NOTAS PARA LOS ALUMNOS DEL CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS TOTALES

Ing. Juan Sacerdoti

Departamento de Matemática

Facultad de Ingeniería

Universidad de Buenos Aires

2002

V 2.02

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS TOTALES

ÍNDICE

ECUACIONES DIFERENCIALES
EN DERIVADAS TOTALES

1.- OBJETIVOS Y DEFINICIONES BASICAS

1.1.- OBJETIVO

El objetivo del presente trabajo es la resolución de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Totales ***(EDDT)***, también llamadas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

1.2.- DEFINICIONES BASICAS

Se definen a continuación los elementos básicos que se emplean en el desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Totales (EDDT):

1.- Definición de EDDT
2.- Orden de la EDDT
3.- Grado de la EDDT
4.- Solución de la EDDT

1.2.1.- DEFINICIÓN DE EDDT - ORDEN Y GRADO

Se define como Ecuación Diferencial en Derivadas Totales a una ecuación del tipo:

Def: $f\ (x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(k+n)}) = 0 \in EDDT := \quad f: D = Sub(C^2) \to C$
$$(x, y) \to f\,(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(k+n)}) \ :\ f = 0$$

$$\begin{aligned} f\,(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(k+n)}) = 0 &: \text{ Ecuación diferencial en derivadas totales (EDDT)} \\ D = Sub(C^2) &: \text{ Dominio de la EDDT. Subconjunto de } C^2 \\ n + k &: \text{ Grado de la EDDT} \\ n &: \text{ Orden de la EDDT} \end{aligned}$$

Obs 1: El dominio y el rango de la EDDT son respectivamente ***$S(C^2)$*** y ***C*** aunque pueden también tomarse ***$S(R^2)$*** y ***R***, manteniéndose los resultados obtenidos en el campo complejo.

Obs 2: En la resolución de EDDT no interesa el grado de la misma, sino el orden. Esto es así porque si se toma: $z = y^{(k)}$ resulta:

$$f\,(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} \dots, y^{(k+n)}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f\,(x, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$$

y luego se obtiene la función ***y*** integrando k veces z.

$$y = \underbrace{\iint \dots \int}_{k \text{ veces}} z(x)\ dx$$

La ecuación diferencial se supone resuelta cuando se llega a este punto: antes de integrar. Por lo tanto a partir de aquí se emplea k = 0 sin perder generalidad. Salvo indicación en contrario en las ecuaciones que se plantearan, el orden coincidirá con el grado.

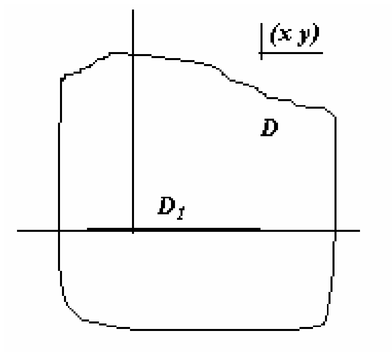
1.2.2.- SOLUCIONES DE LA EDDT

Resolver una Ecuación Diferencial en Derivadas Totales significa encontrar la funciones explícitas de gráfica $y = y(x)$ [ó implícitas $\varphi(x\ y) = 0$] que satisfagan a la EDDT.

Al conjunto de soluciones se llamará ***S***

Def: $S := \{ y : D_1 = Sub(C) \to C$
$\qquad x \to y(x) \ : f = 0 \}$

S : Conjunto de soluciones de la EDDT
y : Solución de la EDDT
D_1 : Dominio sobre el cual está definida la solución de la EDDT



Obs 1: No debe confundirse D con D_1.
El primero D es el Dominio de f (Subconjunto de $\boldsymbol{C}^2$) {x y}
El segundo D_1 es el Dominio de y (Subconjunto de ***C***). {x}

Obs 2: Nótese que S es un subconjunto de un espacio E (de funciones) así definido:
$E := \{ y : D_1 = Sub(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$
$\qquad x \to y(x) \}$

1.3.- CLASIFICACIÓN DE EDDT

1.3.1.- CLASIFICACIÓN DE EDDT SEGUN EL TIPO DE CONJUNTO S DE SOLUCIONES.

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse según las características de ***S*** : conjunto de soluciones**.**

La ecuación se dice compatible ó incompatible según existan o no existan soluciones. Es decir el conjunto S es no vacío o vacío respectivamente.

Def: $f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \in$ ***Compatible*** $:= \quad S \neq \varnothing$

$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \in$ ***Incompatible*** $:= \quad S = \varnothing$

En particular cuando la ecuación es compatible para todos los valores del dominio es decir se satisface para cualquier elemento de un espacio prefijado E (universo) se la denomina identidad. Es decir:

Def: $f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \in$ ***Identidad*** $:= \quad S = E$

Ej: $f = y' - y' = 0$

1.3.2.- CLASIFICACIÓN DE LAS EDDT SEGUN EL TIPO DE FUNCIÓN

Las EDDT también se clasifican según el tipo de función f. Esto es porque de la forma de ***f*** dependen los métodos de solución.

Interesan particularmente por sus aplicaciones las ED Lineales (EDL) y las ED Lineales y homogéneas (EDLH), definidas a continuación:

Def: $f = 0 \in EDL \quad := \quad f = p_n(x)\, y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y - q(x)$

$f = 0 \in EDLH \quad := \quad f = p_n(x)\, y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y$

donde p_k y q representan funciones complejas (o reales):

$$p_k : D_k = Sub(C) \to C$$
$$x \to p_k(x)$$

$$q : D_q = Sub(C) \to C$$
$$x \to q(x)$$

En particular los coeficientes $p_k(x)$ pueden ser constantes, generando dos casos de EDDT de uso muy común en los modelos de ingeniería, las EDL y EDLH de coeficientes constantes.

Las EDDT Lineales son objeto de estudio de este capítulo y por lo tanto es cómodo definir para simplificar la notación a la función que las caracteriza con un símbolo particular L(y). Más adelante se verá que la función L(y) es un operador lineal:

Def: $L(y) := p_n(x)\, y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y$

En ese caso las EDL y EDLH quedan expresadas respectivamente como:

$L(y) - q(x) = 0$

$L(y) = 0$

2.- EDDT PRIMER ORDEN

2.1.- CONSIDERACIONES GENERALES

2.1.1.- CARACTERIZACIÓN EDDT PRIMER ORDEN

De acuerdo a la definición de EDDT, se llama EDDT de primer orden a:

Def.: $f(x,y,y') = 0 \in$ ***EDDT DE PRIMER ORDEN*** $:=$

$$:= \quad f : D = Sub(C^2) \to C$$
$$(x, y) \to f(x,y,y') : f = 0$$

Obs 1: El dominio y el rango de la EDDT son respectivamente $S(C^2)$ y ***C*** aunque pueden también tomarse $S(R^2)$ y ***R***, manteniéndose los resultados obtenidos en el campo complejo.

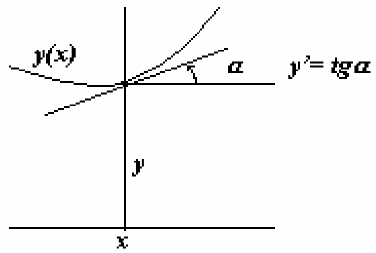
2.1.2.- SOLUCIONES DE LAS EDDT DE PRIMER ORDEN

Resolver una Ecuación Diferencial significa encontrar las funciones explícitas de gráfica y = y(x) [ó implícitas φ (x y) = 0] que satisfagan a la EDDT.

Al conjunto de soluciones se llamará ***S***

Def: $S := \{ y : D_1 = Sub(C) \rightarrow C$
$x \rightarrow y(x) : f(x,y,y') = 0 \quad = 0 \}$

S : Conjunto de soluciones de la EDDT
y : Solución de la EDDT
D_1 : Dominio sobre el cual está definida la solución de la EDDT



2.1.3.- TIPOS DE SOLUCIONES DE LAS EDDT DE PRIMER ORDEN

El conjunto de soluciones de las EDDT de Primer Orden puede ser representada por una Familia de Funciones φ(x y k) = 0 donde k es un parámetro la cual se llama Solución General, pero además pueden existir otras soluciones fuera de la Familia mencionada, que se llaman Soluciones Singulares. Se define:

$\varphi(x\ y\ k) = 0$: ***Solución General, representada por la Familia de Funciones Paramétricas***

$\varphi(x\ y\ k_0) = 0$: ***Solución Particular, que se obtiene fijando un valor particular del parámetro $k = k_0$ en la Solución General.***

$\phi(x\ y) = 0$: ***Solución Singular, que es aquella Solución no incluida en la Solución General $\varphi(x\ y\ k) = 0$.***

2.1.4.- EDDT DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES

El problema inverso al anterior es: hallar la EDDT de una Familia de Funciones. Esta se puede generar a partir del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x\ y\ k) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(x\ y\ k) = 0 \iff \varphi'_x + \varphi'_y\ y' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x\ y\ y') = 0$$

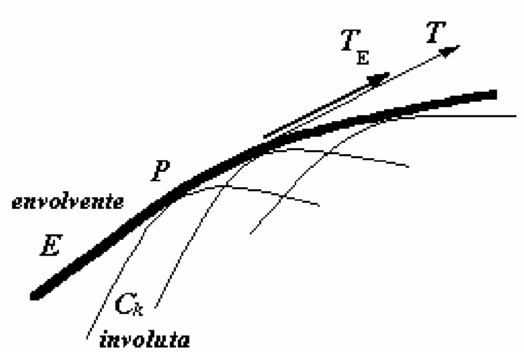
Obs.: Una familia de funciones, además de ser presentada en forma implícita, puede hacerse bajo otras formas como por ejemplo la paramétrica. Un sistema de funciones de parámetros ***t , k*** define una curva para cada ***k***

$$\begin{cases} x = x(t,k) \\ y = y(t,k) \end{cases}$$

2.1.5.- ENVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE CURVAS DE UN PARAMETRO

2.1.5.1.- DEFINICIÓN DE ENVOLVENTE

Dada una Familia de Curvas, puede darse el caso que exista una curva ***E*** llamada Envolvente que en cada uno de sus puntos sea tangente a una de las curvas de la Familia. Cada curva de la Familia se llama involuta.



En el punto de contacto entre envolvente e involuta (en el caso de curvas regulares) deben existir los vectores tangentes a de cada una de ellas (respectivamente T_E y T) y ser colineales es decir:

$$\exists T \;\Leftrightarrow\; \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$$
$$\exists T_E \;\Leftrightarrow\; x_k^2 + y_k^2 \neq 0$$

$$T = \lambda\, T_E$$

La condición de colinealidad puede expresarse como

$$y' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \;\Rightarrow\; T = \begin{pmatrix} -\varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}$$

$$T_E = \begin{pmatrix} y_k \\ x_k \end{pmatrix}$$

$$T = \lambda\, T_E \;\Rightarrow\; \varphi_x\, x_k + \varphi_y\, y_k = 0$$

Las envolventes de una Familia de Funciones, si existen son Solución Singular de la EDDT. Queda claro que puede haber otras Soluciones Singulares que no son envolventes.

En resumen se llama envolvente a una Familia de Funciones que dependen de un solo Parámetro a:

Def: ***H.-*** $\varphi(x, y, k) = 0 \in$ ***Familia de Curvas de un Parámetro:***
$: \exists\; \varphi_x \;\; \varphi_y \;\; \varphi_k$

$E \in$ ***Envolvente/f :*** $E : D = [\,a\; b\,] \to C$
$k \to E = (x(k), y(k)) \; : \; E \in C/[\,a\; b\,]$
$E' \neq 0$
$\varphi(x(k), y(k), k) = 0$

2.1.5.2.- TEOREMAS RELATIVOS A LA ENVOLVENTE

Los teoremas sobre la envolvente son:

Teorema 1: *Condición necesaria para la existencia de la envolvente como curva regular es que sea parte de la*

solución del Sistema $\mathbf{E \subset S:} \begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_k(x,y,k)=0 \end{cases}$

H_1.- $\begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2 \neq 0 \end{cases}$

H_2.- $E \in$ Envolvente/φ $: \begin{cases} x = x(k) \\ y = y(k) \\ x'^2+y'^2 \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E \subset S : \begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_k(x,y,k)=0 \end{cases}$

D.- Por definición de envolvente se verifica la identidad

$\varphi(x(k), y(k), k) = 0$

y también

$\varphi_x \dfrac{dx}{dk} + \varphi_y \dfrac{dy}{dk} + \varphi_k = 0$

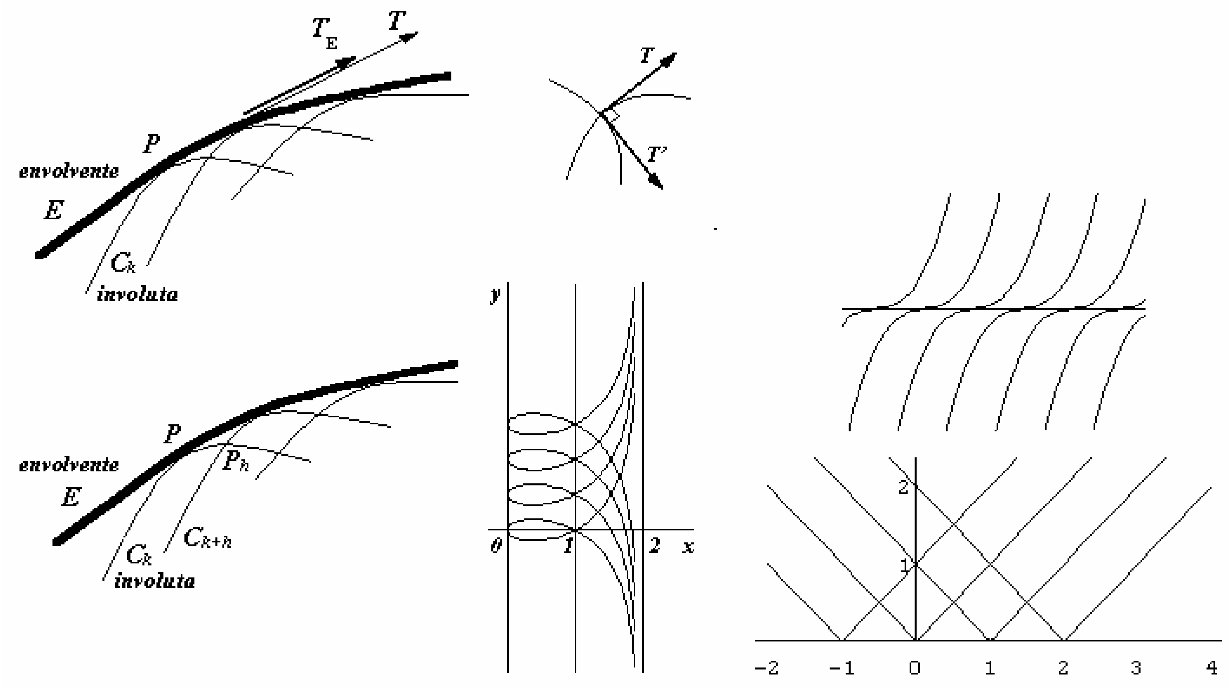
pero como existen simultáneamente los vectores tangentes de la curva de parámetro k y la envolvente resulta

$\varphi_x\ dx + \varphi_y\ dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = 0$

entonces la envolvente verifica el sistema:

$E \subset S: \begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_k(x,y,k)=0 \end{cases}$

Obs.: Como se verá (el Teorema 4) la solución del Sistema $S: \begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_k(x,y,k)=0 \end{cases}$ está formada por la envolvente y otras curvas que son el lugar geométrico de los puntos no regulares , es decir que satisfacen $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = 0$



Teorema 2.- Condición suficiente de existencia de la envolvente

H₁.- $\begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_x^{\,2}+\varphi_y^{\,2}\neq 0 \end{cases}$

H_2.- **S :** $\begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_k(x,y,k)=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\exists$ **E :** $\begin{cases} x=x(k) \\ y=y(k) \\ x'^2+y'^2\neq 0 \end{cases}$ $\wedge$ **E $\in$ única** $\wedge$ **E' = $(x_k \;\; y_k)$**

H_3.- $\begin{cases} \varphi\in C^{(2)} \\ det\, J\,\dfrac{(\varphi,\varphi_k)}{(x,y)}\neq 0 \\ \varphi_{kk}\neq 0 \end{cases}$

D.- Como $\varphi_x^{\,2}$ + $\varphi_y^{\,2}\neq 0$

se deriva el sistema respecto del parámetro k

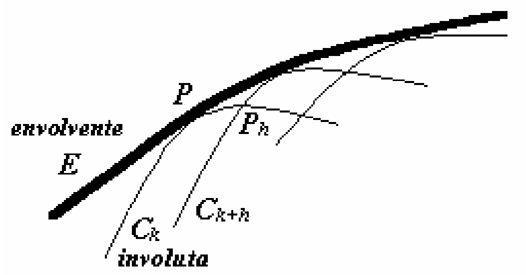
$$\varphi_x\,\frac{dx}{dk}+\varphi_y\,\frac{dy}{dk}=0$$

$$\varphi_{kx}\,\frac{dx}{dk}+\varphi_{ky}\,\frac{dy}{dk}+\varphi_{kk}=0$$

sistema que tiene ***solución única*** porque $\det J\,\dfrac{(\varphi,\varphi_k)}{(x,y)} \neq 0$

la solución no es la trivial porque $\varphi_{kk} \neq 0$ entonces $x'^2 + y'^2 \neq 0$

Teorema 3: En la hipótesis del Teorema 2 , los puntos P que resuelven al sistema S , son uno para cada ***k*** , el límite de los puntos de intersección P_h de las curvas C_k C_{k+h} cuando h tiende a cero



$$H_1.- \quad \begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{H_2.-}\ \ \mathbf{S:}\begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_k(x,y,k)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}\begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi(x,y,k+h)=0 \end{cases} = \begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_k(x,y,k)=0 \end{cases}$$

$$\mathbf{H_3.-} \quad \begin{cases} \varphi \in C^{(2)} \\ \det J\,\dfrac{(\varphi,\varphi_k)}{(x,y)} \neq 0 \\ \varphi_{kk} \neq 0 \end{cases}$$

Efectivamente los puntos de intersección P_h cumplen

$$\begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi(x,y,k+h)=0 \end{cases}$$

En consecuencia por el teorema de Rolle

$\exists\, \kappa : \kappa \in \,]\,k\ , k+h\,[\ \wedge\ \varphi'_k(x, y, \kappa) = 0$

Pasando al límite cuando h tiende a cero se tiene el sistema S

$$S:\begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_k(x,y,k)=0 \end{cases}$$

Obs.: En el caso que no se verifiquen las hipótesis del Teorema 3 , la envolvente de la familia puede no ser el lugar geométrico de los puntos límites de la intersección de C_k y C_{k+h} cuando h tiende a cero.

Un ejemplo es cuando las curvas de $\varphi(x, y, k) = 0$ y $\varphi_k(x, y, k) = 0$ son tangentes.

Esto implica $\det J \dfrac{(\varphi, \varphi_k)}{(x, y)} = 0$ y $\varphi_{kk} = 0$

Pues de los contrario sería incompatible el sistema

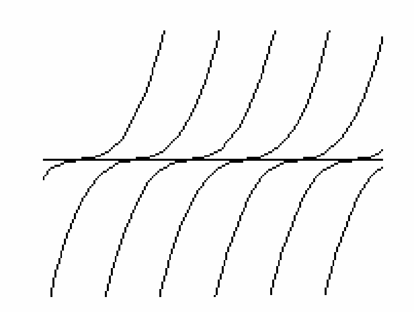
$$\varphi_x \frac{dx}{dk} + \varphi_y \frac{dy}{dk} = 0$$

$$\varphi_{kx} \frac{dx}{dk} + \varphi_{ky} \frac{dy}{dk} + \varphi_{kk} = 0$$

respecto de $\dfrac{dx}{dk}$ y $\dfrac{dy}{dk}$

En tal caso el contacto es de orden superior a 1. Ejemplo de ello la familia de circunferencias osculatrices de una curva E, (que es envolvente)

Ejemplo : Haz de parábolas $\varphi := (x - k)^3 - y = 0$



Se forma el sistema

$$\varphi = (x - k)^3 - y = 0$$
$$\varphi_k = -3(x - k)^2 = 0$$

que permite el siguiente análisis:

I.- Se anula la segunda ecuación para $x = k$

II.- $x = k$ deja en la primera ecuación $y = 0$ que representa la envolvente porque todas las parábolas son tangentes a la misma. En efecto:

$\varphi_x = 3(x - k)^2$

$\varphi_y = -1$

$$(\varphi_x \ \varphi_y)\Big|_{(k0)} = (0, -1)$$

$y = 0$ es entonces envolvente de la familia pues $T = \mu E'$

Se observa que no se cumplen las hipótesis del Teorema 3 pues:

$$\det J \frac{(\varphi, \varphi_k)}{(x, y)} = \begin{vmatrix} 3(x-k)^2 & -1 \\ -6(x-k) & 0 \end{vmatrix} = -6(x - k)\Big|_{(k0)} = 0$$

$$\varphi_{kk} = 6(x - k)\Big|_{(k0)} = 0$$

Teorema 4.- La solución del sistema $S: \begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_k(x,y,k)=0 \end{cases}$ en general está compuesta por un lado por la envolvente y por otro por las curvas que se obtienen como el lugar geométrico de los puntos no regulares que cumplen $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = 0$

H$_2$.- $S: \begin{cases} \varphi(x,y,k)=0 \\ \varphi_k(x,y,k)=0 \end{cases}$

H$_3$.- $\begin{cases} \varphi \in C^{(2)} \\ \det J\dfrac{(\varphi,\varphi_k)}{(x,y)} \neq 0 \\ \varphi_{kk} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ **S= E∪H :** $E: \begin{cases} x = x(k) \\ y = y(k) \\ x'^2 + y'^2 \neq 0 \end{cases}$ $H: \begin{cases} x = x(k) \\ y = y(k) \\ x'^2 + y'^2 = 0 \end{cases}$

D.- Sean $x = x(u)$ $y = y(u)$ ecuaciones paramétricas de las curvas que satisfacen al sistema ***S***, entonces como se puede despejar en el sistema $k = k(x\,y)$ porque $\varphi_{kk} \neq 0$ se satisface en la primera ecuación del sistema:

$$\varphi(x(u), y(u), k(x(u), y(u)) = 0$$

Además como:

$$\varphi_x \cdot x'(u) + \varphi_y \cdot y'(u) + \varphi_k \cdot [\,k_x\, x'(u) + k_y\, y'(u)] = 0$$

y como $\varphi_k = 0$

$$\varphi_x \cdot x'(u) + \varphi_y \cdot y'(u) = 0$$

Entonces se obtiene la segunda ecuación del sistema S. Existen dos casos según se anule o no $\varphi_x^2 + \varphi_y^2$

$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0 \Rightarrow E: \begin{cases} x = x(k) \\ y = y(k) \\ x'^2 + y'^2 \neq 0 \end{cases}$ Envolvente

$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = 0 \Rightarrow H: \begin{cases} x = x(k) \\ y = y(k) \\ x'^2 + y'^2 \neq 0 \end{cases}$ Lugar geométrico de los puntos ***no*** regulares del Sistema.

2.2.- TIPOS ELEMENTALES DE EDDT DE PRIMER ORDEN

Para las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden $f(x, y, y') = 0$, solamente se conocen métodos de integración de algunos casos particulares, que se desarrollan a continuación.

2.2.1.- ECUACIONES SIN UNA VARIABLE TIPO f(xy') = 0

Se presentan dos casos según pueda despejarse una de las variables:

Caso 1.- $f(x\,y') = 0 \;\Rightarrow\; y' = u(x)$
Caso 2.- $f(x\,y') = 0 \;\Rightarrow\; x = X(y')$
Caso 3.- $f(y\,y') = 0 \;\Rightarrow\; y' = v(y)$
Caso 4.- $f(y\,y') = 0 \;\Rightarrow\; y = Y(y')$

En ambos casos se llamará $p := y'$ para simplificar la exposición.

2.2.1.1.- CASO 1

I.- Def: $f(x\,y') = 0 \;\Rightarrow\; y' = u(x)$

II:- Test de reconocimiento: Teorema de existencia de solución de las funciones implícitas (Dini)

T.- $f: D \subset R^2 \to R^2$
$(x\,p) \to f = f(x\,p)$

$$\left.\begin{array}{l} \exists\,(x_0\,p_0) :\; f(x_0\,p_0) = 0 \\ \forall X \in U(x_0\,p_0) :\; \dfrac{\partial f}{\partial x} \in C \\ \dfrac{\partial f}{\partial p} \in C \;\wedge\; \dfrac{\partial f}{\partial p} \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \exists\, x \in I = \text{Dominio}(U(x_0\,p_0)) \\ \exists\; u(x) \in \text{única} :\; f(x\;u(x)) \equiv 0 \\ \exists\, u'(x) \Rightarrow u \in C \end{array}$$

III.- Solución General $\quad y = \int u(x)\,dx + C$

2.2.1.2.- CASO 2

I.- Def: $f(x\,y') = 0 \;\Rightarrow\; x = X(y')$

II.- Test de reconocimiento: Teorema de existencia de solución de las funciones implícitas (Dini)

III.- Solución: Con $p := y'$ podemos encontrar una solución en coordenadas paramétricas

$x = X(p)$

$dx = X'(p)\,dp$
$dy = p\,dx = p\,X'(p)\,dp$
$y = \int p\,X'(p)\,dp + C$

En resumen

$x = X(p)$
$y = \int p\,X'(p)\,dp + C$

2.2.1.3.- CASO 3

I.-Def: $y' = v(y)$

II.- Test de reconocimiento: Teorema de existencia de solución de las funciones implícitas (Dini)

III.-Solución General $x = \int \frac{1}{v(y)}\, dy + C$

IV.-Soluciones Singulares $v(y) = 0$

2.2.1.4.- CASO 4

I.- Def: $y = Y(y')$

II.- Test de reconocimiento: Teorema de existencia de solución de las funciones implícitas (Dini)

III.- Solución General: Con p := y' podemos encontrar una solución en coordenadas paramétricas

$y = Y(p)$

$dx = Y'(p)\, dp$

$dx = \frac{1}{p}\, dy = \frac{1}{p}\, Y'(p)\, dp$

$x = \int \frac{1}{p}\, X'(p)\, dp + C$

En resumen

$y = Y(p)$

$x = \int \frac{1}{p}\, X'(p)\, dp + C$

2.2.2.- VARIABLES SEPARABLES

2.2.2.1.- VARIABLES SEPARABLES STANDARD

I.- Def: $y' = X(x)\, Y(y)$

II.- Test de reconocimiento

T_1.- $y' = f(x\,y)$

$f(x\,y) = X(x)\, Y(y) \Leftrightarrow f'_x / f = F(x)$

$\Leftrightarrow f'_y / f = G(y)$

D: ***Condición necesaria***

$$\begin{aligned} f'_x / f &= X'(x)\, Y(y) / X(x)\, Y(y) \\ &= X'(x) / X(x) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Análogamente :

$f'_y / f = G(y)$

Condición suficiente

$f'_x / f \quad = \quad F(x)$

Integrando con respecto a x

$L\, f(x\, y) + \varphi(y) = \int F(x) =: \eta(x)$

$$L\, f(x\, y) = \eta(x) - \varphi(y)$$
$$f(x\, y) = e^{\eta(x) - \varphi(y)}$$
$$= e^{\eta(x)}\, e^{-\varphi(y)}$$
$$= X(x)\, Y(y)$$

Un segundo Test es:

T_2.- $y' = f(x\, y)$
$f(x\, y) = X(x)\, Y(y) \Leftrightarrow L\, f = F(x) + G(y)$

D: Condición necesaria

$$Lf = LX(x) + LY(y)$$
$$= F(x) + G(y)$$

Condición suficiente

$$L\, f(x\, y) = F(x) + G(y)$$
$$f(x\, y) = e^{[\, F(x) + G(y)\,]}$$
$$= e^{F(x)}\, e^{G(y)}$$
$$= X(x)\, Y(y)$$

III.- Solución General $\quad \int 1/Y(y)\, dy = \int X(x)\, dx + C$

IV.- Solución Singular $\quad Y(y) = 0$

Obs.: Las ED ya analizadas del tipo $f(x\, y') = 0$ ó $f(y\, y') = 0$ son de variables separables.

<u>2.2.2.2.- REDUCIBLES A VARIABLES SEPARABLES $y' = f(ax+by)$</u>

I.- Def: $\quad y' = f(ax+by)$

II.- Solución General: Con la sustitución $z = ax + by$
$z' = a + by'$

Reemplazando en la EDDT

$z' = a + b\, f(z)$

EDDT de variables separables cuya integración es:

$$\int \frac{1}{a + bf(z)}\, dz = \int dx + C$$

III.- Solución Singulares: $\quad a + b\, f(z) = 0$

En el caso particular de $z = x + y$ resulta

$$\int \frac{1}{1+f(z)}\, dz = \int dx + C$$

2.2.2.3.- HOMOGENEAS

I.- Def: $y' = f(y/x)$

II.- Test de reconocimiento

T_1.-

$y' = f(x\,y)$
$y = m\,x$
$f(x\,y) = f(y/x) \Leftrightarrow f(x\,y) = f(m)$

D: ***Condición suficiente***

$f(y/x) = f(m)$

Condición necesaria:

$f(m) = f(y/x)$

T_2.- $y' = f(x\,y)$
$y = t\,Y \qquad x = t\,X$
$f(x\,y) = f(y/x) \Leftrightarrow f(y/x) = f(Y/X)$

D: ***Condición suficiente***

$$f(y/x) = f(tY/tX) = f(Y/X)$$

Condición necesaria es la misma definición:

$f(y/x) = f(x\,y)$

III.- Solución General: Con la sustitución $u = y/x$
$y = u \cdot x$
$y' = u'\,x + u$

Reemplazando en la EDDT

$u'\,x + u = f(u)$
$u'\,x = f(u) - u$

EDDT de variables separables cuya integración es:

$$\int \frac{1}{f(u)-u}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx + C$$

IV.- Soluciones singulares: $f(u) - u = 0$
$x = 0$

2.2.2.4.- REDUCIBLES A HOMOGÉNEAS

2.2.2.4.1.- Tipo I

I.- Tipo I $y' = f\left(\frac{ax+by}{mx+ny}\right)$

II.- Solución general: Es un caso particular de la EDDT homogénea . Con la sustitución $u = y/x$

$$y = u \cdot x$$
$$y' = u' x + u$$
$$u' x + u = f\left(\frac{a+bu}{m+nu}\right)$$

EDDT de variables separables

2.2.2.4.2.- TipoII

III.-Tipo II $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right)$

IV.- Solución general: Se reduce al caso anterior con la translación

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

Reemplazando en la EDDT

$$Y' = f\left(\frac{aX + bY + ax_0 + by_0 + c}{mX + nY + mx_0 + ny_0 + p}\right)$$

Planteando el Sistema de ecuaciones lineales algebraicas

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ mx_0 + ny_0 + p = 0 \end{cases}$$

Se tienen los casos según el determinante

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} a & b \\ m & n \end{pmatrix} = a\,n - b\,m$$

Caso II.1 $\Delta \neq 0$ Queda una ecuación del Tipo I.

$$Y' = f\left(\frac{aX + bY}{mX + nY}\right)$$

Caso II.2 $\Delta = 0$ se cumple $a x + b y = K (m x + n y)$

Volviendo a

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right)$$

Haciendo $Y = m x + n y$ $Y' = m + n y'$

$Y' = m + n\, f\left(\frac{KY + c}{Y + p}\right)$

Que es de Variables Separables.

2.2.3.- ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

2.2.3.1.- ECUACIONES LINEALES

I .- Def : $y' + p(x)\, y = q(x)$

II.- Solución general En primer lugar se resuelve la homogénea

$u' + p(x)\, u = 0$

que es de variables separables

$u'/u = -p(x)$

$L(u) = -\int p(x) + Lk$

$u = k\, e^{-\int p(x)}$

Para resolver la EDDT lineal no homogénea se introduce la sustitución $y = u\, v$ que agrega un grado de libertad adicional quedando

$u\, v' + v\, [\, u' + p(x)\, u\,] = q(x)$

en esta ecuación se puede elegir arbitrariamente $u' + p(x)\, u = 0$ con lo cual:

$v' = q(x) / u$

$v = \frac{1}{k} \int q(x)\, e^{+\int p(x)} + C$

$y = e^{-\int p(x)} \int q(x)\, e^{+\int p(x)} + C\, e^{-\int p(x)}$

III.- Construcción de una EDL de Primer Orden conocidas dos Soluciones

Dos funciones derivables y_1 e y_2 diferentes, en el caso de ser soluciones de la ED Lineal de Primer orden satisfacen el Sistema lineal algebraico:

$y_1' + p(x)\, y_1 = q(x)$
$y_2' + p(x)\, y_2 = q(x)$

cuya solución por Cramer es:

$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & -1 \\ y_2 & -1 \end{vmatrix} = y_2 - y_1 \neq 0 \iff y_1 \neq y_2$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} -y_1' & -1 \\ -y_2' & -1 \end{vmatrix} = -(y_2' - y_1') \qquad \Rightarrow p(x) = -\frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1}$

$\Delta_q = \begin{vmatrix} y_1 & -y_1' \\ y_2 & -y_2' \end{vmatrix} = -y_1\, y_2' + y_2\, y_1' \qquad \Rightarrow q(x) = \frac{y_1'\, y_2 - y_1 y_2'}{y_2 - y_1}$

IV.- Solución general de una EDL de Primer Orden conocida una Solución particular

A partir del Sistema:

$y' + p(x)\, y = q(x)$
$y_1' + p(x)\, y_1 = q(x)$

Entonces:

$(y' - y_1') + p(x) (y - y_1) = 0$

$y - y_1 = C\, e^{-\int p(x)}$

Por lo tanto la solución general de una EDL de Primer Orden es:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = k = \text{cte arbitraria}$$

<u>2.2.3.2.- ECUACIONES REDUCIBLES A LINEALES: BERNOUILLI</u>

I.- Def : $y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$

II.- Solución general Dividiendo por y^n

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$$

Se resuelve haciendo el cambio de variable

$$z' = \frac{y'}{y^n} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{1-n}\, y^{1-n}$$

$z' + p(x) (1 - n) z = q(x)$

$$z = e^{-(1-n)\int p(x)} \int q(x)\, e^{+(1-n)\int p(x)} + C\, e^{-(1-n)\int p(x)}$$

y de aquí se obtiene y(x)

2.2.3.3.- ECUACIONES REDUCIBLES A LINEALES: RICATTI

I.- Def : $y' + A(x)\ y^2 + B(x)\ y + C(x) = 0$

II.- Solución por reducción a la Ecuación de Bernoulli en el caso de conocerse una solución particular.

$y_1 :\quad y_1' + A(x)\ y_1^2 + B(x)\ y_1 + C(x) = 0$

Haciendo $y = z + y_1$

$z' + y_1' + A(x)\ (z + y_1)^2 + B(x)\ (z + y_1) + C(x) = 0$

$z' + y_1' + A(x)\ (z^2 + 2\ z\ y_1 + y_1^2) + B(x)\ (z + y_1) + C(x) = 0$

Resulta

$z' + A(x)\ (z^2 + 2\ z\ y_1) + B(x)\ z$

$z' + [\ 2\ A(x)\ y_1 + B(x)\ ]\ z + A(x)\ z^2 = 0$

Que es una Ecuación de Bernouilli con n = 2. Por lo tanto se reduce a ED lineal haciendo $z = \frac{1}{v}$

$v' - [\ 2\ A\ y_1 + B\ ]\ v - A = 0$

cuyo resultado es:

$y = \frac{1}{v} + y_1$

Se enuncia entonces:

T.- Reducción de Ricatti a Bernouilli

$H_1\quad y' + A(x)\ y^2 + B(x)\ y + C(x) = 0$ ***(Ricatti)***

$H_2\quad y_1 :\quad y_1' + A(x)\ y_1^2 + B(x)\ y_1 + C(x) = 0 \qquad \Rightarrow\quad y = z + y_1 :\quad z' + [\ 2\ A(x)\ y_1 + B(x)]\ z + A(x)\ z^2 = 0$ ***(Bernouilli)***

III.- Reducción de Ricatti a una EDLH de Segundo Orden

III.1.- Pasaje EDLH de Segundo Orden a Ricatti

Partiendo de $y'' + p(x)\ y' + q(x)\ y = 0$ se introduce el cambio de variable

$y = e^{\int z(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = z$

$y' = e^{\int z(x)}\ z$

$y'' = e^{\int z(x)}\ z^2 + e^{\int z(x)}\ z'$

Reemplazando en la EDLH

$e^{\int z(x)}$ [z’ + z^2 + p z + q] = 0

$$z' + z^2 + p\,z + q = 0 \quad \text{(Ricatti)}$$

III.2.- Reducción de Ricatti a EDLH de Segundo Orden

Se pretende reducir a la ED de Ricatti

$$w' + A\,w^2 + B\,w + C = 0 \quad \text{(Ricatti)}$$

a la forma

$$z' + z^2 + p\,z + q = 0$$

Para ello ensayamos:

$$w = u\,z$$

$$u'\,z + u\,z' + A\,u^2 z^2 + B\,u\,z + C = 0$$

Eligiendo $u = \dfrac{1}{A}$

$$-\frac{A'}{A^2}\,z + \frac{1}{A}\,z' + \frac{1}{A}\,z^2 + B\frac{1}{A}\,z + C = 0$$

Multiplicando por A(x) y ordenando

$$z' + z^2 + z\left[-\frac{A'}{A} + B\right] + A\,C = 0$$

Llamando

$$p(x) = -\frac{A'}{A} + B$$

$$q(x) = A\,C$$

queda como equivalente la EDLH de Segundo Orden

$$y'' + \left[-\frac{A'}{A} + B\right] y' + A\,C\,y = 0$$

El Teorema queda enunciado

T.- Reducción de Ricatti a EDLH de Segundo Orden

H_1 $\quad y = e^{\int z(x)} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{y'}{y} = z$

H_2 $\quad p(x) = -\dfrac{A'}{A} + B$

$\quad\quad q(x) = A\,C$

H_3 $\quad w = \dfrac{1}{A}\,z$

T.- $\quad y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ ***(EDLH 2°Orden)*** $\Leftrightarrow$ $z' + z^2 + p(x)\;y + q(x) = 0$ ***(Ricatti)***

$$\Leftrightarrow \quad w' + A(x)\, w^2 + B(x)\, y + C(x) = 0 \quad \textit{(Ricatti)}$$

IV.- Solución general a partir de 3 soluciones particulares

Se ha visto que la solución general de la EDL de primer orden

$y' + p(x)\, y + q(x) = 0$

está dada por

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = k = \textit{cte arbitraria}$$

Aplicando este resultado a la Ecuación de primer orden que resuelve a la ED de Ricatti:

$v' - [\, 2\, A\, y_1 + B\,]\, v - A = 0$

$$\frac{v - v_1}{v_2 - v_1} = k = \textit{cte arbitraria}$$

Este resultado se relaciona con las soluciones de Ricatti:

$$v_1 = \frac{1}{y_2 - y_1} \qquad v_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}$$

Reemplazando estas expresiones

$$\frac{\dfrac{1}{y - y_1} - \dfrac{1}{y_2 - y_1}}{\dfrac{1}{y_3 - y_1} - \dfrac{1}{y_2 - y_1}} = k = \textit{cte arbitraria}$$

$$\frac{\dfrac{y - y_2}{y - y_1}}{\dfrac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}} = k = \textit{cte arbitraria}$$

Se puede enunciar entonces que conocidas 3 soluciones particulares de la ED de Ricatti se tiene la solución general por la relación anarmónica:

T.- $\{y_1\ y_2\ y_3\} \in S := \{\, y: D_1 \to C$

$x \to y(x) \ :\ y' + A(x)\, y^2 + B(x)\, y + C(x) = 0 \quad \textit{(Ricatti)} \,\}$

$$\Rightarrow \quad y : \frac{\dfrac{y - y_2}{y - y_1}}{\dfrac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}} = k = \textit{cte arbitraria}$$

V.- Solución general como función homográfica de la constante k

Despejando y de la expresión anterior

$$\frac{y-y_2}{y-y_1} = k\,\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} = k\,\alpha(x)$$

$$y-y_2 = k\,\alpha(x)\,(y-y_1)$$

$$y = k\,\frac{y_2-k\alpha(x)y_1}{1-k\alpha(x)}$$

La solución de la ED de Ricatti está dada por la función homográfica de la constante k.

T.- $\{y_1\ y_2\ y_3\} \in S := \{\, y: D_1 \to C$

$x \to y(x)\ :\ y' + A(x)\,y^2 + B(x)\,y + C(x) = 0$ ***(Ricatti)*** $\}$

$$\Rightarrow \quad y = k\,\frac{y_2-k\alpha(x)y_1}{1-k\alpha(x)} \quad : \quad \alpha(x) := \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}$$

VI.- Construcción de una ED de Ricatti conocidas 3 soluciones

Tres funciones derivables y_1 y_2 e y_3 para que sean soluciones de la ED de Ricatti deben satisfacer el sistema lineal algebraico

$$y_1' + A(x)\,y_1^2 + B(x)\,y_1 + C(x) = 0$$
$$y_2' + A(x)\,y_2^2 + B(x)\,y_2 + C(x) = 0$$
$$y_3' + A(x)\,y_3^2 + B(x)\,y_3 + C(x) = 0$$

cuya solución depende del determinante de Vandermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (y_2-y_1)(y_3-y_1)(y_3-y_2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y_2 \neq y_1) \wedge (y_3 \neq y_1) \wedge (y_3 \neq y_2)$$

$$\Delta_A = -\begin{vmatrix} y_1' & y_1 & 1 \\ y_2' & y_2 & 1 \\ y_3' & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A(x) = \frac{\Delta_A}{\Delta}$$

$$\Delta_B = -\begin{vmatrix} y_1^2 & y_1' & 1 \\ y_2^2 & y_2' & 1 \\ y_3^2 & y_3' & 1 \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad B(x) = \frac{\Delta_B}{\Delta}$$

$$\Delta_C = -\begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & y_1' \\ y_2^2 & y_2 & y_2' \\ y_3^2 & y_3 & y_3' \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C(x) = \frac{\Delta_C}{\Delta}$$

Teorema: La ecuación de Ricatti existe si y sólo si se dan 3 funciones derivables distintas entre si.

H₁.- $\{y_1\ y_2\ y_3\} \in C^{(1)}$

H₂.- $\forall i \neq j \ \ y_i \neq y_j \qquad \Leftrightarrow \quad \exists \ \ y' + A(x)\,y^2 + B(x)\,y + C(x) = 0$ ***(Ricatti)***

$$: A(x) = \frac{\Delta_A}{\Delta} \qquad B(x) = \frac{\Delta_B}{\Delta} \qquad C(x) = \frac{\Delta_C}{\Delta}$$

VII.- Solución general de la ED de Ricatti a partir de una EDLH de segundo orden.

Sea una EDLH de segundo orden con su solución general y la de Ricatti equivalente :

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = k_1\, y_1 + k_2\, y_2$$
$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z' + z^2 + p\, z + q = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad w' + A(x)\, w^2 + B(x)\, w + C(x) = 0$$

ligadas por los cambios de variable

$$w = \frac{1}{A}\, z = \frac{1}{A} \frac{y'}{y}$$

queda en general

$$w = \frac{1}{A} \frac{k_1 y_1' + k_2 y_2'}{k_1 y_1 + k_2 y_2}$$

$$w = \frac{1}{A} \frac{y_1' + \frac{k_2}{k_1} y_2'}{y_1 + \frac{k_2}{k_1} y_2}$$

$$w = \frac{1}{A} \frac{y_1' + k y_2'}{y_1 + k y_2}$$

que es la homográfica solución general de Ricatti

2.2.4.- ECUACIONES RESUELTAS EN y

2.2.4.1.- CASO GENERAL

I.- Def: $y = f(x\, y')$

II.- Solución general

$y' = p$

$p = f'_x + f'_p\, p'$

$p' = g(x\, p)$

que si puede resolverse en p queda $p = G(x\, C)$

2.2.4.2.- LAGRANGE

I.- Def.: $y = x\, a(y') + b(y')$

II.- Solución general

$$p = a(y') + [\, x\, a'(y') + b'(y')\,]\, p'$$

$$p - a(p) = [\, x\, a'(y') + b'(y')\,]\, p'$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{a'(p)}{p - a(p)}\, x = \frac{b'(p)}{p - a(p)}$$

II.- Soluciones singulares $p - a(p) = 0 \;\Leftrightarrow\; p = cte\,,\; p' = 0$

2.2.4.3.- CLAIRAUT

I.- Def.: $y = x\, y' + b(y')$

II.- Solución general

$p = p + [\, x + b'(y')\,]\, p'$

$0 = [\, x + b'(y')\,]\, p'$

$p' = 0 \;\Rightarrow\; y' = k \;\Rightarrow\; y = k\, x + B$
$\qquad\qquad y = k\, x + B = x\, k + b(k)$

$y = k\, x + b(k)$

III.- Solución Singular (envolvente)

$[\, x + b'(y') \,] = 0$

2.2.5.- DIFERENCIALES EXACTAS Y CONEXAS

2.2.5.1.- DIFERENCIALES EXACTAS

I.- Def: $f'_x\, dx + f'_y\, dy = 0$

II.- Solución general

$df = f'_x\, dx + f'_y\, dy = 0$

$f(x\, y) = C$

III.- Test de reconocimiento

T.- $U \in$ ***Entorno de*** $(a\, b)$

$P'_y = Q'_x \in C$

$P(x\, y)\, dx + Q(x\, y)\, dy = 0$

$df = P(x\, y)\, dx + Q(x\, y)\, dy \Leftrightarrow P'_y = Q'_x$

D: ***Condición suficiente***

$P = f'_x \Rightarrow P'_y = f''_{xy}$

$Q = f'_y \Rightarrow Q'_x = f''_{yx}$

Por Schwarz sobre U $\Rightarrow$ $P'_y = Q'_x$

Condición necesaria

$P = f'_x \Leftarrow P'_y = f''_{xy}$

$Q = f'_y \Leftarrow Q'_x = f''_{yx}$

$P\, dx + Q\, dy = f'_x\, dx + f'_y\, dy$

$= df$

2.2.5.2.- ECUACIONES REDUCIBLES A DIFERENCIALES EXACTAS: FACTOR INTEGRANTE

I.- Def: $P\,dx + Q\,dy = 0$

$\exists\,\mu(x\,y) : \quad \mu P\,dx + \mu Q\,dy = df$

II.- Solución general Por el teorema de diferenciales exactas

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

Se obtiene una ecuación EDDP que permite encontrar el factor integrante μ

$$\mu'_y\, P + \mu\, P'_y = \mu'_x\, Q + \mu\, Q'_x$$

Sin embargo si μ depende de una sóla variable se puede calcular con una EDDT

Suponiendo el caso de que $\mu = \mu(x)$ dependa solo de x $\Rightarrow$ $\mu'_y = 0$ la ecuación anterior queda

$$\mu\, P'_y = \mu'_x\, Q + \mu\, Q'_x$$

$$\frac{\mu'_x}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}$$

debiendo ser el segundo miembro solo función de x.

Análogamente si $\mu = \mu(y)$

$$\frac{\mu'_y}{\mu} = -\frac{P'_y - Q'_x}{P}$$

debiendo ser el segundo miembro solo función de y.

2.2.6.- TABLA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

	Nombre	Definición	Test Cambio de variables	Solución General	Soluciones Singulares
1	Tipo $f(x\,y')=0$ ó $f(y\,y')=0$				
1.1	$f(x\,y')=0$	$f(x\,y') = 0 \Rightarrow y' = u(x)$	Dini	$y = \int u(x)\, dx + C$	
1.2	$f(x\,y')=0$	$f(x\,y') = 0 \Rightarrow x = X(y')$	Dini $p= y'$	$x = X(p)$ $y = \int p\, X'(p)\, dp + C$	
1.3	$f(y\,y')=0$	$f(y\,y') = 0 \Rightarrow y' = v(y)$	Dini	$x = \int \frac{1}{v(y)}\, dy + C$	$v(y) = 0$
1.4	$f(y\,y')=0$	$f(y\,y') = 0 \Rightarrow y = Y(y')$	Dini $p= y'$		
2	Variables Separables				
2.1	Standard	$y' = X(x)Y(y)$	$f'_x / f = F(x)$ $f'_y / f = G(y)$	$\int 1/Y(y)\, dy = \int X(x)\, dx + C$	$Y(y) = 0$
2.2	Reducibles a Var. Separables tipo $y' = f(ax+by)$	$y' = f(ax+by)$	$z = a\,x + b\,y \Rightarrow f(a\,x + b\,y) = f(z)$	$\int \frac{1}{a+bf(z)}\, dz = \int dx + C$	$a + b\,f(z) = 0$
2.3	Homogéneas	$y' = f(y/x)$	$y = u\,x \Rightarrow f(y/x) = f(u)$	$\int \frac{1}{f(u)-u}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx + C$	$f(u) - u = 0$ $x=0$
2.4	Reducibles a Homogéneas Tipo I	$y' = f\left(\frac{ax+by}{mx+ny}\right)$		Homogénea	
2.5	Reducibles a Homogéneas Tipo II	$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right)$			
	Tipo II.1	$\Delta = a\,n - b\,m \neq 0$	$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \Rightarrow Y' = f\left(\frac{aX+bY}{mX+nY}\right)$	Homogénea	
	Tipo II.2	$\Delta = a\,n - b\,m = 0$	$Y = m\,x + n\,y \Rightarrow Y' = m + n\, f\left(\frac{KY+c}{Y+p}\right)$	Variables separables	

	Nombre	Definición	Test Cambio de variables	Solución General	Soluciones Singulares
3	Ecuaciones Lineales de Primer Orden				
3.1	Standard	$y' + p(x)\, y = q(x)$		$y = e^{-\int p(x)} \int q(x)\, e^{+\int p(x)} + C\, e^{-\int p(x)}$	
3.2	Bernouilli	$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$	$z = \frac{1}{1-n} y^{1-n} \Rightarrow z' + (1-n)p(x)z = q(x)$	Lineal Standard	
3.3	Ricatti	$y' = A(x)\, y^2 + B(x)\, y + C(x)$ $: y_1' = A(x)y_1^2 + B(x)y_1 + C(x)$	$y = z + y_1 \Rightarrow z' + [2A\, y_1 + B]\, z + A\, z^2 = 0$	Bernouilli	
4	Ecuaciones resueltas en y				
4.1	Standard	$y = f(x\, y')$	$y' = p \Rightarrow p' = g(x\, p)$	Tipo general $y' = g(x\, y)$	
4.2	Lagrange	$y = x\, a(y') + b(y')$	$\frac{dx}{dp} - \frac{a'(p)}{p - a(p)} x = \frac{b'(p)}{p - a(p)}$	Lineal Standard	$p - a(p) = 0$
4.3	Clairaut	$y = x\, y' + b(y')$		$y = k\, x + b(k)$	$x + b'(y') = 0$
5	Ec.Diferenciales Exactas				
5.1	Standard	$df = P(xy)\, dx + Q(xy)\, dy = 0$	$P_y = Q_x \Rightarrow f_x = P \quad f_y = Q$	$f(x\, y) = k$	
5.2	Factor Integrante	$P(xy)\, dx + Q(xy)\, dy = 0$	$\exists\, \mu(x\, y) : \quad \mu P\, dx + \mu Q\, dy = df$ $\frac{\mu'_x}{\mu} = + \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = F(x)$ $\frac{\mu'_y}{\mu} = - \frac{P'_y - Q'_x}{P} = G(y)$	Exacta $f(x\, y) = k$	

2.3.- RESOLUCIÓN APROXIMADA

No existe un método general para resolver ED y' = f(x y) por integración que de la solución exacta. En ese caso existen métodos de resolución aproximada.

2.3.1.- MÉTODO DE DESARROLLO EN SERIE

2.3.1.1.- COEFICIENTES INDETERMINADOS

La ED y' = f(x y) se puede resolver en algunos casos por Serie de Laurent .
Se trabajará en el V(0) para simplificar la notación y la solución es del tipo

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \; x^n$$

se reemplaza en la ED y allí se forman sistemas de ecuaciones donde de poder extraerse los Coeficientes C_n se tiene la solución por serie

Ejemplo Resolución de $y' = \dfrac{y}{1+x}$

$$y = \sum_{0}^{+\infty} C_n \; x^n$$

$$y' = \sum_{0}^{+\infty} C_n \, n \, x^{n-1}$$

$$(1+x)\, y' - y = \sum_{0}^{+\infty} C_n \, n \, x^{n-1} (1+x) \; - \sum_{0}^{+\infty} C_n \; x^n = 0$$

$$0 = \sum_{0}^{+\infty} C_n \, n \, x^{n-1} + \sum_{0}^{+\infty} C_n \, (n-1) \, x^n$$

$$0 = \sum_{0}^{+\infty} E_n \, x^n$$

$E_0 = 0 \qquad C_1 \, 1 + C_0 \, (-1) = 0$
$E_1 = 0 \qquad C_2 \, 2 + C_1 \, (1-1) = 0$
$E_2 = 0 \qquad C_3 \, 3 + C_2 \, (2-1) = 0$
...
$E_n = 0 \qquad C_{n+1} \, (n+1) + C_n \, (n-1) = 0$

Obs.: Para las EDLH existe un teorema de Fuchs que se enuncia:

2.3.2.- MÉTODO DE ADAMS

2.3.3.- MÉTODO DE RUNGE

2.3.4.- MÉTODO DE RUNGE-KUTTA
2.4.- EXISTENCIA DE LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

3.- ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES Y HOMOGENEAS (EDLH)

En adelante por simplicidad, se llamará EDLH a las Ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas.

3.1.- SOLUCIONES SINGULARES GENERALES Y PARTICULARES

La EDLH tiene un Conjunto de Soluciones ***S*** que esta compuesto por 2 tipos de soluciones, a saber:

1.- Soluciones Singulares
2.- Soluciones Generales. A su vez a cada elemento de este conjunto se lo llama Solución Particular.

Estos tipos de soluciones son de características diferentes, y su génesis es la siguiente:

Se llama EDLH a:

$$\textbf{EDLH}: \; L(y) := q_n(x)\, y^{(n)} + q_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + q_1(x)\, y' + q_0(x)\, y = 0$$
$$\exists x : \; q_n(x) \neq 0$$

donde el coeficiente $q_n(x)$ ***no*** es idénticamente nulo, pues, en caso contrario la EDLH sería de grado inferior (n –1 o menor).

Obs: Se recuerda que una función es idénticamente nula sobre un dominio D_1 cuando:

Def:
$$f : D_1 \to C$$
$$x \to f(x)$$

$$f(x) \equiv 0 \; := \; \forall x \in D_1 \;\; f(x) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; /\exists x \in D_1 \;\; q_n(x) \neq 0$$

En nuestro caso son equivalentes $\exists x : \; q_n(x) \neq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; /\forall x \;\; q_n(x) = 0 \;\; =: \; q_n(x) \,/\!\equiv 0$

La ecuación diferencial se puede llevar entonces a la forma:

$$q_n(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; q_n(x)\,\{\, y^{(n)} + [q_{n-1}(x)/\,q_n(x)]\;\; y^{(n-1)} + \dots + [q_1(x)/\,q_n(x)]\;\; y' + [q_0(x)/\,q_n(x)]\;\; y \,\} = 0$$

donde las raíces de la EDLH no han cambiado y se obtienen de 2 ecuaciones:

1.- $q_n(x) = 0$ $\rightarrow$ ***Soluciones Singulares***

2.- $y^{(n)} + [q_{n-1}(x)/\,q_n(x)]\; y^{(n-1)} + \dots + [q_1(x)/\,q_n(x)]\; y' + [q_0(x)/\,q_n(x)]\; y = 0$ $\rightarrow$ ***Solución General***

La primera de las cuales genera las Soluciones Singulares y la segunda a la Solución General.

Hallar las Soluciones Singulares de la EDLH, consiste entonces en resolver una ecuación algebraica o trascendente (no diferencial) tema que se supone tratado por métodos previamente conocidos.

Entonces, el objetivo se centra en estudiar las propiedades de la Solución General de la EDLH y para ello puede tomarse sin perder generalidad a la EDLH:

$$L(y) := y^{(n)} + p_{n-1}(x)\; y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\; y' + p_0(x)\; y = 0$$

donde

$p_k(x) \;=\; q_k(x)/\,q_n(x) \qquad k \in <0 .. n>$ **_Nótese que:_** $p_n(x) \;=\; 1$

La Solución General esta compuesta por un conjunto de funciones, que como se verá mas adelante conforman un Subespacio Vectorial. La Solución General se generará entonces como combinación lineal de los elementos de una base de este Subespacio.

A cada elemento de dicho Subespacio (vector) se lo denomina Solución Particular, y se obtiene determinando las constantes de la combinación lineal que lo generan a partir de la base.

3.2.- S COMO ESTRUCTURA DE ESPACIO LINEAL (VECTORIAL)

Para estructurar a ***S*** como Espacio Lineal (o Vectorial) deben definirse:

1.-Un cuerpo de apoyo K
2.-Una ley de composición interna T : Suma
3.-Una ley de composición externa P : Producto

3.2.1.- DEFINICIÓN DEL CUERPO DE APOYO EN S

Para EDLH en ***C*** se elige como Cuerpo de Apoyo a:

Def: $(C\,,\; +_C\;,\cdot_C\,)\; \in EC$

ó en el caso de trabajarse con EDLH en ***R*** se elige como cuerpo de apoyo a: $(R\,,\; +_R\;,\cdot_R\,)\; \in EC$

3.2.2.- DEFINICIÓN DE LA SUMA EN S

La ley suma se define de la siguiente manera:

Def:
$$\begin{aligned} T : S \times S &\;\rightarrow S \\ (y_1\,, y_2) &\;\rightarrow y_1\, T\, y_2 : D_1 \;\rightarrow C \\ &\qquad\qquad x \;\rightarrow y_1(x) \;\; +_C \;\; y_2(x) \end{aligned}$$

Debe verificarse que la ley T suma así definida, sea de composición interna (LCI).

$$\begin{array}{ll} y_1 \in S & \Sigma\; p_k\; y_1^{(k)} \;=\; 0 \\ y_2 \in S & \underline{\Sigma\; p_k\; y_2^{(k)} \;=\; 0} \\ & \Sigma\; p_k\; (\, y_1^{(k)} + y_2^{(k)}\;) \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_1\; T\; y_2 \in S \end{array}$$

3.2.3.- DEFINICIÓN DEL PRODUCTO EXTERNO EN S

La ley producto externo se define:

Def:
$$\begin{aligned} P : C \times S &\;\rightarrow S \\ (\,k, y\,) &\;\rightarrow k\, P\, y : D_1 \;\rightarrow C \\ &\qquad\qquad x \rightarrow k \;\cdot_C\;\; y(x) \end{aligned}$$

Debe verificarse que la ley P producto externo así definida, sea de composición externa (LCE).

$$\begin{array}{ll} y \in S & \Sigma\; p_k\; y^{(k)} \;=\; 0 \\ & \underline{k\;.\;\; \Sigma\; p_k\; y^{(k)} \;=\; 0} \end{array}$$

$$\Sigma\ p_k\ (k\ .\ y)^{(k)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k\ P\ y \in S$$

3.2.4.- ESTRUCTURACIÓN DE S COMO ESPACIO LINEAL (VECTORIAL)

Teorema 1

$L(x) = 0$

$S := \{ y \mid D_1 = Sub(C) \to C$
$\qquad x \to y(x) : f = 0 \}$

$$\begin{array}{l} T : S \times S \ \to S \\ \quad (y_1 , y_2) \ \to y_1\ T\ y_2 : D_1 \ \to\ C \\ \qquad\qquad x \ \to\ y_1(x)\ +_C\ y_2(x) \\ P : C \times S \ \to S \\ \quad (k, y) \ \to\ k\ P\ y : D_1 \ \to\ C \\ \qquad\qquad x \to\ k\ \cdot_C\ y(x) \end{array} \qquad \Rightarrow (S\ \ C +_C \cdot_C\ \ T\ P) \in EEL$$

Este teorema se prueba directamente verificando los 8 axiomas que definen la Estructura de Espacio Lineal (Vectorial).

Obs.: La función que es el neutro de la suma es: $\sigma : D_1 \ \to\ C$
$\qquad x \to\ y(x) = 0$

3.3.- DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE FUNCIONES

3.3.1.- DEFINICIÓN DE WRONSKIANO

El análisis de la dependencia lineal ***[dl]*** e independencia lineal ***[il]*** de funciones cualesquiera (derivables hasta orden n–1) lleva a la definición de un determinante llamado Wronskiano en honor del matemático Wronski.

Dado un conjunto de n funciones

$\{ y_i \} := \{ y_1 , y_2 , \ldots , y_n \} \qquad i \in \langle 1 .. n \rangle$

Se define ***Wronskiano*** de las funciones $\{ y_1 , y_2 , \ldots , y_n \}$ en un punto x_0 del dominio D_1 al determinante $W(x_0)$

Def : ***Sea*** $\{ y_i \} := \{ y_1 , y_2 , \ldots , y_n \}$
$\qquad x_0 \in D_1$

$$W(\{ y_1 , y_2 , \ldots , y_n \} / x_0) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$W(\{ y_i \}/x_0)$ **:** ***Wronskiano de la funciones*** $\{ y_i \}$ ***en el punto*** x_0

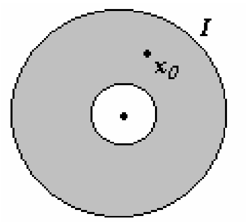
Eventualmente también se puede definir el Wronskiano sobre un conjunto de puntos ***I.***

W({ y_i }/x ∈I) : Wronskiano de la funciones { y_i } sobre el conjunto I

3.3.2.- TEOREMA DE IL DE FUNCIONES (NO NECESARIAMENTE SOLUCIONES DE LA EDLH)

Un teorema general sobre la ***il*** de funciones que ***no*** necesariamente son soluciones de una misma ED o en particular EDHL es el que se desarrolla a continuación:

Dado un Anillo ***I*** en el conjunto de los complejos ***C*** y un conjunto de **n** funciones cualesquiera ***{ y_i }*** continuas y derivables hasta el orden ***n–1*** y además existe un punto ***x_0*** de ***I*** donde el Wronskiano ***W(x_0)*** no se anule, entonces el conjunto de funciones ***{ y_i }*** es linealmente independiente.



Teorema 1

H_1 ***I ∈ Anillo en C***
H_2 ***{ y_i } ∈ C^{n-1} /I*** ***i ∈ <1 .. n>***
H_3 ***∃x_0 ∈I : W(x_0) ≠ 0*** ⇒ ***T.- { y_i } ∈ li***

I : Anillo en el campo complejo C
C^{n-1} /I : Funciones continuas hasta la derivada de orden n–1

D: Para la demostración del teorema se toma la combinación lineal:

$k_1\ y_1 + k_2\ y_2 + \ldots + k_n\ y_n = 0$ y se deriva n–1 veces. Queda ∀x∈I el sistema

$$\begin{cases} k_1\ y_1(x) + k_2\ y_2(x) + \ldots + k_n\ y_n(x) = 0 \\ k_1\ y_1'(x) + k_2\ y_2'(x) + \ldots + k_n\ y_n'(x) = 0 \\ \ldots \\ k_1\ y_1^{(n-1)}(x) + k_2\ y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + k_n\ y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

y en particular, para x_0 :

$$\begin{cases} k_1\ y_1(x_0) + k_2\ y_2(x_0) + \ldots + k_n\ y_n(x_0) = 0 \\ k_1\ y_1'(x_0) + k_2\ y_2'(x_0) + \ldots + k_n\ y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ k_1\ y_1^{(n-1)}(x_0) + k_2\ y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + k_n\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Resulta un sistema homogéneo donde el determinante Wronskiano W(x_0) por hipótesis no es nulo, y por lo tanto por Cramer resulta:

$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ es decir:

$$W(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} = \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{ y_i \} \in li$$

Es importante también tener presente el teorema contrarrecíproco (TCR) del Teorema 1.

Con las mismas Hipótesis H_1 y H_2 del Teorema 2, si un conjunto de n funciones $\{ y_i \}$ es linealmente dependiente ***(ld)***, entonces para todo punto x_0 de I se anula el Wronskiano $W(x_0)$ **.**

TCR Teorema 1

H_1 $\quad I \in$ *Anillo en* C
H_2 $\quad \{ y_i \} \in C^{n-1} /I$
$/T$ $\quad \{ y_i \} \in ld \qquad \Rightarrow \quad /H_3 \quad [\, /\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \,]$

$$\Updownarrow$$

$$[\, \forall x_0 \in I \quad W(x_0) = 0 \,] \Leftrightarrow [\, \forall x \in I \quad W(x) = 0 \,] =: W(x) \equiv 0$$

Obs 1: No es válida la proposición: Con las Hipótesis H_1 y H_2 del Teorema 1, si existe un punto x_0 de I donde el Wronskiano $W(x_0)$ se anula, entonces el conjunto de funciones $\{ y_i \}$ es linealmente dependiente. ***(No válido).***

H_1 $\quad I \in$ *Anillo en* C
H_2 $\quad \{ y_i \} \in C^{n-1} /I$
H_3' $\quad \exists x_0 \in I : W(x_0) = 0 \qquad /\!\!\Rightarrow \quad /T \quad \{ y_i \} \in ld$

Como ***tampoco son válidas*** las proposiciones recíproca y contradirecta del Teorema 2: Con las Hipótesis H_1 y H_2 del Teorema 2, si para todo punto x de I se anula el Wronskiano $W(x)$, (es decir es idénticamente nulo: $W(x) \equiv 0$), entonces el conjunto de funciones $\{ y_i \}$ es linealmente dependiente. ***(No válido).***

Proposición recíproca del Teorema 1

H_1 $\quad I \in$ *Anillo en* C
H_2 $\quad \{ y_i \} \in C^{n-1} /I$
$/H_3$ $\quad W(x) \equiv 0 := [\, \forall x \in I \quad W(x) = 0 \,] \qquad /\!\!\Rightarrow \quad /T \quad \{ y_i \} \in ld$

como lo demuestran los siguientes contraejemplos:

Contraejemplo 1:

$$\begin{cases} y_1 : I = [\,-1 \;\; 1\,] \to R \\ \qquad\qquad x \to x^3 \\ y_2 : I = [\,-1 \;\; 1\,] \to R \\ \qquad\qquad x \to |\,x\,|^3 = x^3 sg(x) \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} y_1' = 3\,x^2 \\ y_2' = 3\,x^2\; sg(x) \end{cases}$$

resultando el Wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 sg(x) \\ 3x^2 & 3x^2 sg(x) \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in I \quad W(x) = 0 \quad := \quad W(x) \equiv 0$$

Sin embargo si se analiza directamente la combinación lineal

$k_1\, x^3 + k_2\, |x|^3 = 0$ para $x=1$ y para $x=-1$ se tiene

$$\begin{cases} x = 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 + k_2 = 0 \\ x = -1 \quad \Rightarrow \quad -k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

que es un sistema homogéneo que tiene por única solución, a la trivial: $k_1 = k_2 = 0$ hecho, que implica que las funciones son li.

$k_1 = k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \{x^3, |x|^3\} \in$ li

entonces

$\forall\, x \in [-1\ 1]$ $W(x) = 0$ $\not\Rightarrow$ $\{x^3, |x|^3\} \in$ ld

Otro contraejemplo que verifica que la proposición reciproca no es válida es:

Contraejemplo 2:

$$\begin{cases} y_1 : I = [-1\ \ 1] \to R \\ \qquad x \to x^2 \qquad x \geq 0 \\ \qquad x \to 0 \qquad x < 0 \\ y_2 : I = [-1\ \ 1] \to R \\ \qquad x \to 0 \qquad x \geq 0 \\ \qquad x \to x^2 \qquad x < 0 \end{cases}$$

donde el Wronskiano es:

$$x \geq 0 \qquad W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, x \in I \quad W(x) = 0$$

$$x < 0 \qquad W(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$$

resultando el $W(x)$ idénticamente nulo aunque las dos funciones son li cómo se prueba haciendo la combinación lineal en $x = -1$ y $x = 1$ como en el Ejemplo 1.

Teorema 2.- Este teorema relaciona la il de un conjunto de funciones con el Wronskiano de las derivadas.

Si $\{y_i\}$ son funciones continuas hasta la derivada de orden n y el Wronskiano de las derivadas $W\{y_i'\}/x_0$ no es nulo entonces tampoco lo es el Wronskiano de las funciones $W\{y_i'\}/x_0$

H_1 $\quad I \in$ ***Anillo en C***
H_2 $\quad \{y_i\} \in C^{n-1}/I$
H_3 $\quad \exists x_0 \in I: \; W\{y_i'\}/x_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ ***T.-*** $\{y_i'\} \in li \quad \Rightarrow \quad$ ***T.-*** $\{y_i\} \in li$

I : Anillo en campo complejo C
C^{n-1}/I ***: Funciones continuas hasta la derivada de orden n***

D: Para la demostración del teorema se parte de la combinación lineal:

$k_1\, y_1 + k_2\, y_2 + \ldots + k_n\, y_n = 0$

y se deriva ***n*** veces. Queda $\forall\, x \in I$ queda el sistema homogéneo de ***n+1*** ecuaciones con ***n*** incógnitas .

$$\begin{cases} k_1\, y_1(x) + k_2\, y_2(x) + \ldots + k_n\, y_n(x) = 0 \\ k_1\, y_1'(x) + k_2\, y_2'(x) + \ldots + k_n\, y_n'(x) = 0 \\ \ldots \\ k_1\, y_1^{(n-1)}(x) + k_2\, y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + k_n\, y_n^{(n-1)}(x) = 0 \\ k_1\, y_1^{(n)}(x) + k_2\, y_2^{(n)}(x) + \ldots + k_n\, y_n^{(n)}(x) = 0 \end{cases}$$

y en particular, para x_0 , tomando las últimas ***n*** ecuaciones

$$\begin{cases} k_1\, y_1'(x_0) + k_2\, y_2'(x_0) + \ldots + k_n\, y_n'(x_0) = 0 \\ .. \\ k_1\, y_1^{(n-1)}(x_0) + k_2\, y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + k_n\, y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ k_1\, y_1^{(n)}(x_0) + k_2\, y_2^{(n)}(x_0) + \ldots + k_n\, y_n^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Resulta un sistema homogéneo donde el determinante Wronskiano $W\{y_i'\}/x_0 \neq 0$ por hipótesis no es nulo, y por lo tanto por Cramer resulta:

$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ es decir:

$$W\{y_i'\}/x_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \ldots \\ k_n \end{pmatrix} = \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{y_i'\} \in li \quad \Rightarrow \quad T.- \; \{y_i\} \in li$$

Obs: no es válida la proposición: Con las Hipótesis H_1 ***y*** H_2 del Teorema 2 , si existe un punto $x_0 \in I$ donde el Wronskiano $W\{y_i\}/x_0 \neq 0$ entonces el Wronskiano $W\{y_i'\}/x_0 \neq 0$ ***(Teorema no válido)***

Proposición no válida (no es exactamente el recíproco del Teorema 2)

$\boldsymbol{H_1}$ $\quad$ $\boldsymbol{I \in \text{Anillo en } C}$
$\boldsymbol{H_2}$ $\quad$ $\boldsymbol{\{ y_i \} \in C^n / I}$
$\boldsymbol{H_4}$ $\quad$ $\boldsymbol{\exists x_0 \in I : W\{ y_i \}/x_0 \neq 0 \quad \not\Rightarrow \quad T.- \quad \exists x_0 \in I : W\{ y_i' \}/x_0 \neq 0}$

Como lo demuestra el siguiente contraejemplo

Contraejemplo 1:

$$\begin{cases} y_1 : I = [\,-1 \;\; 1] \to R \\ \qquad\qquad x \to 1 \\ y_2 : I = [\,-1 \;\; 1] \to R \\ \qquad\qquad x \to x \end{cases}$$

donde el Wronskiano es:

$$W\{ y_i \}/x = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in I \quad W\{y_i\}/x = 1 \;\; := \;\; W\{y_i\}/x \equiv 1$$

$$W\{ y_i' \}/x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in I \quad W\{y_i\}/x = 0 \;\; := \;\; W\{y_i\}/x \equiv 0$$

<u>3.3.3. TEOREMA DE IL y DL PARA LAS SOLUCIONES DE EDLH</u>

El Teorema 1 del párrafo anterior trata de la independencia lineal (il) de funciones cualesquiera que ***no necesariamente*** son soluciones de una misma ED (o en particular EDHL)

Teorema 1

H_1 $\quad$ $I \in \text{Anillo en } C$
H_2 $\quad$ $\{ y_i \} \in C^{n-1} / I$
H_3 $\quad$ $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad T \quad \{ y_i \} \in li$

I : Anillo en el campo complejo C
C^{n-1} /I : Funciones derivables hasta orden n –1

Esto es, dado las hipótesis generales, H_1 [I ∈ Anillo en C] y H_2 [{ y_i } ∈ C^{n-1} /I] la hipótesis H_3 [$\exists x_0 \in I$: $W(x_0) \neq 0$] es ***condición suficiente***, pero ***no necesaria*** para la tesis T { y_i } ∈ li

Es decir como se ha visto ***no es válido*** el teorema recíproco.

Sin embargo, si se toma H_2' [{ y_i } ∈ S] , caso particular de H_2 del Teorema 2 , o sea las funciones { y_i } son soluciones de una EDLH, entonces ***si es válido*** el teorema recíproco.

Es decir: Si existe un punto $\boldsymbol{x_0}$ de ***I*** donde el Wronskiano $\boldsymbol{W(x_0)}$ no se anula, entonces esto es condición necesaria y suficiente para que el conjunto de funciones $\boldsymbol{\{ y_i \}}$ (soluciones de una EDLH) sea linealmente independiente.

Puede presentarse entonces el siguiente enunciado de un teorema que se demostrará como ***Teorema 5*** que tiene esta forma:

Teorema 5

H_1 $I \in$ ***Anillo en C***
H_2' $\{y_i\} \in S$

$$S := \{ y : I \to C$$

$$x \to y(x) : L(y) := \sum_{k=n}^{0} \Sigma\, p_k(x)\, y^{(k)} = 0 \}$$

H_3 $p_{n-1} \in H/I$
H_4 $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\ \forall x \in I \quad W(x) \neq 0\ ] =: W(x) \not\equiv 0 \quad \Leftrightarrow$ ***T.-*** $\{y_i\} \in li$

S : Conjunto de soluciones de la EDDT

Para la demostración de este Teorema 5 se demostrará previamente los Teoremas 3 y 4.

Teorema 3 Teorema de Liouville

Dado un Anillo ***I*** en el conjunto de los complejos ***C*** y un conjunto de ***n*** funciones $\{y_i\}$ soluciones de una ***EDLH L(y)=0,*** cuyo coeficiente de la derivada $y^{(n-1)}$: p_{n-1} es una función holomorfa sobre I, entonces se verifica la fórmula de Liouville que relaciona W(x) con $W(x_0)$ $W(x) = W(x_0)\ \exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\, dx\ ]$

Teorema 3

H_1 $I \in$ ***Anillo en C***
H_2' $\{y_i\} \in S$
H_3 $p_{n-1} \in H/I \quad \Rightarrow \quad W(x) = W(x_0)\ \exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\, dx\ ]$

D: Las funciones $\{y_i\} \in S$ son entonces soluciones de la EDLH.

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = 0$$

$$p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = -\, y^{(n)}$$

se plantea entonces el sistema de ecuaciones lineales algebraicas :

$$\begin{cases} p_{n-1}(x)\ y_1^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\ y_1' + p_0(x)\, y_1 = -\, y_1^{(n)} \\ p_{n-1}(x)\ y_2^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\ y_2' + p_0(x)\, y_2 = -\, y_2^{(n)} \\ \dots \\ p_{n-1}(x)\ y_n^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\ y_n' + p_0(x)\, y_n = -\, y_n^{(n)} \end{cases}$$

el determinante de los coeficientes es el Wronskiano W(x)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \dots & y_n' & y_n \end{vmatrix}$$

derivando este determinante por columnas se obtiene W'(x)

$$\boldsymbol{W'(x)} = \begin{vmatrix} y_1^{(n)} & y_1^{(n-2)} & \dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-2)} & \dots & y_n' & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n' & y_n \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \dots & y_1' & y_1' \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_2' & y_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \dots & y_n' & y_n' \end{vmatrix}$$

salvo el primer determinante todos los restantes son nulos por tener dos columnas iguales, por lo tanto queda:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(n)} & y_1^{(n-2)} & \dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-2)} & \dots & y_n' & y_n \end{vmatrix}$$

Pero justamente en el sistema de ecuaciones lineales algebraico, arriba planteado la incógnita $p_{n-1}(x)$ se calcula por Cramer cómo el cociente de los determinantes:

$$p_{n-1}(x) = -W'(x) / W(x)$$

Integrando esta expresión queda:

$$W(x) = k \exp[-\int_a^x p_{n-1}(x)\, dx\,]$$

Para $x = x_0$

$$W(x_0) = k \exp[-\int_a^{x_0} p_{n-1}(x)\, dx\,]$$

De modo que, reemplazando k queda:

$$W(x) = W(x_0) \exp[-\int_{x_0}^x p_{n-1}(x)\, dx\,]$$

Que es la fórmula de Liouville que relaciona $W(x)$ con $W(x_0)$

Manteniendo las hipótesis ***H_1 H_2' H_3*** del Teorema de Liouville es fácil probar que si existe un punto x_0 del Anillo ***I*** donde se cumple que $W(x_0)$ no se anula, entonces esta proposición es condición necesaria y suficiente, para que el Wronskiano $W(x)$ no se anule en ningún punto de I.

Teorema 4

H_1 $\quad$ ***$I \in$ Anillo en C***
H_2' $\quad$ ***$\{ y_i \} \in S$***
H_3 $\quad$ ***$p_{n-1} \in H/I$***
H_4 $\quad$ ***$\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\forall x \in I \quad W(x) \neq 0] \quad =: W(x) \;/\!\!\equiv 0$***

D.- Como p_{n-1} es holomorfa en el Anillo I resulta

$$p_{n-1} \in H/I \quad \Rightarrow \quad \exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\, dx \in H/I$$

y además como

$$\forall\, x \in C \quad \exp(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\, dx \neq 0$$

de la fórmula de Liouville suponiendo $[\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0]$ se obtiene la tesis

$$W(x) = W(x_0) \exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\, dx\ ]$$

$$\neq 0 \qquad \neq 0$$

$$\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow [\forall\, x \in I \quad W(x) \neq 0] =: W(x) \;/\!\!\equiv 0$$

El TCR del Teorema 4 es entonces:

TCR Teorema 4

H_1 $\quad$ ***$I \in$ Anillo en C***
H_2' $\quad$ ***$\{ y_i \} \in S$***
H_3 $\quad$ ***$p_{n-1} \in H/I$***
H_4 $\quad$ ***$W(x) \equiv 0 \;:=\; [\forall x \in I \quad W(x) = 0] \quad \Leftrightarrow \quad \exists x_0 \in I : W(x_0) = 0$***

Retornando al Teorema 5 su enunciado es:

Dado las hipótesis generales, H_1 [$I \in$ Anillo en **C**] y H_2' [$\{ y_i \} \in S$] es decir las funciones $\{ y_i \}$ son soluciones de una EDLH con la restricción expuesta en H_3 [$p_{n-1} \in H/I$] entonces la proposición
H_4 [$\exists x_0 \in I$: $W(x_0) \neq 0$] es condición necesaria y suficiente de que el conjunto $\{ y_i \}$ sea linealmente independiente.

Teorema 5

H_1 $\quad$ ***$I \in$ Anillo en C***
H_2' $\quad$ ***$\{ y_i \} \in S$***

$$S := \{\, y : I \to C$$

$$x \to y(x) : L(y) := \sum_{k=n}^{0} \;\Sigma\; p_k(x)\, y^{(k)} = 0 \,\}$$

H₃ $\quad p_{n-1} \in H/I$

$H_4 \quad \exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\, \forall x \in I \quad W(x) \neq 0 \,] =: W(x) \not\equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad T.- \quad \{ y_i \} \in li$

S : Conjunto de soluciones de la EDLH

D: La ***condición suficiente*** es obvia porque es un caso particular del Teorema 2:

$\{ y_i \} \in S \;\Rightarrow\; \forall k \in \langle 0..n \rangle \;\; \exists\, y_i^{(k)}$

y además todas las soluciones y_i y sus derivadas $y_i^{(k)}$ hasta el orden $n-1$ son continuas: o sea que H_2' es un caso particular de H_2 :

$$H_2' \subset H_2$$

H_1
H_2'
$H_4 \qquad \exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad T \quad \{ y_i \} \in li$

Para la demostración de la ***condición necesaria*** se recordará el sistema de ecuaciones lineales algebraicas formado con el sistema $\{ y_i \} \in li$:

$$\begin{cases} p_{n-1}(x)\; y_1^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\; y_1' + p_0(x)\, y_1 = -\, y_1^{(n)} \\ p_{n-1}(x)\; y_2^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\; y_2' + p_0(x)\, y_2 = -\, y_2^{(n)} \\ \dots \\ p_{n-1}(x)\; y_n^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\; y_n' + p_0(x)\, y_n = -\, y_n^{(n)} \end{cases}$$

de aquí pueden despejarse de los $p_k(x)$ para formar la EDLH

$\forall\, k \in \langle 0..\, n-1 \rangle \qquad p_k(x) = \Delta_k / W(x)$

donde $W(x)$ es el Wronskiano y

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \dots & y_1^{(k+1)} & -y_1^{(n)} & \dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_2^{(k+1)} & -y_2^{(n)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \dots & y_n^{(k+1)} & -y_n^{(n)} & \dots & y_n' & y_n \end{vmatrix}$$

Si $\exists\, \Delta_k \neq 0$ y $W(x) \equiv 0 \;\Rightarrow\; \nexists\, p_k(x) = \Delta_k / W(x) \;\Rightarrow\; \nexists\, L(y)$

Entonces se enuncia

H_1
H_3
$/H_4 \quad W(x) \equiv 0$
$T \quad \{ y_i \} \in li \quad \Rightarrow \quad \nexists\, p_k(x) = \Delta_k / W(x) \quad \Rightarrow \quad \nexists\, L(y) \quad \Rightarrow \quad /H_2' \quad \{ y_i \} \notin S$

Si por otro lado $\forall\, k \;\; \Delta_k = 0$ entonces todos los $p_k(x)$ son indeterminados y por lo tanto se llega al absurdo que los $\{ y_i \} \in li$ serían solución de cualquier EDLH.

Recordando $H_1 \wedge H_3 \wedge /H_4 \wedge T \wedge H_2' = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad H_1 \wedge H_3 \wedge H_2' \wedge T \wedge /H_4 = \varnothing$

Una proposición contrarrecíproca de la anterior da la condición necesaria:

H_1
H_3
H_2' $\{ y_i \} \in S$
T $\{ y_i \} \in li \quad \Rightarrow \quad H_4 \quad W(x) \equiv 0$

Obs 1: Otra forma de demostrar la condición necesaria es observando que :

$p_{n-1}(x) = - W'(x) / W(x)$

y por ende si $W(x) \equiv 0 \Rightarrow W'(x) = 0$

siendo entonces $p_{n-1}(x)$ arbitrario y por lo tanto tampoco la ecuación diferencial que tenga por soluciones a las $\{ y_i \} \in li$ es única.

Obs 2: Nótese que si :

$y_k^{(n)} \in C \Rightarrow \Delta_k \in C$
$\Rightarrow p_k(x) \in C$

El enunciado del TCR del Teorema 5 es entonces:

Manteniéndose las hipótesis generales, H_1 [$I \in$ Anillo en ***C***], H_2' [$\{ y_i \} \in S$] y H_3 [$p_{n-1} \in H/I$] entonces si el conjunto $\{ y_i \}$ es linealmente dependiente, esto es condición necesaria y suficiente para que el Wronskiano W(x) sea idénticamente nulo.

TCR Teorema 5

H_1 $I \in$ ***Anillo en C***
H_2' $\{ y_i \} \in S$
$S := \{ y : I \to C$

$$x \to y(x) : L(y) := \sum_{k=n}^{0} \Sigma\, p_k(x)\, y^{(k)} = 0 \}$$

H_3 $p_{n-1} \in H/I$
$/H_4$ $\exists x_0 \in I : W(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\ \forall x \in I \quad W(x) = 0\ ] =: W(x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad /T.- \quad \{ y_i \} \in ld$

En resumen se pueden reunir los resultados de los Teoremas 3, 4 y 5 englobados en el Teorema 6.

Teorema 6

H_1 $I \in$ ***Anillo en C***
H'_2 $\{ y_i \} \in S$
$S := \{ y : I \to C$

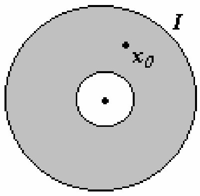
$$x \to y(x) : L(y) := \sum_{k=n}^{0} p_k(x) y^{(k)} = 0 \}$$

H_3 $p_{n-1} \in H / I$

$$\Rightarrow \quad W(x) = W(x_0) \; exp[- \int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\, dx]$$

H_4 $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\ \forall x \in I \quad W(x) \neq 0\ ] \quad =: \quad W(x) \not\equiv 0 \quad \Leftrightarrow$ ***T.-*** $\{ y_i \} \in li$

S : Conjunto de soluciones de la EDDT



3.4.- DIMENSION DEL CONJUNTO S

La dimensión del conjunto ***S*** de soluciones generales de una EDLH es el orden ***n*** de la EDLH.

Teorema 7

H_1 $S := \{ y : I \to C$

$$x \to y(x) : L(y) := \sum_{k=n}^{0} \Sigma\, p_k(x)\, y^{(k)} = 0 \ \}$$

H_2 $\dim(S) = n \quad \Leftrightarrow \quad \exists \ \ L(y) := \sum_{k=n}^{0} p_k(x)\, y^{(k)} = 0$ ***única***

D: [$\Leftarrow$] Se comienza demostrando la condición necesaria partiendo de llamar p el valor de la dim(S)

Se denomina p a la dimensión de S

Dim(S) := p

I.- Si se supone que p < n se llega a un absurdo:

$p < n \quad \Leftrightarrow \quad \exists \ \{y_1 \ \dots \ y_p\} \in li$

$\{y_1 \ \dots \ y_p \ \dots \ y_n\} \in ld$

Por el Teorema 5

$W(x) = 0 \Rightarrow\ \not\exists\ p_k(x)$

Al no existir los coeficientes no puede construirse la ecuación diferencial L(y) = 0 lo cual es absurdo.

II.- Si se supone que p > n también se llega a un condición imposible

$p > n \Leftrightarrow \exists\ \{y_1 \ \dots \ y_p\} \in li$

tomando el sistema de ***n+1*** ecuaciones:

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y_1^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\, y_1' + p_0(x)\, y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y_2^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\, y_2' + p_0(x)\, y_2 = 0 \\ \dots \\ y_n^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y_n^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\, y_n' + p_0(x)\, y_n = 0 \\ y_{n+1}^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y_{n+1}^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\, y_{n+1}' + p_0(x)\, y_{n+1} = 0 \end{cases}$$

el determinante de los coeficientes, es el Wronskiano W(x)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n+1}^{(n)} & y_{n+1}^{(n-1)} & y_{n+1}^{(n-2)} & \dots & y_{n+1}' & y_{n+1} \end{vmatrix} \neq 0$$

es ***no*** nulo porque $\{y_1 \ \dots \ y_{n+1}\} \in li$ y por lo tanto el sistema anterior es homogéneo tiene por única solución la trivial, es decir:

$\{ 1 ,\ p_{n-1}(x) ,\ \dots ,\ p_1(x) ,\ p_0(x) \} = \{ 0 , 0 ,\ \dots ,\ 0 , 0 \}$

Lo cual es absurdo. En consecuencia, queda cómo única posibilidad

p = n

[⇒] Una demostración de la condición suficiente es:

$\dim(S) = n \ \Rightarrow\ \{y_1 \ \dots \ y_n\} \in li$

$\Rightarrow\ \forall x \in I \quad W(x) \neq 0$

entonces el sistema

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\, y_1' + p_0(x)\, y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\, y_2' + p_0(x)\, y_2 = 0 \\ \ldots \\ y_n^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y_n^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\, y_n' + p_0(x)\, y_n = 0 \end{cases}$$

tiene solución única por Cramer

$p_k(x) = \Delta_k / W(x)$

por lo tanto existe $L(y) = 0$ y es única.

Obs: La solución general de $L(y) = 0$ es entonces una base de ***S*** con ***n*** constantes arbitrarias

$$y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_{n-1} y_{n-1} + a_n y_n$$

3.5.- EL PROBLEMA DE CAUCHY

El problema de Cauchy tiene por objetivo, asegurar la existencia y hallar una Solución Particular de la Solución General de la EDLH, que satisfaga para un determinado punto x_0 dado, del dominio de la función L(y) , valores prefijados de y y' y'' ... $y^{(n)}$ llamados condiciones de contorno:

Es decir: $\forall k \in \langle 0 .. n\text{-}1 \rangle \qquad y^{(k)}(x_0) = b_k$

que están especificadas en la Hipótesis 2 del enunciado.

Teorema 8

H_1 $\quad S := \{ y : I \to C$

$$x \to y(x) : L(y) := \sum_{k=n}^{0} \Sigma\, p_k(x)\, y^{(k)} = 0 \}$$

$$H_2 \quad \begin{aligned} y(x_0) &= b_0 \\ y'(x_0) &= b_1 \\ y''(x_0) &= b_2 \\ &\ldots \\ y^{(k)}(x_0) &= b_k \\ &\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= b_{n-1} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad \exists\, y \in S : \; y^{(k)}(x_0) = b_k \quad y \in \text{única}$$

El problema de Cauchy está definido por las hipótesis de éste teorema.

La solución general de la EDLH está dada por la combinación lineal:

$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_{n-1} y_{n-1}(x) + a_n y_n(x)$

derivando n–1 veces se completa el sistema

$$\begin{cases} y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_{n-1} y_{n-1}(x) + a_n y_n(x) = 0 \\ y'(x) = a_1 y_1'(x) + a_2 y_2'(x) + \dots + a_{n-1} y_{n-1}'(x) + a_n y_n'(x) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x) = a_1 y_1^{(n-1)}(x) + a_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x) + a_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Cuyo valor en x_0 es

$$\begin{cases} b_0 = a_1 y_1(x_0) + a_2 y_2(x_0) + \dots + a_{n-1} y_{n-1}(x_0) + a_n y_n(x_0) = 0 \\ b_1 = a_1 y_1'(x_0) + a_2 y_2'(x_0) + \dots + a_{n-1} y_{n-1}'(x_0) + a_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ b_{n-1} = a_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + a_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + a_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) + a_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Por el Teorema 5 se tiene

$y_k \in S$
$\{y_1 \dots y_n\} \in S \quad \Rightarrow \quad \forall x \in I \quad W(x) \neq 0$

y por lo tanto $W(x_0) \neq 0$ lo que implica que el sistema tiene solución única.

$a_k(x) = A_k / W(x_0)$

donde

$$A_k = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_{k-1}(x_0) & b_0 & y_{k+1}(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_{k-1}'(x_0) & b_1 & y_{k+1}'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_{k-1}^{(n-1)}(x_0) & b_{n-1} & y_{k+1}^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

y por lo tanto la solución particular que satisface las condiciones del problema de Cauchy

$y(x) = [A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \dots + A_{n-1} y_{n-1}(x) + A_n y_n(x)] / W(x_0)$

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} [A_k / W(x_0)] \; y_k(x)$$

4.- ECUACIONES DIFERENCIALES EQUIVALENTES O MODIFICADAS

4.1.- DEFINICIÓN

Dos ecuaciones diferenciales son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Def: $[\, f_1 = 0\,] \sim [\, f_2 = 0\,] \quad := \quad [\, S_1/f_1 = 0\,] = [\, S_2/f_2 = 0\,]$

$[\, f_1 = 0\,] \sim [\, f_2 = 0\,]$ ***: Ecuaciones Diferenciales equivalentes o modificadas***

Obs: La equivalencia de la ED es relativa con respecto a un determinado conjunto (o subconjunto) de soluciones.

La equivalencia puede ser restringida por ejemplo a las soluciones generales, sin tomar en cuenta soluciones singulares. Por ejemplo las EDLH ya vistas

$$q_n(x)\, y^{(n)} + q_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + q_1(x)\, y' + q_0(x)\, y = 0$$

$$y^{(n)} + [q_{n-1}(x)/ q_n(x)]\, y^{(n-1)} + \ldots + [q_1(x)/ q_n(x)]\, y' + [q_0(x)/ q_n(x)]\, y = 0$$

son equivalentes salvo las soluciones singulares de la primera correspondientes a $q_n(x) = 0$

La aplicación de los conceptos de equivalencia en ED permite simplificar el estudio de las mismas por reducción a otras formas ya estudiadas o canónicas.

Son ejemplo de ello:

1.- La eliminación de las soluciones singulares en las EDLH como se menciona en la observación anterior.
2.- Los métodos de reducción del orden.
3.- Los cambios de variables en las ecuaciones de variables separables, como $y' = p$
4.- El método de solución para las ecuaciones de Bernoulli y de Ricatti.
5.- Las ecuaciones autoadjuntas del Teorema de Sturm Liouville.

4.2.- ECUACIONES MODIFICADAS POR CAMBIO DE VARIABLE

4.2.1.- CAMBIO DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

4.2.1.1.- EXPRESIÓN GENERAL

Siempre con el fin de simplificar una Ecuación Diferencial, o reducirla a formas ya conocidas, el planteo que se hace es cambiar la variable dependiente x por otra z ligadas por una biyección $x \to z = f(x)$ que tiene que ser además derivable 2 veces.

Teorema

$$\begin{array}{ll} H_1 & f : Sub(C) \to Sub(C) \\ & \quad x \to z = f(x) : f \in biy \ \wedge \exists\ z_{xx} \\ & x = f^{-1}(z) \to z \\ & \quad y(x) \to Y(z) \end{array}$$

$$H_2 \quad y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y'' + \left[-\frac{x_{zz}''}{x_z'} + p\, x'_z \right] Y' + q\, (x'_z)^2\, Y = 0$$

D_1: f: $y(x) \to Y(z)$

$$y'_x = Y'_z\, z'_x$$
$$y''_{xx} = Y''_{zz}\, (z'_x)^2 + Y'_z\, z''_{xx}$$

$Y''_{zz}\ (z'_x)^2 + Y'_z\ z''_{xx} + p(f^{-1}(z))\ Y'_z\ z'_x + q(f^{-1}(z))\ Y(z) = 0$

pero además :

$$z'_x = \frac{1}{x_z'}$$

$$z''_{xx} = \frac{dz_x'}{dx} = \frac{d(\frac{1}{x_z'})}{dx}\ z'_x = -\frac{x_{zz}''}{(x_z')^3}$$

reemplazando en la ecuación original se obtiene

$$Y'' + [-\frac{x_{zz}''}{x_z'} + p\ x'_z]\ Y' + q\ (x'_z)^2\ Y = 0$$

D₂: Otra forma de demostrar la misma expresión es:

f: $y(x) \rightarrow Y(z)$

$y'_x = Y'_z\ z'_x$

$$y'_x = \frac{Y_z'}{x_z'}$$

$$y''_{xx} = \frac{Y_{zz}''\ x_z' - Y_z'\ x_{zz}''}{(x_z')^2}\ \frac{1}{x_z'}$$

de donde se llega a la misma expresión anterior:

$$Y'' + [-\frac{x_{zz}''}{x_z'} + p\ x'_z]\ Y' + q\ (x'_z)^2\ Y = 0$$

Ejemplo

$x \rightarrow z = x^s$

$x = z^{\frac{1}{s}} \leftarrow z$

$(z'_x)^2\ Y''_{zz} + [\ z''_{xx} + p(f^{-1}(z))\ z'_x\ ]\ Y'_z + q(f^{-1}(z))\ Y(z) = 0$

$(s\ x^{s-1})^2\ Y''_{zz} + [\ s\ (s-1)\ x^{s-2} + p\ s\ x^{s-1}\ ]\ Y'_z + q\ Y(z) = 0$

$s^2\ z^{2-\frac{2}{s}}\ Y'' + [\ s\ (s-1)\ z^{1-\frac{2}{s}} + p\ s\ z^{1-\frac{1}{s}}\ ]\ Y' + q\ Y = 0$

$Y'' + [[(s-1)\ s^{-1}\ ]\ z^{-1} + p\ s^{-1}\ z^{-1+\frac{1}{s}}\ ]\ Y' + q\ s^{-2}\ z^{-2+\frac{2}{s}}\ Y = 0$

4.2.2.- CAMBIO DE LA VARIABLE DEPENDIENTE

4.2.2.1.- EXPRESIÓN GENERAL y = z(x) q(x)

Este cambio de variable es del mismo tipo que el empleado por Lagrange para hallar la Solución de las Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas.

Teorema

H_1 ***y" + p(x) y' + q(x) y = 0***
H_2 ***y(x) = z(x) g(x)*** $\Rightarrow$ ***z" g + z' [2 g' + p g] + z [g" + p g' + q g] = 0***

D_1: y = z g
y' = z' g + z g'
y" = z" g + 2 z' g' + z g"

Reemplazando en la EDLH

z" g + 2 z' g' + z g" + p [z' g + z g'] + q z g = 0
z" g + z' [2 g' + p g] + z [g" + p g' + q g] = 0

En particular se puede emplear el resultado anterior para 2 expresiones simplificadas.

<u>*4.2.2.2.- SIMPLIFICACIONES*</u>

***Simplificación I*:** Si g es una Solución Particular conocida, entonces

[g" + p g'+ q g] = 0

y por lo tanto

z" g + z' [2 g' + p g] = 0

queda una Ecuación Diferencial de Primer de Variables Separables , que resuelta lleva a la Solución General. Esto no es otra cosa que el Método de Reducción del Orden que se desarrolla más adelante.

$$\frac{z''}{z'} = -[\,2\,\frac{g'}{g} + p]$$

$$L(z') = -2\,L(g) - \int p(x) + L(b)$$

$$z' = b\,g^{-2}\,e^{-\int p(x)}$$

$$z = b\int g^{-2}\,e^{-\int p(x)} + a$$

Siendo a y b constantes arbitrarias se obtiene entonces la solución general

$$z = b\,g\int g^{-2}\,e^{-\int p(x)} + a\,g$$

Simplificación II: Si se desea anular el coeficiente de z'

[2 g' + p g] = 0

$$\frac{g'}{g} = -\frac{p}{2}$$

$$Lg = -\frac{1}{2}\int p(x) + La$$

$$g = a\, e^{-\frac{1}{2}\int p(x)}$$

Resulta

$z''\, g + z\,[\, g'' + p\, g' + q\, g\,] = 0$

$g = a\, e^{-\frac{1}{2}\int p(x)}$

$g' = a\, e^{-\frac{1}{2}\int p(x)} \left(-\frac{1}{2}\, p\right)$

$g'' = a\, e^{-\frac{1}{2}\int p(x)} \left(-\frac{1}{2}\, p\right)^2 + a\, e^{-\frac{1}{2}\int p(x)} \left(-\frac{1}{2}\, p'\right)$

$a\, e^{-\frac{1}{2}\int p(x)}\, [\, z'' + z\, [\, (-\frac{1}{2} p\,)^2 + (-\frac{1}{2} p'\,) + p\, (-\frac{1}{2} p\,) + q\,]\,] = 0$

$z'' + z\, [\, -\frac{1}{4}\, p^2 - \frac{1}{2}\, p' + q\,] = 0$

<u>*4.2.2.3.- CAMBIO DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE y'/y = r*</u>

Existe una equivalencia entre la EDLH de Segundo Orden y la de Ricatti

$y'' + p(x)\, y' \;\; q(x)\, y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z' + z^2 + p\, z + q = 0$ (Ricatti)

D.- Estas ecuaciones están ligadas por el cambio de variables:

$\frac{y'}{y} = z$

$y' = z\, y$

$y'' = z'\, y + z\, y'$

$z'\, y + z\, y' + p\, [\, z\, y\,] + q\, y = 0$

$z' + z^2 + p\, z + q = 0$ (Ricatti)

<u>*4.2.2.4.- CASOS PARTICULARES DEL CAMBIO DE LA VARIABLE DEPENDIENTE*</u>

H_1 $\;\; y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$

H_2 $\;\; y(x) = z(x)\; g(x) \quad : g(x) = x^s \quad \Rightarrow \quad z'' + z'\, [\, 2\, s\, x^{-1} + p\,] + z\, [\, s\, (s-1)\, x^{-2} + p\, s\, x^{-1} + q\,] = 0$

D.- Aplicando el teorema del cambio de la variable dependiente con ***$g(x) = x^s$***

$z''\, x^s + z'\, [\, 2\, s\, x^{s-1} + p\, x^s\,] + z\, [\, s\, (s-1)\, x^{s-2} + p\, s\, x^{s-1} + q\, x^s\,] = 0$

$z'' + z'\, [\, 2\, s\, x^{-1} + p\,] + z\, [\, s\, (s-1)\, x^{-2} + p\, s\, x^{-1} + q\,] = 0$

<u>*4.3.- REDUCCIÓN DEL ORDEN*</u>

Este teorema permite reducir el orden de una EDLH en una unidad, a partir de conocer una solución y_1. Es decir hallar una EDLH equivalente de un orden $n - 1$. La nueva ecuación diferencial tiene un espacio de soluciones generada por una base complementaria de y_1.

Esto es un teorema análogo al teorema de reducción del orden de polinomios, a partir de una raíz conocida.
Se presenta en primer lugar el teorema para ecuaciones de segundo orden, y luego se plantea el caso general para orden n.

4.3.1.- REDUCCIÓN DEL ORDEN PARA EDLH DE ORDEN 2

En este caso de las EDLH de orden 2, conocida una primera solución y_1 al reducir el orden de la ecuación a 1, se obtiene también una segunda solución y_2 li.

Teorema de Reducción de orden para el caso de orden n = 2

H_1 $\quad S := \{ y : I \to C$
$\qquad\qquad x \to y(x) : L(y) := y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \}$
H_2 $\quad y_1 \in S \,/\, L(y_1) = 0$
H_3 $\quad y = u\, y_1$ $\qquad \Rightarrow$ T_1.- $\quad L_1(u) := y_1\, u'' + [\, p\, y_1' + 2\, y_1]\, u' = 0$

T_2.- $\quad y_2(x) = y_1 \displaystyle\int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)}\, dx$

T_3.- $\quad \{y_1\, y_2\} \in Base/S$

Lema I.- Ecuación equivalente por reducción del orden

D.- Planteando como solución a $y(x) = u(x)\, y_1(x)$ y se deriva 2 veces:

$$\begin{aligned} y &= u\, y_1 \\ y' &= u\, y_1' + u'\, y_1 \\ y'' &= u\, y_1'' + 2\, u'\, y_1' + u''\, y_1 \end{aligned}$$

introduciendo estas expresiones en la EDLH de orden 2, y luego sumando queda:

$$\begin{aligned} q\, y &= u\, q\, y_1 \\ p\, y' &= u\, p\, y_1' + u'\, p\, y \\ y'' &= u\, y_1'' + 2\, u'\, y_1' + u''\, y_1 \\ \hline 0 &= u\, \underbrace{[\, q\, y_1 + p\, y_1' + y_1]}_{[\ =0\ ]} + u'\, [\, p\, y_1 + 2\, y_1'] + u''\, y_1 \end{aligned}$$

Al sumar el primer miembro es nulo y también lo es el primer término del segundo miembro por H_2, quedando

$L_1(u) := y_1\, u'' + [\, p\, y_1' + 2\, y_1]\, u' = 0$

Que es una EDLH de grado 2 pero de orden 1. Se ha reducido el orden en una unidad.

Lema II.- Segunda Solución de la EDLH de segundo orden

D.- Se resuelve la última EDLH

$$\frac{u''}{u'} = -[\ p + 2\frac{y_1'}{y_1}\ ]$$

$$L(u') = -\int p(x) - 2\,L(y_1)$$

$$u' = \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int p(x)}$$

$$y_2\,(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int p(x)}\,dx$$

Lema III.- Independencia Lineal de la Segunda Solución de la EDLH de segundo orden obtenida.

D.- Es la tesis propuesta que se obtiene calculando el Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & uy_1 \\ y_1' & uy_1'+u'\,y_1 \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & u'\,y_1 \end{vmatrix}$$

$$W = y_1^2\ u' = y_1^2\,\frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int p(x)}$$

$$W = e^{-\int p(x)} \neq 0$$

Como la exponencial nunca se anula $\quad W \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \{y_1\ y_2\} \in li \quad \Rightarrow \quad \{y_1\ y_2\} \in Base/S$

4.3.2.- REDUCCIÓN DEL ORDEN PARA EDLH DE ORDEN n

El caso general de reducción del orden de una EDLH consiste en obtener a otra EDLH pero de un orden menor en una unidad.

Es decir a partir de una EDLH de orden ***n*** de la cual se conoce una solución y_1 se halla otra EDLH de orden ***n – 1*** equivalente en cuanto a la base complementaria de y_1.

Obs: este teorema es análogo a la reducción del orden de un Polinomio, a partir de una raíz conocida

Teorema de Reducción de orden para el caso de orden n

H_1 $\quad S := \{ y : I \to C$

$$x \to y(x) : L(y) := \sum_{k=n}^{0} p_k(x)\, y^{(k)} = 0 \}$$

H_2 $\quad y_1 \in S \,/\, L(y_1) = 0$

H_3 $\quad y = u\, y_1 \quad \wedge \quad y_k = u_k\, y_1 \quad k \in \langle 2 .. n \rangle$

$$\Rightarrow \; T_1.- \quad L_1(u) := \sum_{k=n}^{1} q_k(x)\, u^{(k)} = 0$$

$$: q_k(x) := [\, C(k,k)\, p_k y_1 + C(k+1,k)\, p_{k+1} y_1' + \ldots + C(n,k)\, p_n\, y_1^{(n-k)} \,]$$

$$T_2.- \quad \{y_1 \ldots y_n\} \in Base/S$$

Lema I.- Ecuación equivalente por reducción del orden

D.- Planteando como solución a $y(x) = u(x)\, y_1(x)$ y se deriva n veces:

$$\begin{aligned}
y &= u\, y_1 \\
y' &= u\, y_1' + u'\, y_1 \\
y'' &= u\, y_1'' + 2\, u'\, y_1' + u''\, y_1 \\
&\ldots \\
y^{(n)} &= u\, y_1^{(n)} + C(n,1)\, u'\, y_1^{(n-1)} + C(n,2)\, u''\, y_1^{(n-2)} + \ldots + u^{(n)}\, y_1
\end{aligned}$$

introduciendo estas expresiones en la EDLH de orden n, y luego sumando queda:

$$\begin{aligned}
p_0\, y &= u\, p_0\, y_1 \\
p_1\, y' &= u\, p_1\, y_1' + u'\, p_1 y_1 \\
p_2\, y'' &= u\, p_2\, y_1'' + 2\, u'\, p_2 y_1' + u''\, p_2\, y_1 \\
&\ldots \\
p_n\, y^{(n)} &= u\, p_n\, y_1^{(n)} + C(n,1)\, u'\, p_n\, y_1^{(n-1)} + C(n,2)\, u''\, p_n\, y_1^{(n-2)} + \ldots + u^{(n)}\, p_n\, y_1 \\
\hline
0 &= u\, \underbrace{[\, p_0 y_1 + p_1 y_1' + p_2 y_1'' + \ldots + p_n\, y_1^{(n)} \,]}_{=0} + \\
&+ u'\, [\, p_1 y_1 + 2\, p_2 y_1' + \ldots + C(n,1)\, p_n\, y_1^{(n-1)} \,] + \\
&+ u''\, [\, p_2 y_1 + 3\, p_3 y_1' + \ldots + C(n,2)\, p_n\, y_1^{(n-2)} \,] + \\
&\ldots \\
&+ u^{(n-1)}\, [\, p_{n-1}\, y_1 + C(n,n-1)\, y_1' \,] + \\
&+ u^{(n)}\, [\, p_n\, y_1 \,]
\end{aligned}$$

Al sumar el primer miembro es nulo y también lo es el primer término del segundo miembro por H_2.

Queda conformada una EDLH en $u'\, u'' \ldots u^{(n)}$ y cuyos coeficientes especificados en la expresión anterior se denominarán q_k

$$q_k(x) := [\, C(k,k)\, p_k\, y_1 + C(k+1,k)\, p_{k+1}\, y_1' + \ldots + C(n,k)\, p_n\, y_1^{(n-k)} \,]$$

$L_1\,(u) := \quad q_n(x)\, u^{(n)} + q_{n-1}(x)\, u^{(n-1)} + \ ... + q_2(x)\, u'' + q_1(x)\, u' = 0$

que es una EDLH de grado n pero de orden $n-1$

$L_1\,(u) := \sum_{k=n}^{1} q_k(x)\, u^{(k)} = 0$

Esta última EDLH tiene entonces n–1 soluciones li en u_k' que integradas permiten obtener n–1 funciones u_k que a su vez multiplicadas por y_1 dan las soluciones $y_2 \ldots y_n$.

$$
\begin{array}{lllll}
 & \int & & .\, y_1 & \\
u_2' & \rightarrow & u_2 & \rightarrow & y_2 = u_2\, y_1 \\
u_3' & \rightarrow & u_3 & \rightarrow & y_3 = u_3\, y_1 \\
\ldots & & & & \\
u_n' & \rightarrow & u_n & \rightarrow & y_n = u_n\, y_1
\end{array}
$$

Estas soluciones son li como se analizará a continuación

Obs: Nótese que u ***no*** es constante [$u \neq cte$] porque en ese caso sería $u' = u'' = \ ... = u^{(n)} = 0$ y en ese caso no se puede reducir el orden.

Lema II.- Independencia Lineal de las soluciones de la EDLH de orden n –1 obtenida por reducción del orden.

D.- La independencia lineal se demuestra a partir del Wronskiano de sus derivadas. Recordando:

Teorema 2.-

H_1 $\quad I \in$ *Anillo en C*

H_2 $\quad \{ y_i \} \in C^{n-1} / I$

H_3 $\quad \exists\, x_0 \in I : \ W\{ y_i' \}/x_0 \neq 0 \qquad \Rightarrow \quad$ *T.-* $\ \{ y_i' \} \in li \qquad \Rightarrow \quad$ *T.-* $\ \{ y_i \} \in li$

I : Anillo en campo complejo C

C^{n-1} /I : Funciones continuas hasta la derivada de orden n

Se demostrará que:

$W\{ u_k' \}/x_0 \neq 0 \qquad \Rightarrow \quad$ T.- $\ \{ u_i \} \in li \qquad \Rightarrow \quad$ T.- $\ \{ y_k = u_k\, y_1 \} \in li$

Las soluciones obtenidas $y_1 , y_2 \ldots y_n$ son li, son independientes, pues calculando el Wronskiano:

$$
W = \begin{vmatrix}
y_1 & y_2 & \ldots & \ldots & y_n \\
y_1' & y_2' & \ldots & \ldots & y_n' \\
y_1'' & y_2'' & \ldots & \ldots & y_n'' \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & \ldots & y_n^{(n-1)}
\end{vmatrix}
$$

$$
W = \begin{vmatrix}
y_1 & u_2 y_1 & \ldots & \ldots & u_n y_1 \\
y_1' & u_2 y_1' + u_2' y_1 & \ldots & \ldots & u_n y_1' + u_n' y_1 \\
y_1'' & u_2 y_1'' + 2u_2' y_1' + u_2'' y_1 & \ldots & \ldots & u_n y_1'' + 2u_n' y_1' + u_n'' y_1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_1^{(n-1)} & u_2 y_1^{(n-1)} + C(n-1,1) u_2' y_1^{(n-2)} + \ldots + u_2^{(n-1)} y_1 & \ldots & \ldots & u_n y_1^{(n-1)} + C(n-1,1) u_n' y_1^{(n-2)} + \ldots + u_n^{(n-1)} y_1
\end{vmatrix}
$$

Multiplicando la primera columna por u_k y restándola de cada columna k queda:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ y_1' & u_2'y_1 & \dots & \dots & u_n'y_1 \\ y_1'' & 2u_2'y_1'+u_2''y_1 & \dots & \dots & 2u_n'y_1'+u_n''y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & C(n-1,1)u_2'y_1^{(n-2)}+\dots+u_2^{(n-1)}y_1 & \dots & \dots & C(n-1,1)u_n'y_1^{(n-2)}+\dots+u_n^{(n-1)}y_1 \end{vmatrix}$$

Que desarrollado por la primera fila:

$$W = y_1^2 \begin{vmatrix} u_2' & \dots & \dots & u_n' \\ 2u_2'y_1'+\dots+u_2''y_1 & \dots & \dots & 2u_n'y_1'+\dots+u_n''y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(n-1,1)u_2'y_1^{(n-2)}+\dots+u_2^{(n-1)}y_1 & \dots & \dots & C(n-1,1)u_2'y_1^{(n-2)}+\dots+u_2^{(n-1)}y_1 \end{vmatrix}$$

Restando a cada fila k (desde 1 hasta n–1) la primera fila multiplicada por C(k,1) $y^{(k-1)}$ se obtiene

$$W = y_1^2 \begin{vmatrix} u_2' & \dots & \dots & \dots & u_n' \\ u_2''y_1 & \dots & \dots & \dots & u_n''y_1 \\ C(3,2)u_2''y_1'+u_2^{(3)}y_1 & \dots & \dots & \dots & C(3,2)u_n''y_1'+u_n^{(3)}y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(n-1,2)u_2'y_1^{(n-3)}+\dots+u_2^{(n-1)}y_1 & \dots & \dots & \dots & C(n-1,2)u_n''y_1^{(n-3)}+\dots+u_n^{(n-1)}y_1 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto :

$$W = y_1^3 \begin{vmatrix} u_2' & \dots & \dots & \dots & u_n' \\ u_2'' & \dots & \dots & \dots & u_n'' \\ C(3,2)u_2''y_1'+u_2^{(3)}y_1 & \dots & \dots & \dots & C(3,2)u_n''y_1'+u_n^{(3)}y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(n-1,2)u_2'y_1^{(n-3)}+\dots+u_2^{(n-1)}y_1 & \dots & \dots & \dots & C(n-1,2)u_n'y_1^{(n-3)}+\dots+u_n^{(n-1)}y_1 \end{vmatrix}$$

y así siguiendo se llega a :

$$W = y_1^n \begin{vmatrix} u_2' & \dots & \dots & \dots & u_n' \\ u_2'' & \dots & \dots & \dots & u_n'' \\ u_2^{(3)} & \dots & \dots & \dots & u_n^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_2^{(n-1)} & \dots & \dots & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$W(y_1 \dots y_n) = y_1^n \; W(u_2' \dots u_n')$

de donde como $y_1 \neq 0$

$W(y_1 \dots y_n) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(u_2' \dots u_n') \neq 0$

$\{ y_1 \dots y_n \} \in li \quad \Leftrightarrow \quad \{ u_2 \dots u_n \} \in li$

4.4.- SOLUCIÓN DE LA NO HOMOGÉNEA: MÈTODO DE LAGRANGE O DE VARIACIÓN DE CONSTANTES

El método de Lagrange consiste en obtener una solución de la EDL ***no*** Homogénea a partir de la solución de la Homogénea .

Esto es análogo a obtener una solución de un Sistema lineal no Homogéneo a partir de un Sistema lineal Homogéneo. Es decir encontrar un Espacio Afín.

El método de Lagrange también se llama de Variación de Constantes porque se demuestra a partir de construir una solución de la EDL no homogénea cambiando las constantes a_k de la solución de la Homogénea por funciones u_k.

Teorema de Lagrange

H_1 $S' := \{z : I \to C$
$x \to z(x) : L(z) := z'' + p(x)\, z' + q(x)\, z = f(x) \}$

H_2 $S := \{ y : I \to C$
$x \to y(x) : L(y) := y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \}$
$: \{y_1 y_2 \ldots y_n\} \in Base/ S : L(y) = 0$

$\Rightarrow$ ***T.-*** $y = a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + \ldots + a_n\, y_n$
$z_0 = u_1\, y_1 + u_2\, y_2 + \ldots + u_n\, y_n$
$z = y + z_0$
$z = a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + \ldots + a_n\, y_n + u_1\, y_1 + u_2\, y_2 + \ldots + u_n\, y_n$

$: a_k \in cte$

$$: u_k' \in \text{Soluciones del sistema} \begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 + \ldots + u_n'y_n = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' + \ldots + u_n'y_n' = 0 \\ \ldots \\ u_1'y_1^{(n-2)} + u_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

S : Espacio de las soluciones de la EDLH L(y) = 0

S': Espacio Afín de las soluciones de la EDL no homogénea L(y) = f(x)
z : Solución general de la EDL no homogénea
y : Solución general de la EDLH
z_0 : Solución particular de la EDL no homogénea

D.- Se supone $z = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n$. Derivando n veces y anulando los corchetes señalados

$$\begin{array}{llllll}
z & = u_1 y_1 & + u_2 y_2 & + \ldots + u_n y_n & & \\
z' & = u_1 y_1' & + u_2 y_2' & + \ldots + u_n y_n' & + [\, u_1' y_1 & + u_2' y_2 + \ldots + u_n' y_n \,] \\
 & & & & [& = 0 \quad] \\
z'' & = u_1 y_1'' & + u_2 y_2'' & + \ldots + u_n y_n'' & + [\, u_1' y_1' & + u_2' y_2' + \ldots + u_n' y_n' \,] \\
 & & & & [& = 0 \quad] \\
\ldots & & & & & \\
z^{(n-1)} & = u_1 y_1^{(n-1)} & + u_2 y_2^{(n-1)} & + \ldots + u_n y_n^{(n-1)} & + [\, u_1' y_1^{(n-2)} & + u_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + u_n' y_n^{(n-2)} \,] \\
 & & & & [& = 0 \quad] \\
z^{(n)} & = u_1 y_1^{(n)} & + u_2 y_2^{(n)} & + \ldots + u_n y_n^{(n)} & + [\, u_1' y_1^{(n-1)} & + u_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n' y_n^{(n-1)} \\
\hline
f(x) & = 0 & + 0 & + \ldots + 0 & + [\, u_1' y_1^{(n-1)} & + u_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n' y_n^{(n-1)}
\end{array}$$

Queda el Sistema algebraico no homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{cases} u_1'y_1 & +u_2'y_2 & +\ldots+u_n'y_n & = 0 \\ u_1'y_1' & +u_2'y_2' & +\ldots+u_n'y_n' & = 0 \\ \ldots \\ u_1'y_1^{(n-2)} & +u_2'y_2^{(n-2)} & +\ldots+u_n'y_n^{(n-2)} & = 0 \\ u_1'y_1^{(n-1)} & +u_2'y_2^{(n-1)} & +\ldots+u_n'y_n^{(n-1)} & = f(x) \end{cases}$$

Este Sistema es determinado pues el determinante de las incógnitas es el Wronskiano no nulo $W(y_1 \ldots y_n) \neq 0$

Las soluciones del sistema: u_k' se integran y se obtienen n funciones $u_k + a_k$ (donde las a_k son constantes) que generan las combinación lineal con las y_k que da la solución general de la EDL no homogénea.

$$\begin{array}{lcl} & \int & \\ u_1' & \rightarrow & u_1 + a_1 \\ u_2' & \rightarrow & u_2 + a_2 \\ u_3' & \rightarrow & u_3 + a_3 \\ \ldots & & \\ u_n' & \rightarrow & u_n + a_n \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{z = a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + \ldots + a_n\, y_n + u_1\, y_1 + u_2\, y_2 + \ldots + u_n\, y_n}$$

En resumen se observa que la solución es la suma de la solución de la EDLH y una solución particular de la EDL no homogénea.

$$\begin{aligned} y &= a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + \ldots + a_n\, y_n \\ z_0 &= u_1\, y_1 + u_2\, y_2 + \ldots + u_n\, y_n \\ z &= y + z_0 \\ z &= a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + \ldots + a_n\, y_n + u_1\, y_1 + u_2\, y_2 + \ldots + u_n\, y_n \end{aligned}$$

5.- SOLUCIÓN DE LA EDLH DE COEFICIENTES NO CONSTANTES

5.1.- TEOREMA DE FUCHS

5.1.1.- INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE FUCHS

El Teorema de Fuchs, también llamado de Frobenius, establece un método para resolver determinadas EDLH por medio de desarrollo en serie de potencias.

Las EDLH que son resolubles por Fuchs se definen en en el enunciado del Teorema, donde se determinan las formas de los coeficientes de la EDLH y los tipos de soluciones resultantes.

El enunciado del Teorema de Fuchs se plantea en principio sobre EDLH de segundo orden, pero puede generalizarse para ordenes superiores.

5.1.2.- EJEMPLO INTRODUCTORIO: RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BESSEL PARA $\nu = 2$

5.1.2.1.- PLANTEO DEL MÉTODO

Para facilitar la comprensión del método de Fuchs, se presenta un Ejemplo introductorio, donde se muestra la mecánica del mismo, para luego pasar a la demostración general.

La EDLH de 2° orden de variable compleja (o real) $x \in C$ es entonces :

y'' + p(x) y' + q(x) y = 0

y se estudia en el V(0) para simplificar la notación. El ejemplo elegido es la ecuación de Bessel que para $\nu = 2$

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 4) y = 0$$

que es equivalente (la Solución General no cambia) a la siguiente ecuación que se obtiene dividiendo por x^2 y está en la forma canónica de Fuchs.

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) y = 0$$

La Solución General de la EDLH se obtiene como se ha visto como una combinación lineal de 2 soluciones li. Por medio del método de Fuchs se busca encontrar una o las dos soluciones deseadas y este método tiene como idea central ensayar una solución del tipo:

$$y = x^r H(x) = x^r (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ... + C_k x^k + \dots)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+r}$$

donde r es un número complejo y $H(x)$ es una función analítica, es decir desarrollable en Serie de Taylor, es decir Holomorfa en el Campo Complejo.

Debe remarcarse que el coeficiente C_0 puede elegirse arbitrariamente pues la solución y multiplicada por un constante, también es solución. Por otro lado si se elige $C_0 \neq 0$ se asegura que r toma una valor definido.

x^r es uniformizable y derivable sin limitación de orden en $V(0)$ con una cortadura que una el 0 complejo con el ∞ complejo.

También $H(x)$ es derivable hasta cualquier orden, por ser Holomorfa.

Las soluciones del tipo propuesto $y = x^r H(x)$ son válidas bajo las Hipótesis del teorema de Fuchs: que establecen que en V(0) $p(x)$ tenga a lo sumo un polo de orden 1 y $q(x)$ a lo sumo un polo de orden 2

Debe recordarse que la solución general es una combinación lineal de 2 soluciones li. La Convergencia de dicha solución general $y(x)$ está asegurada sobre la intersección $I(p) \cap I(q)$ de los respectivos campos de convergencia de p y q.

$$p(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad I(p) = \{|x| > 0\}$$
$$\Rightarrow \quad I(y) = I(p) \cap I(q) = \{|x| > 0\}$$
$$q(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \quad \Rightarrow \quad I(q) = \{|x| > 0\}$$

Se ensaya entonces la solución de la EDLH propuesta por el método de Fuchs

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+r}$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+r) x^{k+r-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}$$

Introduciendo estas series en la EDLH

$$(x^2-4)\,y \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^{\,k+r+2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\nu^2\, C_k\, x^{\,k+r}$$

$$x\;y' \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,(k+r)\;x^{\,k+r}$$

$$x^2\,y'' \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,(k+r)\,(k+r-1)\,x^{\,k+r}$$

Sumando todas estas series

$$x^2\,y'' + x\,y' + (x^2-4)\,y = 0 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} [\,C_k\,(\,k+r)\,(\,k+r-1)\,x^{\,k+r} + C_k\,(\,k+r)\,x^{\,k+r} - \nu^2\,C_k \;+ C_{k-2}\;x^{\,k+r}\,]$$

$$0 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,(\,k+r\;-\nu)(\,k+r+\nu\,)\;\;+C_{k-2}\;]\,x^{\,k+r}$$

y ordenando la serie en potencias de menor a mayor se tiene:

$$0 = x^{r}\;(\,E_0 + E_1\,x \;+ E_2\,x^{2} + \ldots \;+ E_k\,x^{k} \;+ \ldots\,)$$

Esta serie tiene todos los coeficientes nulos por la unicidad de la serie de Laurent.

$0 = E_0 = C_0\,(0+r-2\,)\,(0+r+2) + C_{-2} \;= 0$ $\qquad$ $(\,C_{-2} \;= 0\,)$

$0 = E_1 = C_1\,(1+r-2\,)\,(1+r+2) + C_{-1} \;= 0$ $\qquad$ $(\,C_{-1} \;= 0\,)$

$0 = E_2 = C_2\,(2+r-2\,)\,(2+r+2) + C_{2} \;\;= 0$

...

$0 = E_k = C_k\,(k+r-2\,)\,(k+r+2) + C_{k-2} \;= 0$

...

Se ha formado así un Sistema de Infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas. El sistema tiene la forma de un Sistema triangular (tipo Gauss) donde se va agregando en forma sucesiva en cada ecuación una incógnita. Esto permite plantear el cálculo de los coeficientes C_k en forma recursiva.

5.1.2.2.- ECUACIÓN DE RECURRENCIA Y ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

La última expresión del sistema es la genérica y es la llamada ***Ecuación de Recurrencia del método de Fuchs***.

$$C_k\,(k+r-2\,)\,(k+r+2) + C_{k-2} \;= 0$$

Que representa a todo el Sistema para cualquier k. En particular eligiendo $k = 0$ se tiene la primera ecuación del Sistema

$C_0(r-2)(r+2) = 0$ $\qquad$ (Observar que $C_{-2} \;= 0$)

Que se llama ***Ecuación Característica del método de Fuchs.*** Para satisfacerla, ***como*** $C_0 \neq 0$ se determinan los dos valores de r que la anulan, y a su diferencia:

$r_1 = 2$ $\qquad r_2 = -2$ $\qquad \Delta = r_1 - r_2 = 4$

Estos 2 valores de r generan eventualmente 2 Ecuaciones de Recurrencia (una para r_1 y otra para r_2) que podrían definir 2 soluciones li. En este caso como para el primer valor r_1 se verá que se puede construir una solución mientras no es así para el segundo valor r_2. Para obtener una segunda solución li se deberá ensayar una solución de otra forma.

5.1.2.3.- PRIMERA SOLUCIÓN

Eligiendo de las 2 raíces la mayor: $r_1 = 2$ la Ecuación de Recurrencia toma la forma

$$C_k\, k\,(k+4) + C_{k-2} = 0$$

Como $\forall k \in N \quad k\,(k+4) \neq 0$ siempre se puede resolver

$$C_k = \frac{-C_{k-2}}{k(k+4)}$$

De aquí se obtienen todos los coeficientes C_k por recurrencia:

$C_0 = C_0$ es Arbitrario y ***no*** nulo se obtiene entonces:

$C_1 = 0$ pues $C_{-1} = 0$ y en general todos los coeficientes de subíndice impar son nulos

$C_3 = 0, \quad \ldots \quad C_{2p+1} = 0$

Los coeficientes de subíndice par son:

$$C_2 = \frac{-C_0}{2(2+4)}$$

$$C_{2p} = \frac{(-1)^p C_0}{2.4.6...(2p)(2+4)(4+4)(6+4)...(2p+4)}$$

$$C_{2p} = \frac{(-1)^p C_0 \Gamma(3)}{2^{2p}\, p!\, \Gamma(p+3)}$$

Eligiendo convenientemente

$$C_0\, \Gamma(3) = \frac{1}{2^2}$$

queda

$$C_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+2}\, p!\, (p+2)!}$$

Resulta la solución $\boldsymbol{y_1}$

$$\boldsymbol{y_1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(p+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+2}$$

$$y_1 = \frac{1}{0!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{1!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{2!\,4!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \frac{1}{3!\,5!}\left(\frac{x}{2}\right)^8 + \ldots + \frac{(-1)^p}{p!\,(p+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+2} + \ldots$$

Obs : Esta solución y_1 se define posteriormente como $J_2(x)$: Función de Bessel de Primera Especie de orden 2

5.1.2.4.- SEGUNDA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BESSEL

Si se siguiera el mismo procedimiento para hallar la Segunda Solución y_2 correspondiente a $r = r_2 = -2$ la Ecuación de Recurrencia tomaría la forma:

$D_k\, k\,(k-4) + D_{k-2} = 0$

Se ha cambiado la notación de los coeficientes C_k por D_k para no confundir los coeficientes de las soluciones y_1 e y_2. Pasando al cálculo con esta Ecuación de Recurrencia.

$D_0 = D_0$ es Arbitrario y ***no*** nulo se obtiene entonces:

$D_1 = 0$ pues $D_{-1} = 0$ y en general todos los coeficientes de subíndice impar son nulos

$D_3 = 0, \quad \ldots \quad D_{2p+1} = 0$

Pasando al cálculo de los subíndice par

$D_2\ 2\,(-2) + D_0 = 0 \ \Rightarrow\ D_2 = \frac{1}{4} \neq 0$

Hasta llegar a

$D_4\ 0 + D_2 = 0$

Donde ***D_4 no puede despejarse***. Aquí se corta el cálculo por recurrencia. No se pueden obtener ni D_4 ni los D_{2p} siguientes. Analizando a la ecuación con un G genérico:

$D_4\ 0 + G = 0$

Tendría solución si $G = 0$ Esta es la llamada ***Condición Complementaria del método de Fuchs.*** En este caso ***no*** se cumple pues $G = D_2 = \frac{1}{4} \neq 0$

Esto demuestra que ***no*** existe otra solución y_2 li del tipo

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} D_k\ x^{k+r_2}$$

5.1.2.5.- SEGUNDA SOLUCIÓN POR EL METODO LA SEGUNDA ECUACIÓN DE RECURRENCIA

Existen varios métodos para encontrar otra solución li con y_1 , y así formar la base del espacio de soluciones. En el desarrollo del Teorema de Fuchs se demostrará que la Segunda Solución li es del tipo

$y_2 = x^{r_2}\ H_2(x) + \alpha\, y_1\ Lx$

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \; x^{k+r_2} + \alpha\, y_1 \; Lx$$

Entonces un método para encontrar la segunda solución y_2 es repetir el procedimiento hecho para la Primera Solución, derivando término a término:

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \; x^{k+r_2} \qquad + \alpha\, y_1 \, Lx$$

$$y_2' = \sum_{k=0}^{\infty} D_k\,(k + r_2)\; x^{k+r_2-1} \qquad + \alpha\, y_1' \, Lx + \alpha\, y_1 \frac{1}{x}$$

$$y_2'' = \sum_{k=0}^{\infty} D_k\,(k + r_2)\,(k + r_2 - 1)\; x^{k+r_2-2} \quad + \alpha\, y_1'' \, Lx + \alpha\, 2\, y_1' \frac{1}{x} - \alpha\, y_1 \frac{1}{x^2}$$

Introduciendo estas series en la ED reemplazando $r = r_2 = -2$ y ordenando convenientemente resulta:

$$x^2 \; y_2'' + x\, y_2' + (x^2 - 4^2)\, y = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k\,(k + r_2)\,(k + r_2 - 1)\, x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} D_k\,(k + r_2)\; x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} D_k\, x^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} -4\; D_k\, x^{k-2} +$$

$$+ \alpha\, x^2 \; y_1'' \, Lx \qquad + \alpha \;\; x \;\, y_1' \, Lx \qquad + \alpha \;\, (x^2 - 4^2) \;\; y_1 \; Lx \qquad +$$

$$+ \alpha \;\, 2\, x \;\, y_1' \qquad + \alpha \;\; y_1 \qquad +$$

$$- \alpha \;\, y_1 \qquad = 0$$

Los tres términos que contienen Lx se anulan por ser y_1 solución de la Ecuación Diferencial. También se simplifican los últimos dos términos

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \{\, D_k[\, (k + r)(k + r - 1) + (k + r) - 4\,] + D_{k-2} \,\}\; x^{k-2} + \alpha\, 2\, x\, y_1'$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} [\, D_k\,(k + r - 2\,)\,(k + r + 2) + D_{k-2} \,]\; x^{k-2} + 4\,\alpha \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(p+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1} \frac{1}{2}\; (2p+2)$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} [\, D_k\,(k + r - 2\,)\,(k + r + 2) + D_{k-2} \,]\; x^{k-2} + 2\,\alpha \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(p+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+2} (2p+2)$$

ordenando la serie en potencias de menor a mayor se tiene:

$$0 = x^{-2} \; (\, E_0 + E_1\, x + E_2\, x^2 + \ldots + E_k\, x^k + \ldots\,)$$

Esta serie tiene todos los coeficientes nulos por la unicidad de la serie de Laurent

Recordando que $C_k = \xrightarrow{k \in Impar} C_{2p+1} = 0$

$$= \xrightarrow{k \in Par} C_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+2}\, p!\,(p+2)!}$$

$0 = E_0 = D_0\,(0 - 4\,)\,0 + D_{-2} = 0 \qquad (\, D_{-2} = 0\,) \qquad \Rightarrow \quad D_0 \in$ Arbitrario y ***no*** nulo

$0 = E_1 = D_1 (1-4)\, 1 + D_{-1} = 0$ $\quad (D_{-1} = 0) \quad \Rightarrow \quad D_1 = 0$

$0 = E_2 = D_2 (2-4)\, 2 + D_0 = 0$ $\quad \Rightarrow \quad D_2 = D_0 / 4$

$0 = E_3 = D_3 (3-4)\, 3 + D_1 = 0$ $\quad \Rightarrow \quad D_3 = 0$

$0 = E_4 = D_4 (4-4)\, 4 + D_2 + 2\alpha \frac{1}{2^2} \frac{1}{0!\,2!} 2 = 0$

...

$0 = E_k = D_k (k-4)\, k + D_{k-2} + 2\alpha\, C_{k-4} (k-2) = 0$

...

Se ha formado así otro Sistema de Infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas. Este segundo sistema tiene la también la forma de un Sistema triangular (tipo Gauss) donde se va agregando en forma sucesiva en cada ecuación una incógnita. Esto permite plantear el cálculo de los coeficientes D_k en forma recursiva ***haciendo una consideración especial para*** D_4

$D_0 = D_0$ es Arbitrario y ***no*** nulo se obtiene entonces:

$D_1 = 0$

$D_2 (-2)\, 2 + D_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_2 = \frac{1}{4} \neq 0$

$D_3 = 0$

Al llegar a la ecuación que sigue se hace la consideración de elegir α de manera de hacerla compatible:

$0 = E_4 = D_4\ 0 + D_2 + 2\alpha \frac{1}{2^2} \frac{1}{0!\,2!} 2 = 0$

se elige α : $D_2 + 2\alpha \frac{1}{2^2} \frac{1}{0!\,2!} 2 = 0$

Es decir

$D_0 \frac{1}{4} + 2\alpha \frac{1}{2^2} = 0$

$\alpha = -D_0 \frac{1}{2}$

y resulta D_4 es arbitrario (nulo o no nulo). Luego se sigue en forma recursiva sin inconveniente:

$D_5 = 0$ y en general todos los coeficientes de subíndice impar D_{2p+1} son nulos pues $C_{2p+1} = 0$

$D_{2p+1} = 0$

Para los coeficientes de subíndice par se tiene una ***Segunda Ecuación de Recurrencia***

$D_k (k-4)\, k + D_{k-2} + 2\alpha\, C_{k-4} (k-2) = 0$

$D_{2p} (2p-4)\, 2p + D_{2p-2} + 2\alpha\, C_{2p-4} (2p-2) = 0$

$D_{2p} (2p-4)\, 2p + D_{2p-2} - D_0\, C_{2p-4} (2p-2) = 0$

Como $\quad C_{2p-4} = \dfrac{(-1)^{p-2}}{2^{2p-2} (p-2)!\,p!}$

$$D_{2p}\,(2p-4)\,2p + D_{2p-2} \;-\; D_0\,\frac{(-1)^{p-2}}{2^{2p-2}(p-2)!\,p!}\,(2p-2) \;=\; 0$$

$$D_{2p}\,(2p-4\,)\,2p + D_{2p-2} \;-\; D_0\,\frac{(-1)^{p-2}}{2^{2p-2}(p-2)!\,p!}\,(2p-2) \;=0$$

$$D_{2p} \;=\; -\frac{D_{2p-2}}{2^2(p-2)p} \;+\; D_0\,\frac{(-1)^p}{2^{2p-2}(p-2)!\,p!}\,\frac{1}{4}\,\frac{2p-2}{(p-2)p}$$

$$D_{2p} \;=\; -\frac{D_{2p-2}}{2^2(p-2)p} \;+\; D_0\,\frac{(-1)^p}{2^{2p-2}(p-2)!\,p!}\,\frac{1}{4}\,[\,\frac{1}{(p-2)}+\frac{1}{p}\,]$$

Pasando al cálculo de los coeficientes

$$D_6 \;=\; -\frac{D_4}{2^2.1.3} \;-\; D_0\,\frac{1}{2^4.1!.3!}\,\frac{1}{4}\,[\,1+\frac{1}{3}\,]$$

$$D_6 \;=\; -\frac{1}{2^4.1!.3!}\,[\,D_4\,2^3 \;+D_0\,\frac{1}{4}\,[\,1+\frac{1}{3}\,]\,]$$

$$D_8 \;=\; (-1)^2\,\frac{1}{2^6.2!.4!}\,[\,D_4\,2^3 \;+D_0\,\frac{1}{4}\,[\,1+\frac{1}{3}\,]\,] \;+D_0\,\frac{1}{2^6.2!.4!}\,\frac{1}{4}\,[\,\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,]$$

$$D_8 \;=\; (-1)^2\,\frac{1}{2^6.2!.4!}\,[\,D_4\,2^3 \;+D_0\,\frac{1}{4}\,[\,(1+\frac{1}{2}\,)+(\,\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\,)]\,]$$

$$D_8 \;=\; (-1)^2\,\frac{1}{2^6.2!.4!}\,[\,D_4\,2^3+D_0\,\frac{1}{4}\,[\,H(2)+H(4)-\frac{3}{2}\,]\,]$$

$$D_{10} \;=\; (-1)^3\,\frac{1}{2^8.3!.5!}\,[\,D_4\,2^3+D_0\,\frac{1}{4}\,[\,H(2)+H(4)-\frac{3}{2}\,]\,] \;+\; (-1)^3\,D_0\,\frac{1}{2^8.3!.5!}\,\frac{1}{4}\,[\,\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\,]$$

$$D_{10} \;=\; (-1)^3\,\frac{1}{2^8.3!.5!}\,[\,D_4\,2^3+D_0\,\frac{1}{4}\,[\,H(3)+H(5)-\frac{3}{2}\,]\,]$$

Generalizando:

$$D_{2p} \;=\; (-1)^p\,\frac{1}{2^{2p-2}(p-2)!p!}\,[\,D_4\,2^3+D_0\,\frac{1}{4}\,[\,H(p-2)+H(p)-\frac{3}{2}\,]\,]$$

Resulta así la solución ***y₂***

$$y_2 = -\,D_0\,\frac{1}{2}\,y_1\,Lx + x^{-2}\,[\,D_0 + D_0\,\frac{1}{4}\,x^2 + \sum_{p=2}^{+\infty}\,\frac{1}{2^{2p-2}(p-2)!\,p!}\,[D_4\,2^3+D_0\,\frac{1}{4}\,[\,H(p-2)+H(p)-\frac{3}{2}\,]\,]\,x^{2p}$$

cambiando el índice $p = q+2$

$$y_2 = -\,D_0\,\frac{1}{2}\,y_1\,Lx + D_0\,2^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-2}[\,1+\left(\frac{x}{2}\right)^2] + 2^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-2}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!(q+2)!}[D_4\,2^3+D_0\,\frac{1}{4}\,[\,H(q)+H(q+2)-\frac{3}{2}\,]\left(\frac{x}{2}\right)^{2q+4}\,2^2$$

$$y_2 = -\,D_0\,\frac{1}{2}\,y_1\,Lx + D_0\,\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{-2}[\,1+\left(\frac{x}{2}\right)^2] + D_4\,2^3\,y_1 - D_0\,\frac{3}{8}\,y_1 + D_0\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!(q+2)!}\,\frac{1}{4}\,[\,H(q)+H(q+2)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2q+2}$$

$$y_2 = -D_0 \frac{1}{2} y_1 Lx + D_4 2^3 y_1 - D_0 \frac{3}{8} y_1 +$$
$$+ D_0 \frac{1}{4} [\left(\frac{x}{2}\right)^{-2} + 1] + D_0 \frac{1}{4} [\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{2} - \frac{17}{36}\left(\frac{x}{2}\right)^{4} + \frac{43}{576}\left(\frac{x}{2}\right)^{6} - \frac{247}{43200}\left(\frac{x}{2}\right)^{8} + \ldots]$$

Obs: Nótese que la constante arbitraria D_4 reproduce una solución li con la primera y_1.

9.- PROPIEDADES DE LAS EDT DE SEGUNDO ORDEN

9.1. TEOREMA DE IL DE LAS EDLH

Se recuerda el teorema de il de las soluciones de una EDLH (Teorema 6)

Dado las hipótesis generales,

H_1 [$I \in$ *Anillo en* **C**] *y*

H_2' [{ y_i } $\in S$] *es decir las funciones* { y_i } *son soluciones de una EDLH con la restricción expuesta en*

H_3 [$p_{n-1} \in H/I$] *entonces la proposición*

H_4 [$\exists x_0 \in I$: $W(x_0) \neq 0$] $\Leftrightarrow$ [$\forall x \in I \quad W(x) \neq 0$] *es condición necesaria y suficiente de que*

$\Leftrightarrow$ *T.- el conjunto* { y_i } *sea linealmente independiente.*

$$\left.\begin{array}{l} H_1 \quad I \in \text{Anillo en } C \\ H'_2 \quad \{\, y_i \,\} \in S \\ \qquad S := \{\, y : I \to C \\ \qquad\qquad x \to y(x) : L(y) := \sum_{k=n}^{0} p_k(x) y^{(k)} = 0 \,\} \\ H_3 \quad p_{n-1} \in H / I \end{array}\right\} \Rightarrow \quad W(x) = W(x_0) \ \exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\, dx]$$

$$H_4 \quad \exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\ \forall x \in I \quad W(x) \neq 0 \ ] \quad =: \quad W(x) \not\equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad T.- \quad \{ y_i \} \in li$$

9.2.- REDUCCIÓN DEL ORDEN PARA EDLH DE ORDEN 2

Se recuerda que en el caso de las EDLH de orden 2, conocida una primera solución y_1 *al reducir el orden de la ecuación a 1, se obtiene también una segunda solución* y_2 *li.*

Teorema de Reducción de orden para el caso de orden n = 2

H_1 $\quad S := \{ y : I \to C$

$\qquad x \to y(x) : L(y) := y'' + p(x)\, y' \ q(x)\, y = 0 \}$

H_2 $\quad y_1 \in S / L(y_1) = 0$

H_3 $\quad y = u\, y_1$ $\quad \Rightarrow \quad T_1$.- $\quad L_1(u) := y_1 u'' + [\, p\, y_1' + 2\, y_1 \,]\, u' = 0$

T_2.- $\quad y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)} dx$

T_3.- $\quad \{ y_1\ y_2 \} \in Base/S$

9.3 .- CEROS DE LA EDLH DE SEGUNDO ORDEN

$T_{1.-}$ Los ceros de cualquier solución de una EDLH de segundo orden son simples

H_1 $\quad L(y) := y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$
H_2 $\quad y_1 : L(y_1) = 0 \quad \wedge \quad y_1 \neq \sigma$
H_3 $\quad y_1(\zeta_k) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \zeta_k \in$ *Cero simple*

$D_{1.-}$ Al ser raíces simples si se anulan simultáneamente

$y_1(\zeta_k) = 0$
$y_1'(\zeta_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(\zeta_k) = 0$ ***Absurdo***

pues se contradice con el Teorema de il de las soluciones de EDLH.

$D_{2.-}$: Otra Demostración es la siguiente

$\zeta_k \in$ ***Cero doble*** $\Rightarrow \quad y_1(\zeta_k) = 0$
$\qquad y_1'(\zeta_k) = 0$

En virtud de la ecuación diferencial se anulará también $y_1''(\zeta_k)$

$$\Rightarrow y_1''(\zeta_k) + p(\zeta_k)\, y_1'(\zeta_k) + q(\zeta_k)\, y_1(\zeta_k) = 0$$

$$y_1''(\zeta_k) = 0$$

y sucesivamente todas las derivadas como se deduce derivando término a término L(y). Queda:

$$y_1(\zeta_k) = 0$$
$$y_1'(\zeta_k) = 0$$
$$y_1''(\zeta_k) = 0$$
$$y_1'''(\zeta_k) = 0$$
...

con lo cual considerando la serie de Taylor

$y(x) \equiv 0$ ***Absurdo***

$T_{2.-}$ Dos soluciones li de cualquier solución de una EDLH de segundo orden no pueden tener ceros comunes

H_1 $\quad L(y) := y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$
H_2 $\quad y_1 : L(y_1) = 0 \quad \wedge \quad y_2 : L(y_2) = 0 \quad \{y_1\ y_2\} \in li$
H_2 $\quad y_1(\zeta_k) = 0 \qquad \Rightarrow \quad y_2(\zeta_k) \neq 0$

D_{1}.- Al ser raíces simples si se anulan simultáneamente

$y_1(\zeta_k) = 0$
$y_2(\zeta_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(\zeta_k) = 0$ ***Absurdo***

pues se contradice con el Teorema de il de las soluciones de EDLH.

T_3.- Dos soluciones li de cualquier solución de una EDLH de segundo orden tiene los ceros intercalados (entre dos ceros consecutivos de una solución se intercalan uno solo de otra solución)

H_1 $L(y) := y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$
H_2 $y_1 : L(y_1) = 0 \quad \wedge \quad y_2 : L(y_2) = 0 \quad \{y_1\ y_2\} \in li$
H_3 $y_1(\zeta_k) = 0\ \ y_1(\zeta_{k+1}) = 0$ ***ceros consecutivos*** $\Rightarrow \exists \omega_k \in]\ \zeta_k\ \ \zeta_{k+1}\ [\ : y_2(\omega_k) = 0$
$\omega_k \in$ ***único en*** $[\ \zeta_k\ \ \zeta_{k+1}\ ]$

D.- Al ser raíces simples si se anulan simultáneamente

$$W(x) = W(x_0)\ \exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\ dx\ ]$$

donde $W(x_0) = \text{cte} \neq 0$

$$\exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\ dx\ ] > 0$$

$$W(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = W(x_0)\ \exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\ dx\ ]$$

$$\frac{y_1(x)\, y'_2(x) - y_1(x)\, y'_2(x)}{[\, y_2(x)\,]^2} = \frac{1}{[\, y_2(x)\,]^2}\ W(x_0)\ \exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\ dx\ ]$$

$$\left.\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right|_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} = \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \frac{1}{[\, y_2(x)\,]^2}\ W(x_0)\ \exp[-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\ dx\ ] \neq 0$$

Recordando por el teorema anterior

$y_1(\zeta_k) \neq 0$
$y_1(\zeta_{k+1}) \neq 0$

Si y_2 no se anula en el intervalo $]\ \zeta_k\ \ \zeta_{k+1}\ [\ \Rightarrow \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \in C\ /\ [\zeta_k\ \ \zeta_{k+1}\ ]$

$$\left.\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right|_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} = 0 \neq 0 \quad \textbf{\textit{Absurdo}}$$

Entonces debe existir un cero de y_2 en el intervalo $]\ \zeta_k\ \ \zeta_{k+1}\ [$

$\exists \omega_k \in]\ \zeta_k\ \ \zeta_{k+1}\ [\ : y_2(\omega_k) = 0$

Este cero es único en dicho intervalo $]\ \zeta_k\ \ \zeta_{k+1}\ [$ porque si existieran dos ω_k ω_{k+1} aplicando el mismo lema recién demostrado, invirtiendo el orden de las soluciones

H_3 $\quad y_2(\omega_k) = 0 \;\; y_2(\omega_{k+1}) = 0 \qquad \Rightarrow \exists \zeta_k \in]\, \omega_k \;\; \omega_{k+1} [\;:\; y_1(\zeta_k) = 0$ **Absurdo**

Ejercicio: Ecuación de Ricatti

T_1.- Teorema: Equivalencia entre la Ecuación de Ricatti y la Ecuación Lineal de Segundo Orden

(EDLH 2°Orden) ***(Ricatti simplificada)***

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \xleftrightarrow{\frac{y'}{y} = z \;\;\Leftrightarrow\;\; y = e^{\int z}} z' + z^2 + p(x)\;\, y \;+ q(x) \;= 0$$

(Ricatti simplificado) ***(Ricatti Canónica)***

$$z' + z^2 + p(x)\;\, y \;+ q(x) \;= 0 \xleftrightarrow{w = \frac{1}{A} z \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{A'}{A} + B \\ q = AC \end{cases}} w' + A(x)\, w^2 + B(x)\, y \;+ C(x) \;= 0$$

D.- Lema 1.- Equivalencia entre EDLH de Segundo Orden a Ricatti simplificada

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \xleftrightarrow{\frac{y'}{y} = z \;\;\Leftrightarrow\;\; y = e^{\int z}} z' + z^2 + p(x)\;\, y \;+ q(x) \;= 0$$

Partiendo de

$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$

se introduce el cambio de variable

$$y = e^{\int z(x)} \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{y'}{y} = z$$

$$y' = e^{\int z(x)}\; z$$

$$y'' = e^{\int z(x)}\; z^2 \;+\; e^{\int z(x)}\; z'$$

Reemplazando en la EDLH

$$e^{\int z(x)}\; [\, z' + z^2 + p\, z + q \,] = 0$$

$z' + z^2 + p\, z + q \;= 0$ (Ricatti simplificada)

Lema 2.- Reducción de Ricatti simplificada a Ricatti Canónica.

$$z' + z^2 + p(x)\;\, y \;+ q(x) \;= 0 \xleftrightarrow{w = \frac{1}{A} z \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{A'}{A} + B \\ q = AC \end{cases}} w' + A(x)\, w^2 + B(x)\, y \;+ C(x) \;= 0$$

Se pretende reducir a la ED de Ricatti Canónica

$w' + A w^2 + B w + C = 0$ (Ricatti Canónica)

a la forma de ED

$z' + z^2 + p z + q = 0$ (Ricatti simplificada)

Para ello ensayamos:

$w = u z$

$u' z + u z' + A u^2 z^2 + B u z + C = 0$

Eligiendo $u = \frac{1}{A}$ (es decir $w = \frac{1}{A} z$)

$- \frac{A'}{A^2} z + \frac{1}{A} z' + \frac{1}{A} z^2 + B \frac{1}{A} z + C = 0$

Multiplicando por $A(x)$ y ordenando

$z' + z^2 + z [- \frac{A'}{A} + B] + A C = 0$

Llamando

$p(x) = - \frac{A'}{A} + B$

$q(x) = A C$

queda como equivalente la EDLH de Segundo Orden

$y'' + [- \frac{A'}{A} + B] y' + A C y = 0$

Se aplicarán los resultados anteriores para resolver el ejercicio

3.- $w' + \frac{w^2}{x} - x w - 2 x = 0$

I.- Obtención de las ED equivalentes

$w' + \frac{w^2}{x} - x w - 2 x = 0$

$A = \frac{1}{x} \Rightarrow A' = - \frac{1}{x^2}$ $p(x) = - \frac{A'}{A} + B = \frac{1}{x} - x$

$B = - x \Rightarrow$

$C = - 2 x$ $q(x) = A C = - 2$

Las ED equivalentes son:

$z' + z^2 + (\frac{1}{x} - x) z - 2 = 0$

$y'' + (\frac{1}{x} - x)\ y' - 2\,y = 0$

II.- Obtención de una Solución de las ED que es una Solución Particular de Ricatti

La última EDL de Segundo Orden se puede resolver por Fuchs:

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k\, x^{k+r}$$

La Ecuación de Recurrencia es

$$C_k\,[(k+r)(k+r-1) + (k+r)] - C_{k-2}\,[(k-2+r) + 2] = 0$$
$$C_k\,(k+r)^2 - C_{k-2}\,(k+r) = 0$$

Tomando $k = 0$ se obtiene la Ecuación Característica:

$$C_0\, r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0 \qquad \text{II Caso de Fuchs}$$

Se puede obtener entonces una primera solución :

$$C_k = \frac{C_{k-2}}{k}$$

$C_0 = 1$ Arbitrario

$$C_1 = \frac{C_{-1}}{1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_{2p+1} = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2}$$

$$C_4 = \frac{1}{2.4}$$

$$C_6 = \frac{1}{2.4.6}$$

…

$$C_{2p} = \frac{1}{2.4.6.....2p} = \frac{1}{2^p\, p!}$$

Una solución de la EDL es:

$$y_1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p\, p!}\, x^{2p} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Verificación del resultado

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y' = e^{\frac{x^2}{2}}\, x$$

$$y'' = e^{\frac{x^2}{2}}\, x^2 + e^{\frac{x^2}{2}}$$

Reemplazando en la ED Lineal de Segundo Orden

$$y''\ y'' + (\frac{1}{x} - x)\ y' - 2\,y = e^{\frac{x^2}{2}}\, x^2 + e^{\frac{x^2}{2}} + (\frac{1}{x} - x)\ e^{\frac{x^2}{2}}\, x - 2\, e^{\frac{x^2}{2}} =$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \; [\, x^2 + 1 + 1 - x^2 - 2 \,] = 0$$

Llevando el Resultado a la ED equivalente de Ricatti Simplificada:

$$z = \frac{y'}{y} = x$$

Entonces la ED equivalente

$z' + z^2 + (\frac{1}{x} - x)\; z - 2 = 0$ tiene por solución a $z = x$

que también se puede verificar directamente

$$1 + x^2 + (\frac{1}{x} - x)\; x - 2 = 1 + x^2 + 1 - x^2 - 2 = 0$$

Volviendo a la ED equivalente de Ricatti Canónica:

$$w = \frac{1}{A}\; z$$

Entonces queda la ED original como ED equivalente

$w' + \frac{w^2}{x} - x\, w - 2\, x = 0$ que tiene por solución a $w = \frac{1}{A}\; z = x\; x = x^2$

que también se puede verificar directamente

$$w' + \frac{w^2}{x} - x\, w - 2\, x = 2\, x + x^3 - x^3 - 2\, x = 0$$

III.- Solución general de la ED de Ricatti

Conociendo entonces una solución particular $w_1 = x^2$ de

$$w' + \frac{w^2}{x} - x\, w - 2\, x = 0$$

Haciendo $w = u + w_1$

$$u' + w_1' + \frac{1}{x}\,(u^2 + 2\, u\, w_1 + w_1^2) - x\,(u + w_1) - 2\, x = 0$$

$$u' + 2\, x + \frac{1}{x}\,(u^2 + 2\, u\, x^2 + x^4) - x\,(u + x^2) - 2\, x = 0$$

$$u' + \frac{1}{x}\; u^2 + 2\, u\, x - x\, u = 0$$

$$u' + x\, u + \frac{1}{x}\; u^2 = 0$$

Esta última es una ED de Bernouilli con $n = 2$ se reduce a ED lineal $u = \frac{1}{v}$

$$-\frac{1}{v^2}\; v' + x\,\frac{1}{v} + \frac{1}{x}\;\frac{1}{v^2} = 0$$

$$v' - x\; v - \frac{1}{x} = 0$$

cuya solución es

$$v(x) = e^{+\frac{x^2}{2}} \int \frac{1}{x}\, e^{-\frac{x^2}{2}} + k\; e^{+\frac{x^2}{2}}$$

y finalmente la solución general de Ricatti es:

$$w = u + w_1 = \frac{1}{v} + w_1 = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{k + \int \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx} + x^2$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

GUIA DE TRABAJOS PRACTICOS   Curso Ing. Juan Sacerdoti

TRABAJO PRACTICO 1.-   ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1.- Formación de Ecuaciones Diferenciales

1.1.- Dada una Familia de Funciones

I.- Hallar la Ecuación diferencial correspondiente

II.- Las envolventes si existen

a.- $(x-k)^2 + (y-mk)^2 = 1$
b.- $y - 2kx + k^2 = 0$

2.- Resolución de Ecuaciones Diferenciales

2.1.- Ecuaciones tipo f(x y') = 0

1.- Resolver :

a.- $y' + (1-x^2)^{1/2} = 0$
b.- $x + \dfrac{2y'}{1+y'^2} = 0$

2.2.- Variables separables

2.2.1.- Variables separables standard

1.- Hallar las curvas que tienen :
a.- el segmento subtangente constante
b.- el segmento subnormal constante
c.- el segmento tangente constante
d.- el segmento normal constante
e.- el segmento subnormal igual a la abscisa

2.- Hallar las curvas que tienen un ángulo constante con el radio vector que une cada punto con el origen

3.- Integrar :

1. $y\,(1-x^2)^{1/2}\ dx - x\,dy = 0$
2. $du/dv = (1-u^2)/(1-v^2)$
3. $y' = -x/y$
4. $2y\ dx + \exp(-3x)\,dy = 0$
5. $y' + (\sin x)\ y$

2.2.2.- Reducibles a variables separables

1.- Integrar

1. $y' = \cos(x + y)$
2. $L(x + y) + \dfrac{1+y'}{x+y} = 0$
3. $y' - e^x e^y = 1$

2.2.3.- Reducibles a Variables separables: Homogéneas

1.- Integrar

1 $y' = y/x + 1$

2 $(x^2 - y^2)\,dx - 2xy\ dy = 0$

3 $(2xy - y^2)\,dx - x\,dy = 0$

2.2.4.- Reducibles a Homogéneas

1.- Resolver

a.- $y' = (6x - y - 5)/(4x - y - 3)$

b.- $(2y + x + 1)\,dx - (2x + 4y + 3)\,dy = 0$

c.- $y' = f([a x + b y + c]/[d x + e y + f])$

2.3.- Lineales de primer orden

2.3.1.- Lineales standard

1.- Resolver

a.- $x y' + 3y = x^2$

b.- $y' + y \cot g\ x = \cos x$

2.- Construir una Ecuación diferencial Lineal que tenga por soluciones $y = x$ $y = x^2$

2.3.2.- Reducibles a lineales: Bernoulli

1.- Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli

a.- $y' x^4 - y\ x^3 = y^3$

b.- $y' + x y\ (1 - x^2)^{-1} = x\ y^{1/2}$

c.- $x y' + y^2 + y = 0$

2. 3.3.- Reducibles a Bernoulli: Ricatti

1.- Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales de Ricatti

a.- $y' - x y^2 + 2x^2 y - x^3 - 1 = 0$

b.- $y' + y^2 = 1$

c.- $y' + \dfrac{y^2}{x} - x\,y = 2\,x$

2.4.-Ecuaciones resueltas en y

2.4.1.- Ecuaciones resueltas en y generales

1.- Hallar las curvas cuya área bajo un arco dado es igual a la longitud de dicho arco.

2.4.2.- Lagrange

2.- Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales de Lagrange

a.- $y = 2\,x\,y' + (1 + y'^2)^{1/2}$

b.- $y = x\,(1 + y') + y'^2$

2.4.3.- Clairaut

1.- Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales de Clairaut hallando la solución general y la singular.

a.- $y = x\,y' + (1 + y'^2)^{1/2}$

b.- $y = x\,y' + (y' - y'^2)$

2.- Resolver la ecuación de Clairaut como caso particular de la Ecuación de Lagrange.

3.- Resolver $\exp(y') = 1 + y'^2$ Generalizar para $f(y') = 0$

2.5.-Ecuaciones Diferenciales Exactas

2.5.1.- Ecuaciones Diferenciales Exactas Standard

a.- $(2x - y)\,dx + (3y^2 - y)\,dy = 0$

b.- $(e^y + 1)\cos x\,dx + e^y \operatorname{sen} x\,dy = 0$

2.5.2.-Factor Integrante

a.- $(2xy + 1)\,y\,dx\ \ (y - x)\,dy = 0$

b.- $dy + [\,p(x)\,y - q(x)\,]\,dx = 0$

TRABAJO PRACTICO 2

1.- Dependencia e independencia lineal de funciones

1.1.- Estudiar la independencia lineal de las funciones de los sistemas:

a) $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, \dots, e^{nx}\}$

b) $\{1, e^{ix}, e^{2ix}, e^{3ix}, \dots, e^{nix}\}$

c) $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$

1.2.- Bajo que condiciones son linealmente independientes

a) { y_1 , y_1 Lx +a y_2 } donde a es una constante

2.- Hallar una ecuación diferencial lineal que tenga por soluciones a las funciones dadas

a) { e^{ax} , e^{bx} }
b) { e^{ax} , xe^{ax} }
c) { e^{ax} , xe^{ax} , e^{bx} }
d) { y_1 , y_1 Lx +a y_2 }
e) { sin x , cos x }

definir la dimensión de la solución general de dichas ecuaciones diferenciales.

3.- Cambio de variables en Ecuaciones diferenciales lineales.

1.- Hallar la expresión general de la ecuación: $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ cambiando la variable independiente:
a) $z = a x$
b) $z = x^s$
c) $z = x - a$
d) $z = e^{ax}$

2.- Hallar la expresión general de la ecuación: $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ cambiando la variable dependiente:
a) $y = z(x)\, x^s$
b) $y = z(x)\, e^{ax}$

4.- Reducción del orden

Hallar la segunda solución de la ecuación diferencial

a) $x^2\, y'' + b\, x\, y' + c\, y = 0$

ensayando como primera solución $y_1 = x^r$. Estudiar todos los casos que se presentan.

b) $x^2\, y'' + x\, y' + (x^2 - (1/4))\, y = 0$ con $y_1 = \sin x / \sqrt{x}$.

5.- Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

1.- Hallar las soluciones en todos los casos que se pueden presentar en la ecuación:

a) $y'' + b\, y' + c\, y = 0$
b) $y'' + \lambda\, y = 0$

2.- Hallar la solución general de:
a) $y'' + 3\, y' + 2\, y = 0$
b) $y'' + 4\, y' + 4\, y = 0$
c) $y'' - 4\, y' + 13\, y = 0$

d) $y''' + 5y'' = 0$
e) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$
f) $y''' - 12y' - 16y = 0$
g) $y''' + 15y'' + 75y' + 125y = 0$

6.- Solución de la Ecuación no homogénea. Método de Lagrange.

1.- Resolver.
a) $y'' + 3y' + 2y = e^{2x}$
b) $y'' + 4y' + 4y = e^{2x}$
c) $y'' + y = a\cos x + b\sin x$

7.- Aplicaciones

1.- Analizar la respuesta del movimiento amortiguado de un sistema mecánico simple (Masa ; amortiguador; resorte elástico) regido por la ecuación.
a) $m x'' + c x' + k x = 0$
b) $m x'' + c x' + k x = f(x)$

2.- Analizar la respuesta del un circuito serie L-R-C regido por la ecuación.

a) $L i' + R i + 1/C \int i(t)\,dt = 0$
b) $L i' + R i + 1/C \int i(t)\,dt = u(t)$

Comparar los resultados con los obtenidos en el sistema mecánico

3.- Analizar la respuesta del un circuito paralelo L-R-C (sistema libre y forzado)