamma}$$

Donde la integral sobre Γ_5 Γ_1 *y* Γ_3 son nulas porque:

Γ_5: $\varphi \in [0\ 2\pi]$ $\rightarrow$ $z = Re^{i\varphi}$

$$ML = \frac{2\pi R}{R^{n+1}\,|R^2 - 2R - 1|^{1/2}} \xrightarrow[n>0]{R\to+\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma_5} \xrightarrow[n>0]{R\to+\infty} 0$$

Γ_1: $\varphi \in [\alpha\ ;\ \alpha+2\pi]$ $\rightarrow$ $z - e^{+i\theta} = r_1\, e^{i\varphi}$ $\qquad \alpha = \theta - \pi/2$

$$ML = \frac{2\pi r_1}{|e^{i\theta} + r_1 e^{i\varphi}|^{n+1}\ r_1^{1/2}\ |e^{i\theta} + r_1 e^{i\varphi} - e^{-i\theta}|^{1/2}} \xrightarrow[n>0]{r_1\to 0} 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma_1} \xrightarrow[n>0]{r_1\to 0} 0$$

Γ_3: $\varphi \in [\alpha\ ;\ \alpha+2\pi]$ $\rightarrow$ $z - e^{-i\theta} = r_3\, e^{i\varphi}$ $\qquad \alpha = \pi/2 - \theta$

$$ML = \frac{2\pi r_3}{|e^{-i\theta} + r_3 e^{i\varphi}|^{n+1}\,|e^{-i\theta} + r_3 e^{i\varphi} - e^{+i\theta}|^{1/2}\ r_3^{1/2}} \xrightarrow[n>0]{r_3\to 0} 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma_3} \xrightarrow[n>0]{r_3\to 0} 0$$

Pasando al cálculo de las integrales sobre Γ_2 *y* Γ_4

Γ_2: $\varphi \in [\ \theta\ ;\ -\theta]$ $\rightarrow$ $z = 1\ e^{i\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{1}{z^{n+1}[(z - e^{+i\theta})(z - e^{-i\theta})]^{1/2}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\theta}^{-\theta} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi(n+1)}[(e^{i\varphi} - e^{+i\theta})(e^{i\varphi} - e^{-i\theta})]^{1/2}}\,d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{1}{e^{in\varphi}[(e^{i\varphi} - e^{+i\theta})(e^{i\varphi} - e^{-i\theta})]^{1/2}}\,d\varphi$$

Operando el denominador

$$\begin{aligned}(e^{i\varphi} - e^{+i\theta})\,(e^{i\varphi} - e^{-i\theta}) &= e^{i2\varphi} - e^{i\varphi}\,(e^{+i\theta} + e^{-i\theta}) + 1 \\ &= e^{i\varphi}\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) - e^{i\varphi}\,(e^{+i\theta} + e^{-i\theta}) \\ &= e^{i\varphi}\,(\,2\cos\varphi - 2\cos\theta\,)\end{aligned}$$

Reemplazando en la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{1}{e^{in\varphi}[2(\cos\varphi - \cos\theta)e^{i\varphi}]^{1/2}}\,d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{-i(n+1/2)\varphi}}{[2(\cos\varphi - \cos\theta)e^{i\varphi}]^{1/2}}\,d\varphi$$

Γ_4: $\varphi \in [\,-\theta\ ;\ \theta]$ $\rightarrow$ $z = 1\ e^{i\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_4} \frac{1}{z^{n+1}[(z - e^{+i\theta})(z - e^{-i\theta})]^{1/2}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi(n+1)}[(e^{i\varphi} - e^{+i\theta})(e^{i\varphi} - e^{-i\theta})(e^{i2\pi})]^{1/2}}\,d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{-i(n+1/2)\varphi}}{[2(\cos\varphi - \cos\theta)e^{i\varphi}]^{1/2}}\,d\varphi$$

Reemplazando en la igualdad

$$\int_{\Gamma_5} = \int_{\gamma} + \int_{\Gamma}$$

resulta

$$0 = P_n(\cos\theta) - 2\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{-i(n+1/2)\varphi}}{[2(\cos\varphi - \cos\theta)e^{i\varphi}]^{1/2}}\,d\varphi$$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{-i(n+1/2)\varphi}}{[2(\cos\varphi - \cos\theta)e^{i\varphi}]^{1/2}}\,d\varphi$$

Tomando la parte real de la igualdad y teniendo en cuenta la paridad del integrando

$$P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\theta} \frac{\cos((2n+1)/2)\varphi}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}}\,d\varphi$$

12.- APLICACIONES MATEMÁTICAS Y FÍSICAS DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

Los Polinomios de Legendre tienen una variada gama de aplicaciones. Se dan de ejemplo las siguientes:

12.1.- APLICACIONES MATEMÁTICAS

12.1.2.- ESTUDIO DE LAS RAÍCES DE $z - a - w\, f(z) = 0$

El planteo del problema es considerando la ecuación:

$$z - a - w\, f(z) = 0$$

donde f(z) es una función Holomorfa en el vecinal de a V(a) y el parámetro w es complejo.

Si $w = 0$ la única raíz de la ecuación es evidentemente $z = a$

Se trata de encontrar la o las raíces que tienden hacia a cuando $w \to 0$ (es decir en V(a))

Se probara que existe una raíz única z_1 de acuerdo a la proposición

f ∈H/V(a)

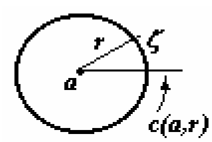
w ∈ C
z – a – w f(z) = 0 $\Rightarrow$ ***Existe en V(a) una única raíz de la ecuación: z_1***

$$z_1 = a + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} D^{(n-1)} [f(\zeta)]^n \Big|_{\zeta = a}$$

Si $| \zeta - a | > | w | \, | f(\zeta) |$

se puede aplicar el teorema de Rouche (Ver Nota 1) y la fórmula de Lagrange (Ver Nota 2) en consecuencia hay una y solo una raíz z_1 dada por:

$$z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c(a,r)} \zeta \, \frac{1 - w f'(\zeta)}{\zeta - a - w f(\zeta)} \, d\zeta$$



integral que se resuelve por la fórmula de Lagrange (Ver Nota 2)

$$z_1 = a + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} D^{(n-1)} [f(\zeta)]^n \Big|_{\zeta = a}$$

y además se cumple:

$$\frac{dz_1}{da} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} D^{(n)} [f(\zeta)]^n \Big|_{\zeta = a}$$

Ejemplo: Como ejemplo de aplicación de este resultado, sea:

$(1 - 2aw + w^2)^{1/2} = 1 - z\,w$

de donde

$1 - 2aw + w^2 = 1 - 2z\,w + z^2 w^2$

que lleva a una ecuación del tipo del enunciado:

$$z - a - w\,\frac{1}{2}(z^2 - 1) = 0$$

Por lo tanto

Si $w = 0$ la única raíz es $z = a$

Si $w \neq 0$ la formula de Lagrange da en un determinado Vecinal de a: V(a) a la única raíz z_1

$$z_1 = a + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} D^{(n-1)} \left[\frac{1}{2}(\zeta^2 - 1)\right]^n \Bigg|_{\zeta = a}$$

$$\frac{dz_1}{da} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} D^{(n)} \left[\frac{1}{2}(\zeta^2 - 1)\right]^n \Bigg|_{\zeta = a}$$

que es la Función Generatriz de los Polinomios de Legendre

$$\frac{dz_1}{da} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2aw + w^2}}$$

Para integrar esta expresión basta tomar

$$z = \frac{1}{w}\left[1 \pm \sqrt{1 - 2aw + w^2}\right]$$

Debe elegirse la determinación de la raíz que para $w \to 0 \Rightarrow z \to a$. Aplicando L´Hospitale

$$\frac{1}{w}\left[1 \pm \sqrt{1 - 2aw + w^2}\right] \xrightarrow[\substack{w \to 0 \\ L'H}]{} \frac{-2a + 2w}{\pm 2\sqrt{1 - 2aw + w^2}} \xrightarrow[w \to 0]{} \mp a$$

Para el signo positivo el límite es $-a$. Por lo tanto corresponde elegir el signo negativo: $w \to 0 \Rightarrow$ signo $-$

$$z = \frac{1}{w}\left[1 - \sqrt{1 - 2aw + w^2}\right]$$

y derivando

$$\frac{dz}{da} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2aw + w^2}}$$

finalmente entonces la raíz buscada es

$$z_1 = \frac{1}{w}\left[1 - \sqrt{1 - 2aw + w^2}\right]$$

Nota 1: El teorema de Rouche mencionado es

Teorema de Rouche

$f, g \in H/D$
$f, g \in C/FR(D)$
$z \in FR(D) \Rightarrow |f| > |g$ $\Rightarrow$ f y $f+g$ tienen el mismo numero de raíces en D

I.- f+g no puede tener raíces sobre Fr(D) pues si z_1 fuera raíz entonces:

$z_1 \in$ Fr(D) $f(z_1) + g(z_1) = 0$

$$f(z_1) = -g(z_1)$$

lo cual implica

$|f| = |g|$

contra la Hipótesis

$z \in$ Fr(D) $\Rightarrow$ $|f| > |g|$

II.- Si $0 \le \lambda \le 1$ $f + \lambda g$ no puede tener raíces sobre Fr(D) porque:

$z_1 \in$ Fr(D) $f(z_1) + \lambda g(z_1) = 0$

$$f(z_1) = -\lambda g(z_1)$$

lo cual implica

$|f(z_1)| > \lambda |g(z_1)|$

contra la Hipótesis

$z \in$ Fr(D) $\Rightarrow$ $|f| > |g|$

III.- Sea $n(\lambda)$ el numero de raíces de $f + \lambda g$ en D entonces sobre Fr(D) $f(z) + \lambda g(z) \neq 0$

Por lo tanto por el Teorema de la derivada logarítmica

$$n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Fr(D)} \frac{f'(z)+\lambda g'(z)}{f(z)+\lambda g(z)} \, dz$$

bajo el signo integrando se tiene una función continua de λ, por lo tanto $n(\lambda)$ también es continua. Por otra parte $n(\lambda)$ es un entero, y en consecuencia es constante:

$n(0) = n(\lambda) = n(1)$

Nota 2: La formula de Lagrange se obtiene de la siguiente manera:

$$z_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \zeta \ \frac{1-wf'(\zeta)}{\zeta-a-wf(\zeta)}\, d\zeta$$

$$z_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \frac{\zeta}{\zeta-a}\ (1-w\,f'(\zeta))[\,1+\frac{wf}{(\zeta-a)}+\frac{w^2f^2}{(\zeta-a)^2}+\ldots+\frac{w^nf^n}{(\zeta-a)^n}+\ldots]\ \ d\zeta$$

donde

$$(1-w\,f'(\zeta))[\,1+\frac{wf}{(\zeta-a)}+\frac{w^2f^2}{(\zeta-a)^2}+\ldots+\frac{w^nf^n}{(\zeta-a)^n}+\ldots] =$$

$$= 1 + w\,[\frac{f}{(\zeta-a)}-f'\,] + w^2\,[\frac{f^2}{(\zeta-a)^2}-\frac{f\,f'}{(\zeta-a)}] + \ldots + w^n\,[\frac{f^n}{(\zeta-a)^n}-\frac{f^{n-1}f'}{(\zeta-a)^{n-1}}] + \ldots$$

Calculando las integrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \frac{\zeta}{\zeta-a}\, d\zeta = a$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \frac{\zeta\ f^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{n!}\ D^{(n)}[\,\zeta\, f^n\,]\ \Big|_{\zeta=a}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \frac{\zeta\ f^{n-1}f'}{(\zeta-a)^n}\, d\zeta = \frac{1}{(n-1)!}\ D^{(n-1)}[\,\zeta\, f^{n-1}\, f'\,]\ \Big|_{\zeta=a}$$

Restando las dos últimas integrales.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \frac{\zeta\ f^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta \ -\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \frac{\zeta\ f^{n-1}f'}{(\zeta-a)^n}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{n!}\ D^{(n)}[\,\zeta\, f^n\,]\ \Big|_{\zeta=a} - \frac{1}{(n-1)!}\ D^{(n-1)}[\,\zeta\, f^{n-1}\, f'\,]\ \Big|_{\zeta=a}$$

$$= \frac{1}{n!}\ [\,D^{(n)}[\,\zeta\, f^n\,] - n\, D^{(n-1)}[\,\zeta\, f^{n-1}\ f'\,]\ \Big|_{\zeta=a}$$

$$= \frac{1}{n!}\ D^{(n-1)}\ \{[\,\zeta\, f^n\,]' - n\,[\,\zeta\, f^{n-1}\ f'\,]\,\}\ \Big|_{\zeta=a}$$

$$= \frac{1}{n!}\ D^{(n-1)}[\,f^n\,]\ \Big|_{\zeta=a}$$

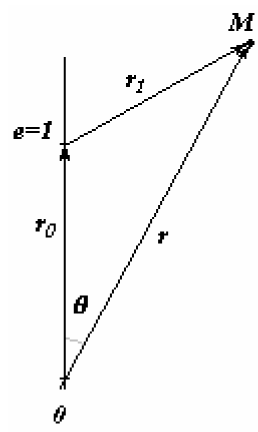
Entonces

$$z_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \zeta\ \frac{1-wf'(\zeta)}{\zeta-a-wf(\zeta)}\, d\zeta = a + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}\ D^{(n-1)}[\,f^n(\zeta)]\ \Big|_{\zeta=a}$$

12.2.2.- APLICACIONES A LA ELECTROSTÁTICA

12.2.2.1.- POTENCIAL DE UN CAMPO ELÈCTRICO GENERADO POR UNA CARGA PUNTUAL

Sea una carga puntual unitaria situada en el punto con coordenadas esféricas $(0,0, r_0)$



e: = carga eléctrica

El problema consiste en encontrar la expresión del potencial en un punto de coordenadas $M=(r,\varphi,\theta)$.

Como $V = \dfrac{e}{r_1}$

entonces siendo e=1

$$V = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{r_0^{\,2} + r^2 - 2 r_0 r \cos\theta}}$$

Para desarrollar esta función se presentan dos posibilidades $r > r_0$ o $r < r_0$

$$V \xrightarrow{r>r_0} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^{\,2}}{r^2} - 2\frac{r_0}{r}\cos\theta}}$$

$$\xrightarrow{r<r_0} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r_0^{\,2}} - 2\frac{r}{r_0}\cos\theta}}$$

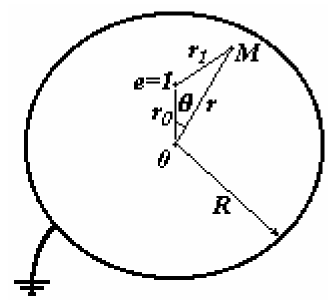
aplicando ahora la Función Generatriz de los Polinomios de Legendre la expresión del potencial es:

$$V \xrightarrow{r>r_0} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

$$\xrightarrow{r<r_0} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

12.2.2.2.- POTENCIAL DE UN CAMPO ELÈCTRICO GENERADO POR UNA CARGA PUNTUAL EN EL INTERIOR DE UNA ESFERA PUESTA A TIERRA

Sea una carga e interior a una superficie esférica de metal, puesta a tierra, es decir a potencial cero.



Sea $V(r,\theta)$ el potencial buscado, puede expresarse como la suma del potencial generado por la carga puntual e y otro potencial $u(r,\theta)$:

$$V(r, \theta) = \frac{e}{r_1} + u(r,\theta)$$

donde $u(r,\theta)$ desarrollado en Serie de Polinomios de Legendre

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \, r^n \, P_n(\cos\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

De acuerdo al planteo del problema el potencial sobre la esfera es nulo

$$V(R,\theta) = 0$$

El potencial generado por la carga puntual e sobre la superficie esférica es, teniendo en cuenta que $r>r_0$ (Ver problema anterior del potencial de un campo eléctrico generado por una carga puntual)

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

por lo tanto sobre la esfera

$$\frac{e}{R} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \, P_n(\cos\theta) = 0$$

de donde se extrae la expresión de los coeficientes c_n

$$c_n = -\left(\frac{r_0}{R}\right)^n \frac{e}{R}$$

la solución del problema planteado es entonces

$$V(r, \theta) = \frac{e}{r_1} + u(r,\theta)$$

$$V(r, \theta) = \frac{e}{r_1} - e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_0{}^n r^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos\theta)$$

$$V(r, \theta) = e \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_0{}^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_0{}^n r^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos\theta) \right]$$

También puede obtenerse la densidad superficial sobre la esfera

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r = R}$$

el primer termino del potencial para derivar es

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_0{}^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

por lo tanto

$$\frac{\partial(1/r_1)}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{r_0{}^n}{r^{n+2}} P_n(\cos\theta)$$

su valor para r = R es

$$\left.\frac{\partial(1/r_1)}{\partial r}\right|_{r = R} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{r_0{}^n}{R^{n+2}} P_n(\cos\theta)$$

además la derivada del segundo término

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{r_0{}^n r^{n-1}}{R^{2n+1}} P_n(\cos\theta)$$

su valor para r = R es

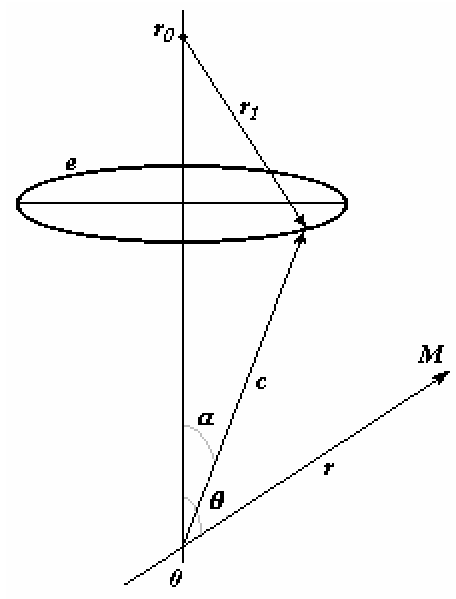
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r = R} = -\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{r_0{}^n}{R^{n+2}} P_n(\cos\theta)$$

sumando los resultados la densidad superficial es

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r = R} = \frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \frac{r_0{}^n}{R^{n+2}} P_n(\cos\theta)$$

12.2.2.3.- POTENCIAL DE UN CAMPO ELECTRICO GENERADO POR UN ANILLO CIRCULAR

Sea un anillo circular de carga e



$$V(r_0, \theta) = \frac{e}{r_1} \xrightarrow{c<r_0} \frac{e}{r_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{r_0}\right)^n P_n(\cos\alpha)$$

$$\xrightarrow{c>r_0} \frac{e}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r_0}{c}\right)^n P_n(\cos\alpha)$$

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n\, r^n\, P_n(\cos\theta) \xrightarrow{c<r_0} \frac{e}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(\cos\theta)\, P_n(\cos\alpha)$$

$$\xrightarrow{c>r_0} \frac{e}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta)\, P_n(\cos\alpha)$$

12.2.3.- ECUACION DE LAPLACE EN COORDENADAS ESFÉRICAS

1.- Problema de Dirichlet

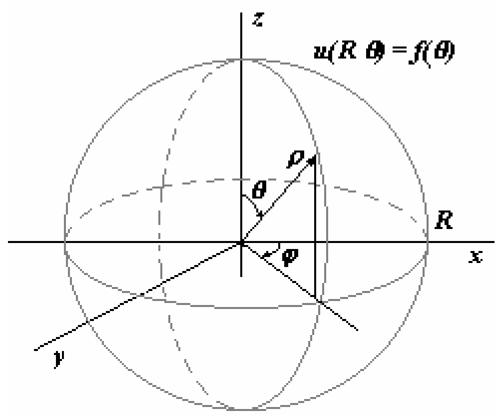
1.1.- Ecuación del potencial $\nabla^2 u = 0$

Esfera de radio R

Simetría axial

Potencial $u(R\ \theta) = f(\theta)$

$|u| < M$



$$\nabla^2 u := \mathrm{DIV}(\mathrm{GRAD}(u)) = \frac{1}{\rho^2 \sin(\theta)}\left[\frac{\partial \rho^2 \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial u}{\partial \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}}{\partial \theta}\right] = 0$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{\rho^2 \sin(\theta)}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

$$\text{Simetría axial} := \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{\rho^2 \sin(\theta)}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

Aplicando el método de separación de variables de Fourier

$u = P(\rho)\ \Theta(\theta)$

$$\frac{\nabla^2 u}{u} = \frac{P''}{P} + \frac{2}{\rho}\frac{P'}{P} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{1}{\rho^2}\operatorname{cotg}(\theta)\frac{\Theta'}{\Theta} = 0$$

$$\rho^2\left[\frac{P''}{P} + \frac{2}{\rho}\frac{P'}{P}\right] = -\frac{\Theta''}{\Theta} - \operatorname{cotg}(\theta)\frac{\Theta'}{\Theta} = \lambda$$

queda el sistema de dos ecuaciones en derivadas totales

$$\begin{cases} P'' + \dfrac{2}{\rho}P' - \dfrac{\lambda}{\rho^2}P = 0 & \text{Euler} \\ \Theta'' + \cot g(\theta)\Theta' + \lambda\Theta = 0 & \text{Legendre modificada} \end{cases}$$

La segunda ecuación (de Legendre) tiene por solución

$$\Theta(\theta) = A\ y_1(\cos(\theta)\ ,\ \alpha) + B\ y_2(\alpha \cos(\theta)\ ,\ \alpha)$$

donde

$$\alpha = -\ \frac{1}{2}\ \pm\ \sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}$$

La solución es finita solamente para $\lambda = n(n+1)$ en ese caso queda los Polinomios y las funciones de Legendre

$$\Theta(\theta) = A\ P_n(\cos(\theta)) + B\ Q_n(\cos(\theta))$$

donde $B = 0$ para que la solución sea finita

$$\Theta(\theta) = A\ P_n\,(\cos(\theta))$$

La solución de

$$P'' + \frac{2}{\rho}\ P' - \frac{\lambda}{\rho^2}\ P = 0$$

$$P'' + \frac{2}{\rho}\ P' - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\ P = 0$$

es

$$P(\rho) = C\ \rho^n + D\rho^{-(n+1)}$$

donde $D=0$ para que la solución sea finita

$$P(\rho) = C\ \rho^n$$

Queda

$$u(\rho\ \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\ E_n\ \rho^n\ P_n(\cos(\theta))$$

La condición de contorno que se debe cumplir es:

$$u(R\ \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\ E_n\ R^n\ P_n(\cos(\theta))\ = f(\theta)$$

Si $f(\theta)\ \in\ CP/\ [0,\pi]$ es decir con $x = \cos(\theta)$ $f(x)\in CP/\ [-1,1]$

$$f(\ \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\ c_n\ \ P_n(\cos(\theta))$$

$$c_n\ =\ \frac{2n+1}{2}\ \int_{-1}^{+1} f\,(t)\ P_n(t)\ \ dt$$

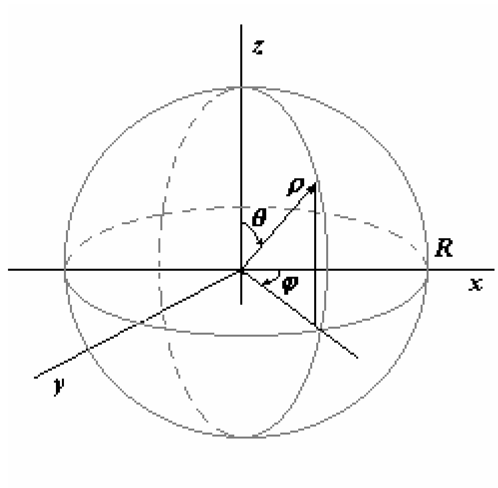
$$E_n\ R^n = c_n$$

$$u(\rho\ \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\ c_n\ \left(\frac{\rho}{R}\right)^n\ \ P_n(\cos(\theta))$$

1.2.-
Ecuación del potencial $\nabla^2 u = 0$
Esfera de radio R

Simetría axial

Potencial $u(R\ \theta) = 1 + \cos(\theta)$
$| u | < M$



Aplicando la solución general el problema de Dirichlet obtenido

$$u(\rho\ \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n\, \rho^n\, P_n(\cos(\theta))$$

La condición de contorno que se debe cumplir es:

$$u(R\ \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n\, R^n\, P_n(\cos(\theta)) = 1 + \cos(\theta)$$

Como $P_0 = 1$ y $P_1 = \cos(\theta)$ queda

$$u(R\ \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n\, R^n\, P_n(\cos(\theta)) = P_0 + P_1$$

$E_0 = 1$

$E_1\, R = 1$

$$u(\rho\ \theta) = 1 + \frac{\rho}{R} \cos(\theta)$$

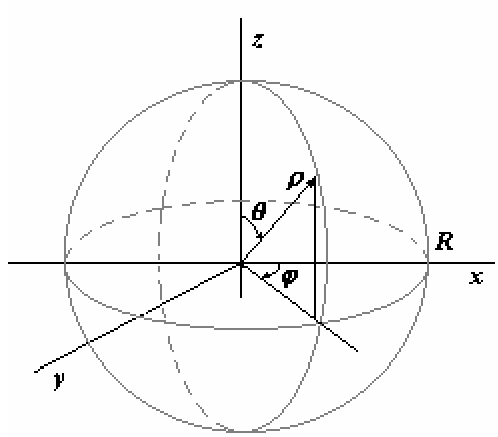
1.3.- Ecuación del potencial $\nabla^2 u = 0$

Esfera de radio R

Simetría axial

Potencial $u(R\ \theta) = \begin{cases} V_1 & \theta \in [0,\pi/2] \\ V_2 & \theta \in [\pi/2,\pi] \end{cases}$

$|u| < M$



Aplicando la solución general obtenida en 4.1. el resultado obtenido en el caso genérico.

$$u(\rho\ \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n\, \rho^n\, P_n(\cos(\theta))$$

La condición de contorno que se debe cumplir es:

$$u(R\ \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n\, R^n\, P_n(\cos(\theta))$$

Si $f(\theta) \in CP/\ [0,\pi 1]$ es decir con $x = \cos(\theta)$ $f(x) \in CP/\ [-1,1]$

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\ P_n(\cos(\theta))$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, P_n(x)\ dx$$

$$E_n R^n = c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, P_n(x)\ dx \xrightarrow{n=0} c_0 = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{n=2k} c_{2k} = \frac{1}{2}(P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)) = 0$$

$$\xrightarrow[n-1=2k]{n=2k+1} c_{2k+1} = \frac{1}{2}(P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)) = \frac{1}{2} P_{2k}(0)\ [\frac{4k+3}{2k+2}]$$

$$u(\rho\ \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\ (\frac{\rho}{R})^n\ P_n(\cos(\theta))$$

$$u(\rho\ \theta) = V_2\ +\ \frac{1}{2}\,(\ V_1 - V_2)\ [\ 1 + \sum_{k=0}^{+\infty}\ P_{2k}(0)\ \ [\frac{4k+3}{2k+2}]\ \ (\frac{\rho}{R})^{2k+1}\ P_{2k+1}(\cos(\theta))\ \ ]$$

$$u(\rho\ \theta) = \frac{1}{2}\,(V_1 + V_2) +\ \frac{1}{2}\,(\ V_1 - V_2)\ [\ \sum_{k=0}^{+\infty}\ P_{2k}(0)\ \ [\frac{4k+3}{2k+2}]\ \ (\frac{\rho}{R})^{2k+1}\ P_{2k+1}(\cos(\theta))\ \ ]$$

$$u(\rho\ \theta) = \frac{1}{2}\,(V_1 + V_2) +\ \frac{1}{2}\,(\ V_1 - V_2)\ [\,\frac{3}{2}\ (\frac{\rho}{R})\ \ P_1(\cos(\theta)) - \frac{7}{8}\ (\frac{\rho}{R})^3\ P_3(\cos(\theta)) + \frac{11}{16}\ (\frac{\rho}{R})^5\ P_5(\cos(\theta))\ -$$

$$- \frac{75}{128}\ (\frac{\rho}{R})^7\ P_7(\cos(\theta)) +.\ \frac{133}{256}\ (\frac{\rho}{R})^9\ P_9(\cos(\theta)) + \dots\ ]$$

APÉNDICE I

El estudio de los Polinomios de Legendre en V(1) hace más facil encontrar la Segunda forma de los mismos y la Tercera Representación, que es a de Olindo Rodrigues. A partir de la ecuación de Recurrencia del método de Fuchs en el V(0) se puede tener directamente una Cuarta forma de los Polinomios de Legendre y de ella deducir la fórmula de Olindo Rodrigues.

3.2.3.- CUARTA EXPRESIÓN DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

Si se analiza la Ecuación de Recurrencia obtenida por Fuchs para el caso de los Polinomios de Legendre se tiene en los casos:

I.- Si $\boldsymbol{\nu = n}$ es Natural e Impar el Polinomio de orden $\boldsymbol{n}$ cumple:

$$C_k = \frac{C_{k-2}\,(r+k-2-\nu)\,(r+k-1+\nu)}{(r+k)(r+k-1)}$$

$$C_k = \frac{C_{k-2}\,(-1)\,(n+1-k)\,(n+k)}{(k+1)\;k}$$

$$C_{k-2} = \frac{C_k\;(-1)\,(k+1)\,k}{(n+1-k)\,(n+k)}$$

Como $k \in <0..n-1>$ entonces para $k = n-1$ se tiene la relación entre C_n y C_{n-2}

$$C_{n-2} = \frac{C_n\,(-1)\;(n-1+1)\,(n-1)}{(n+1-(n-1))\,(n+n-1))}$$

$$C_{n-2} = \frac{C_n\,(-1)\;n\,(n-1)}{2\,(2n-1)}$$

Asimismo para $k = n-3$ se puede calcular tiene C_{n-4}

$$C_{n-4} = \frac{C_{n-2}\,(-1)\;(n-2)\,(n-3)}{4\,(2n-3)}$$

y así en forma sucesiva y decreciente pueden obtenerse los coeficientes de los Polinomios de Legendre de orden Impar.

II.- Si $\boldsymbol{\nu = n}$ es Natural y Par el Polinomio de orden $\boldsymbol{n}$ cumple:

$$C_k = \frac{C_{k-2}\,(r+k-2-\nu)\,(r+k-1+\nu)}{(r+k)(r+k-1)}$$

$$C_k = \frac{C_{k-2}\,(-1)\,(n+2-k)\,(n+k-1)}{k\,(k-1)}$$

$$C_{k-2} = \frac{C_k\,(-1)\;k\,(k-1)}{(n+2-k)\,(n+k-1)}$$

Como $k \in <0..n>$ entonces para $k = n$ se tiene C_n : por lo tanto

$$C_{n-2} = \frac{C_n\,(-1)\,n\,(n-1)}{2\,(2n-1)}$$

Asimismo para k = n –2 se puede calcular tiene C_{n-4}

$$C_{n-4} = \frac{C_{n-2}\,(-1)\;(n-2)\,(n-3)}{4\,(2n-3)}$$

y así en forma sucesiva y decreciente pueden obtenerse los coeficientes de los Polinomios de Legendre de orden Par.

Como se observa a Ecuación de Recurrencia de los coeficientes de los Polinomios de Legendre es la misma tanto para el caso par como impar y es

$$C_{n-2j} = \frac{C_n\,(-1)^j\;n(n-2)...(n-2j+2)\,.(n-1)(n-3)...(n-2j+1)}{2.4.6...(2j)\,(2n-1)(2n-3)...(2n-2j+1)}$$

$$C_{n-2j} = \frac{C_n\,(-1)^j\;n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-2j+2)(n-2j+1)}{2^j.\,j!\;(2n-1)(2n-3)...(2n-2j+1)}$$

$$C_{n-2j} = \frac{C_n\,(-1)^j \qquad n! \qquad (2n-2j)! \qquad 2^j\,n!}{2^j.\,j! \quad (n-2j)! \quad (2n)! \quad (n-j)!}$$

$$C_{n-2j} = \frac{C_n\,(-1)^j\,(2n-2j)! \quad n!\;n!}{j!\;\;(n-2j)!\;(n-j)!\;(2n)!}$$

Definiendo

J:= (n-1)/2 $\quad n \in$ Impar
:= n/2 $\quad n \in$ Par

Los Polinomios de Legendre son:

$$\boldsymbol{P_n(x)} = C_n\;\frac{n!\;n!}{(2n)!}\sum_{j=0}^{J}\frac{(-1)^j\,(2n-2j)!}{j!\;(n-j)!\;(n-2j)!}\;x^{n-2j}$$

Recordando la convención ***$C_0 : P_n(1) = 1$***

$$\boldsymbol{P_n(1)} = C_n\;\frac{n!\;n!}{(2n)!}\sum_{j=0}^{J}\frac{(-1)^j\,(2n-2j)!}{j!\;(n-j)!\;(n-2j)!} = 1$$

Como la suma vale $\displaystyle\sum_{j=0}^{J}\frac{(-1)^j\,(2n-2j)!}{j!\;(n-j)!\;(n-2j)!} = 2^n$

$$C_n\;\frac{n!\;n!}{(2n)!}\;2^n = 1$$

$$C_n = \frac{1}{2^n}\;\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

Se implica una ***Cuarta expresión de los Polinomios de Legendre***.

$$\boldsymbol{P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{J}\frac{(-1)^j\,(2n-2j)!}{j!\;(n-j)!\;(n-2j)!}}\;x^{n-2j}$$

3.2.4.- DEDUCCIÓN DE LA TERCERA EXPRESIÓN DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE: OLINDO RODRIGUES A PARTIR DE LA CUARTA EXPRESIÓN

Partiendo de

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2n-2k}$$

Derivando n veces

$$D^{(n)}(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2n\text{-}2k)(2n\text{-}2k\text{-}1)\ldots(n\text{-}2k+1)\, x^{n-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k}$$

Que es la primera expresión de Los Polinomios de Legendre salvo constante. Por otro lado recordando la convención $P_n(1) = 1$

$$D^{(n)}(x^2-1)^n = D^{(n)}[(x-1)^n (x+1)^n]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{(k)}(x-1)^n\, D^{(n-k)}(x+1)^n$$

$$D^{(n)}(x^2-1)^n \Big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{(k)}(x-1)^n\, D^{(n-k)}(x+1)^n \Big|_{x=1}$$

$$= \binom{n}{n} D^{(n)}(x-1)^n\, D^{(0)}(x+1)^n \Big|_{x=1}$$

$$= n!\,2^n$$

De aquí se deduce la fórmula de Olindo Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!} D^{(n)}(x^2-1)^n$$

Como verificación se deduce la expresión de los primeros Polinomios de Legendre a partir de esta fórmula.

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0\,0!} D^{(0)}(x^2-1)^0 = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1\,1!} D^{(1)}(x^2-1)^1 = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2\,2!} D^{(2)}(x^2-1)^2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3\,3!} D^{(3)}(x^2-1)^3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$