

8 - Ondas Electromagnéticas 1

Una de las consecuencias más revolucionarias de las ecuaciones de Maxwell es la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas, así como que en el vacío su velocidad de propagación coincide con la observada velocidad de la luz. En este capítulo analizamos estas consecuencias y presentamos diversas aplicaciones tecnológicas de las ondas electromagnéticas.

Ondas en el vacío

Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell:

$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$	Gauss (campo eléctrico)
$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$	Gauss (campo magnético)
$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$	Faraday-Lenz
$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$	Maxwell-Ampère

representan al campo electromagnético en su mayor generalidad. Estas son ecuaciones diferenciales lineales a derivadas parciales inhomogéneas con cuatro campos incógnita.

Las soluciones más sencillas de las ecuaciones de Maxwell se producen para un recinto del espacio vacío y sin fuentes de campo:

- Si el recinto es **vacío**, valen las relaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$
- Si **no hay fuentes de campo** en su interior:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases}$$

Para que exista campo electromagnético debe haber fuentes que los generen. En el presente caso consideramos que las **fuentes del campo se hallan fuera** del recinto de integración. Veremos en el Capítulo 10 (Radiación electromagnética) el análisis que se realiza cuando las fuentes se hallan **dentro** del recinto de integración.

Estas hipótesis permiten pasar de cuatro campos incógnita a dos y de ecuaciones inhomogéneas a ecuaciones homogéneas. Resultan las ecuaciones:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Podemos desacoplar estas ecuaciones diferenciales acopladas tomando el rotor de la ec. de Faraday y usando la ec. de Maxwell-Ampère:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Pero: $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$ porque $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

Entonces:
$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Si tomamos ahora el rotor de la ec. de Maxwell-Ampère y procedemos en forma similar, llegamos a la misma ecuación para el campo magnético: $\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$

Por lo tanto hemos podido desacoplar las ecuaciones en cada uno de los campos incógnita, pero hemos tenido que pasar de ecuaciones de primer orden a ecuaciones de segundo orden.

Las ecuaciones halladas se conocen como ecuaciones **vectoriales** de **D'Alembert**. En coordenadas cartesianas, cada componente $f(\mathbf{r}, t)$ de los campos satisface la ecuación escalar:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{que es la ecuación escalar de D'Alembert hallada previamente en la}$$

propagación de ondas en líneas de transmisión. Esta es una ecuación que describe una propagación ondulatoria, de donde se deduce que las soluciones a las ecuaciones de Maxwell en un recinto vacío sin fuentes de campo son **ondas electromagnéticas**.

La solución de las ecuaciones vectoriales de onda no es sencilla, pero puede demostrarse que, al menos en los sistemas de coordenadas separables de mayor interés¹ las soluciones de las ecuaciones de onda **vectoriales** se pueden obtener a partir de las correspondientes soluciones de las ecuaciones de onda **escalares** para el mismo sistema de coordenadas.

Ondas planas elementales

En el caso de las **coordenadas cartesianas**, para facilitar el tratamiento matemático trabajamos con **ondas planas**, donde los campos dependen de una **única** coordenada espacial y del tiempo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(z, t) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(z, t)$$

Además, para evitar derivar versores, usaremos ondas **linealmente polarizadas**, donde los campos mantienen su dirección vectorial en el tiempo²:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(z, t) \hat{\mathbf{e}}_0 \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H(z, t) \hat{\mathbf{h}}_0$$

$\hat{\mathbf{e}}_0$ y $\hat{\mathbf{h}}_0$ son los versores (constantes) que definen la dirección de los campos.

En resumen:

Cartesianas

- **onda plana:** los campos dependen de una única coordenada espacial
- **polarización lineal:** los campos se propagan manteniendo su dirección vectorial

Entonces: $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

que es una ecuación escalar de D'Alembert. Como se demostró en el **Capítulo 6**, toda función de la forma: $f(z \mp ct)$ es solución de la ecuación de D'Alembert. Estas formas matemáticas representan ondas que se propagan con velocidad $\pm c$ a lo largo de la dirección z .

Dado que: $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ y este valor coincide con el valor medido de la velocidad de la luz en el vacío, Maxwell propuso en 1864 que la luz era un fenómeno electromagnético, afirmación que corroboró experimentalmente Hertz en 1887. Este resultado, que puso a todos los fenómenos ópticos como casos particulares de los fenómenos electromagnéticos, ha sido una de las síntesis más abarcativas de la historia de la física

El doble signo de la función determina el sentido de la propagación:

$$\begin{array}{l} f(z - ct) \quad \text{propagación según } +z \text{ (onda progresiva)} \\ f(z + ct) \quad \text{propagación según } -z \text{ (onda regresiva)} \end{array}$$

¹ Ver, por ejemplo, J.A.Stratton, "Electromagnetic Theory", McGraw-Hill Book Co., New York, 1941, Caps. V-VII.

² Obsérvese que en general, como en coordenadas cartesianas los versores son constantes, es posible pasar de la ecuación de onda **vectorial** a tres ecuaciones de onda **escalares**, una para cada componente del campo.

Transversabilidad

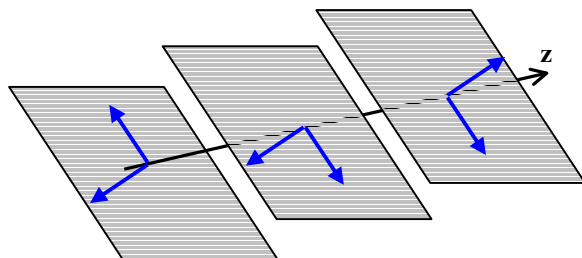
Las ecuaciones de Maxwell imponen ciertas restricciones sobre los campos. En particular las leyes de Gauss llevan a que los campos sean transversales a la dirección de propagación.

$$\text{Como: } \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \mathbf{E}(z, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

ya que el campo no depende de x ni de y . Como E_z depende de z y de t , esta ecuación lleva a que E_z dependa solamente de t : $E_z(z, t) = E_z(t)$ y como además E_z satisface la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_z(t) = At + B$$

Resulta entonces que E_z varía linealmente con el tiempo. Independientemente del signo de A , se observa que la amplitud del campo crece indefinidamente con el tiempo, lo que es físicamente imposible porque llevaría a una energía infinita. Entonces A debe ser cero. Queda un campo uniforme, que nuevamente lleva a una energía infinita cuando se integra la densidad de energía, que es proporcional al cuadrado del campo, sobre todo el espacio, de modo que esta constante debe ser cero. Se tiene entonces que la componente del campo eléctrico sobre la dirección de propagación se anula. Se obtiene el mismo resultado partiendo de la ecuación de la divergencia de \mathbf{H} :



$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 &\Rightarrow E_z = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 &\Rightarrow H_z = 0 \end{aligned}$$

De estas expresiones se ve que los campos de una onda plana no tienen componentes sobre la dirección de propagación. Se dice que son campos transversales.

En todo punto del espacio y en todo momento los campos se hallan sobre planos perpendiculares a la dirección de propagación.

Relación entre \mathbf{E} y \mathbf{H}

Por otra parte, las ecuaciones de Maxwell imponen relaciones entre los campos. Por ejemplo, si aplicamos la ley de Faraday: $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Dado que los campos dependen sólo de z y t y no existe componente según z :

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\mu_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial H_y}{\partial t} \hat{\mathbf{y}} \right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \end{cases}$$

Cada componente de los campos de una onda plana debe tener la forma $f(z \mp ct)$, de modo

$$\text{que, tomando: } u = z \mp ct \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d}{du}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \mp c \frac{d}{du}$$

y entonces:

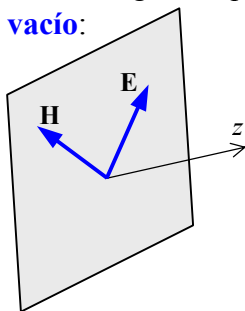
$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} &\Rightarrow \frac{dE_y}{du} = \mp c \mu_0 \frac{dH_x}{du} \Rightarrow H_x = \mp \frac{1}{\eta_0} E_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} &\Rightarrow \frac{dE_x}{du} = \pm c \mu_0 \frac{dH_y}{du} \Rightarrow H_y = \pm \frac{1}{\eta_0} E_x \end{aligned}$$

donde $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$. Estas ecuaciones se pueden reescribir en forma vectorial:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0}$$

η_0 es una magnitud que tiene dimensiones de impedancia y se denomina **impedancia intrínseca del vacío**:

$$\eta_0 \cong 377 \Omega$$



En la ecuación que relaciona los campos, el signo (+) del doble signo corresponde a una onda progresiva. Se observa que el campo magnético es perpendicular al campo eléctrico y ambos resultan perpendiculares a la dirección de propagación. Los tres vectores forman así un triedro.

Las relaciones halladas (de transversabilidad y entre los campos) son válidas para cualquier forma de onda plana.

Ejemplo 8.1: Una onda plana se propaga en el vacío en la dirección y sentido de +z. En

$t = 0$ el campo eléctrico vale: $E_x(0, t) = \frac{a^2 E_0}{a^2 + c^2 t^2}$ donde E_0 y a son constantes. Si los campos no alteran su dirección en la propagación, escriba la expresión de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. ¿Cumplen estos campos las ecuaciones de Maxwell?

Se trata de una onda plana progresiva, de modo que debe tener la forma $f(z - ct)$. Por lo tanto, la expresión del campo eléctrico (que se propaga paralelo a sí mismo) es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{a^2 E_0 \hat{\mathbf{x}}}{a^2 + (z - ct)^2}$$

De aquí puede calcularse fácilmente el campo magnético como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{a^2 E_0 / \eta_0 \hat{\mathbf{y}}}{a^2 + (z - ct)^2}$$

Como estos campos tienen la forma de la solución de la ecuación de ondas, que surge de las ecuaciones de Maxwell para un recinto vacío sin fuentes de campo, se ve que deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell.

Vector de Poynting y densidad de energía

El vector de Poynting de una onda plana en el vacío es:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \left(\pm \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \right) = \pm \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}}$$

donde el signo (+) vale para la onda progresiva y el signo (-) para la onda regresiva.

Este resultado es válido cualquiera sea la forma de onda de la onda plana.

La densidad de energía de una onda plana en el vacío puede escribirse:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2} [\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0 H^2(\mathbf{r}, t)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0^2} \right] = \frac{1}{2} [\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t)] = \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

y finalmente:

$$u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t)$$

Se observa que la contribución del campo eléctrico y la contribución del campo magnético son iguales. La energía está "equipartida" entre ambos campos. Además, podemos ver que:

$$\frac{\mathbf{N}(\mathbf{r}, t)}{u(\mathbf{r}, t)} = \pm \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\eta_0 \epsilon_0} = \pm c \hat{\mathbf{z}}$$

Esta es la llamada **velocidad de la energía**, que describe la velocidad con que el frente de onda (el plano frontera entre la región donde hay campo y la región donde no hay campo) transporta la energía.

Ondas monocromáticas o armónicas

Como en el caso de ondas en líneas de transmisión, un caso particular de funciones que satisfacen la ecuación de ondas son las funciones armónicas:

$$g(z \mp ct) = g_0 \sin(\omega t \mp kz + \varphi_0), \quad g_0 \cos(\omega t \mp kz + \varphi_0)$$

donde g_0 es la amplitud y φ_0 un ángulo de fase. Estas son funciones de una única **frecuencia** $f = \omega / 2\pi$. Se define el **número de onda** $k = \omega / c = 2\pi / \lambda$ en función de la **longitud de onda** λ . Estas son funciones de onda **periódicas**, con **periodo** $T = \lambda / c = 1 / f$.

Debido a que cualquier función de cuadrado integrable es representable mediante una **integral**

de Fourier:

$$g(z, t) = \int_0^{\infty} G_{\omega}(z) e^{i(\omega t - kz)} d\omega \quad (\text{onda progresiva})$$

(o una **serie de Fourier** si la función es periódica) y esta representación es una superposición de funciones armónicas, es posible analizar las propiedades físicas generales de las ondas electromagnéticas usando ondas de una única frecuencia u ondas monocromáticas.

Es común utilizar la representación fasorial de las ondas armónicas:

$$g(z \mp ct) = g_0 \cos(\omega t \mp kz + \varphi_0) = \Re e \left\{ \tilde{g}_0 e^{i(\omega t \mp kz)} \right\} = |g_0| \Re e \left\{ e^{i(\omega t \mp kz + \varphi_0)} \right\}$$

donde hemos usado el complejo $\tilde{g}_0 = g_0 e^{i\varphi_0}$. En muchas ocasiones sobreentenderemos el signo de “parte real”, cuando realicemos operaciones lineales (p.ej., suma algebraica, derivación integración, etc.). En tal caso es indiferente operar con los números complejos y tomar la parte real al final u operar desde el principio con las partes reales.

Sin embargo, si la operación a realizar no es lineal (producto, cociente, potencia, etc.) es imprescindible operar desde el principio con las “partes reales”, que representan las cantidades físicas verdaderas.

La ecuación de ondas de D'Alembert se convierte en la **ecuación de Helmholtz** en el caso de ondas armónicas:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{con} \quad k = \omega / c$$

y lo mismo ocurre con la ecuación de onda para el campo magnético.

En coordenadas cartesianas esta ecuación vectorial se convierte en tres ecuaciones escalares, una para cada componente del campo.

Vector de onda

La expresión fasorial de la onda monocromática: $g(z, t) = \tilde{g}_0 e^{i(\omega t - kz)}$

representa una onda plana monocromática progresiva que se propaga según $+z$. Sin embargo, en muchas ocasiones es necesario describir la propagación de una onda plana en una dirección cualquiera del espacio ζ . Para ello se usa el **vector de onda** o **vector de propagación** \mathbf{k} :

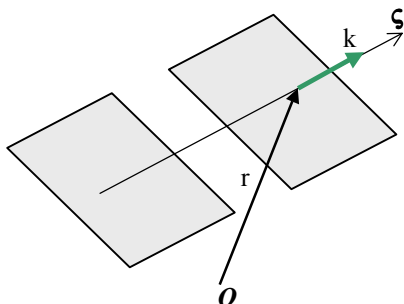
$$g(\mathbf{r}, t) = \Re e \left\{ \tilde{g}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\} \quad \text{con} \quad \mathbf{k} = k \hat{\zeta}$$

que es un vector cuya dirección y sentido es el de la propagación y cuyo módulo es ω/c .

Una onda monocromática plana que se propaga según el vector de onda \mathbf{k} tiene campos sobre planos transversales a \mathbf{k} . Si suponemos una onda linealmente polarizada:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re e \left\{ \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{e}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\zeta} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\omega \mu} = \Re e \left\{ \frac{\tilde{E}_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{h}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\}$$



con $\hat{\mathbf{h}}_0 = \hat{\zeta} \times \hat{\mathbf{e}}_0$

En esta representación fasorial, donde cada campo está descrito por una **amplitud** (p.ej., \tilde{E}_0) y una **fase** ($\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$), podemos definir una onda plana como **aquella cuyas superficies de fase constante son planos**. Se ve que las superficies de fase constante están dadas por la expresión: $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = cte.$ que es la ecuación de una familia de planos perpendiculares al vector de onda, y que se mueven en la dirección y sentido de \mathbf{k} a la velocidad c .

Las magnitudes asociadas a la energía de la onda son:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{|E_0|^2}{\eta_0} \hat{\zeta} \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0) \quad \text{con} \quad \tilde{E}_0 = |E_0| e^{i\varphi_0}$$

$$u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 |E|^2 = \epsilon_0 |E_0|^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)$$

Ecuaciones de onda en forma fasorial

Vamos a analizar la forma que adoptan las ecuaciones de onda en el caso de campos monocromáticos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$$

En un recinto vacío y libre de fuentes las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 & \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega \mu_0 \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) &= 0 & \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) - i\omega \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación de ondas de D'Alembert para el campo eléctrico resulta:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + k^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{con} \quad k = \omega / c$$

que es una ecuación de Helmholtz. Se obtiene una ecuación idéntica para H.

Para ondas planas linealmente polarizadas: $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{E}(z) \hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} = \frac{d^2 \tilde{E}}{dz^2} \hat{\mathbf{x}}$

y la ecuación de Helmholtz queda: $\frac{d^2 \tilde{E}}{dz^2} + k^2 \tilde{E} = 0$ cuya solución es: $\tilde{E}(z) = \tilde{E}_0 e^{\pm i k z}$

de modo que queda una solución fasorial: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_{0_1} e^{i(\omega t - k z)} + \tilde{E}_{0_2} e^{i(\omega t + k z)}$ que consiste en la superposición de una onda progresiva y una regresiva. Se obtiene una solución idéntica para el

campo magnético: $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{E}_{0_1}}{\eta_0} e^{i(\omega t - k z)} - \frac{\tilde{E}_{0_2}}{\eta_0} e^{i(\omega t + k z)}$

donde se debe notar el signo negativo de la componente regresiva. Este signo lleva a que el vector de Poynting de la onda regresiva apunte en el sentido negativo de z .

Vector de Poynting y densidad de energía

Consideremos una onda plana linealmente polarizada progresiva:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - k z)} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{E}_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k z)}$$

Para calcular el vector de Poynting, como se trata de una operación no lineal, hay que expresar los campos en su forma verdadera (la forma real):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - k z + \psi_0) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - k z + \psi_0)$$

donde E_0 es el módulo y ψ_0 es el ángulo de fase del fasor \tilde{E}_0 .

Entonces:
$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0^2}{\eta_0^2} \hat{\mathbf{z}} \cos^2(\omega t - kz + \psi_0)$$

Nótese que multiplicando ingenuamente las formas fasoriales se obtendría:

$$\frac{E_0^2}{\eta_0^2} \hat{\mathbf{z}} e^{i2(\omega t - kz + \psi_0)} = \frac{E_0^2}{\eta_0^2} \hat{\mathbf{z}} \cos[2(\omega t - kz + \psi_0)]$$

que es una cantidad completamente diferente (y errónea).

Valores medios

La ecuación hallada da el **valor instantáneo** del vector de Poynting. En la mayoría de los casos la magnitud significativa es su **valor medio** o **promedio temporal**, definido como:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) dt \quad \text{para } \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) \text{ periódica de periodo } T. \text{ Tenemos así:} \\ \langle \mathbf{N} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{\eta_0^2} \cos^2(\omega t - kz + \psi_0) dt = \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi\eta_0^2} \int_{-kz+\psi_0}^{2\pi-kz+\psi_0} \cos^2(\omega t - kz + \psi_0) d(\omega t - kz + \psi_0) \\ &= \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi\eta_0^2} \int_{-kz+\psi_0}^{2\pi-kz+\psi_0} \cos^2 u du = \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi\eta_0^2} \int_{-kz+\psi_0}^{2\pi-kz+\psi_0} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\eta_0^2} \end{aligned}$$

donde hemos usado la relación $\omega T = 2\pi$. La integral vale π .

Podemos usar también la expresión del **APENDICE 1** para hallar el valor medio del vector de Poynting en notación fasorial:

$$\langle f g \rangle = \frac{1}{2} \Re e(\tilde{f}_0 \tilde{g}_0^*)$$

Tenemos así:
$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re e(\tilde{\mathbf{E}}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}_0^*) = \frac{1}{2} \Re e\left(\tilde{E}_0 \frac{\tilde{E}_0^*}{\eta_0}\right) \hat{\mathbf{z}} = \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\eta_0^2}$$
 igual que antes.

El promedio temporal del vector de Poynting de una onda representa la potencia media que la onda transporta por unidad de área transversal a la propagación, y se conoce como **intensidad** de la radiación en las aplicaciones ópticas.

Calculamos ahora la densidad de energía instantánea del campo electromagnético de una onda plana, operando con las partes reales:

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 \frac{E^2}{\eta_0} \right) = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \psi_0)$$

Tomando el valor medio temporal, como en el caso del vector de Poynting:

$$\langle u \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kz + \psi_0) \rangle \Rightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

Ondas no armónicas

En general, los campos de una onda plana linealmente polarizada en el vacío pueden representarse mediante integrales de Fourier:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re e \left\{ \int_0^\infty \tilde{\mathbf{E}}(z, \omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta_0} \Re e \left\{ \int_0^\infty \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}(z, \omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}$$

que son las generalizaciones de la representación en serie de Fourier de un campo periódico. Para el análisis siguiente vamos a trabajar con **funciones periódicas**, aunque las conclusiones que hallemos se pueden extender a casos no periódicos.

Entonces, representamos los campos de periodo T como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re e \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} \right\} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta_0} \Re e \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} \right\} \quad \text{con } \omega = 2\pi/T$$

Estas representaciones tienen periodo T , como puede verse fácilmente comprobando que: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t + T) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Queremos calcular los valores medios del vector de Poynting y la densidad de energía en este caso. Para una onda progresiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\eta_0} \left[\Re e \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} \right\} \right]^2 \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{4\eta_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) e^{-in\omega t} \right]^2 \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{4\eta_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_m(z) e^{im\omega t} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) e^{-in\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) e^{-im\omega t} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) e^{-im\omega t} \right]^2 \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{4\eta_0} \left[\sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m(z) e^{i(n+m)\omega t} + \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) e^{-i(n+m)\omega t} + 2 \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) e^{i(n-m)\omega t} \right] \end{aligned}$$

El valor medio del vector de Poynting es entonces:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) dt \\ &= \frac{\hat{\mathbf{z}}}{4\eta_0 T} \int_0^T \left[\sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m(z) e^{i(n+m)\omega t} + \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) e^{-i(n+m)\omega t} + 2 \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) e^{i(n-m)\omega t} \right] dt \\ &= \frac{\hat{\mathbf{z}}}{4\eta_0 T} \left[\sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m(z) \int_0^T e^{i(n+m)\omega t} dt + \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) \int_0^T e^{-i(n+m)\omega t} dt + 2 \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) \int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt \right] \end{aligned}$$

Pero por la ortogonalidad de las funciones $e^{i\omega t}$:

$$\int_0^T e^{\pm i(n+m)\omega t} dt = 0$$

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt = \begin{cases} T & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

y nos queda:

$$\langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E_n(z)|^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\eta_0}$$

de donde se ve que el promedio temporal del vector de Poynting es la suma de los promedios temporales de los vectores de Poynting para cada armónica. Entonces podemos decir que, desde el punto de vista de la energía, las distintas armónicas están desacopladas, es decir, no hay términos que involucren intercambio de energía entre una armónica y otra.

Lo mismo ocurre con la densidad de energía:

$$\langle u(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 |E_n(z)|^2}{2}$$

Estos resultados se pueden extender al caso de una representación integral de Fourier³ para una función no periódica.

Ejemplo 8.2: El campo eléctrico de una onda plana en el vacío es :

$$E(r, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} [\cos(\omega t - kz) + (1/3) \cos 3(\omega t - kz)] \quad \text{con } k = \omega / c$$

³ Esta propiedad surge de un teorema matemático general vinculado con la representación de Fourier, que es el teorema de Parseval:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Halle el campo magnético, el valor promedio del vector de Poynting y la densidad de energía. Se trata de una superposición de dos armónicas. El campo magnético asociado es:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) / \eta_0 = (E_0 / \eta_0) \hat{\mathbf{y}} [\cos(\omega t - kz) + (1/3) \cos 3(\omega t - kz)]$$

El vector de Poynting **instantáneo** es:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \left[\cos^2(\omega t - kz) + \frac{1}{9} \cos^2 3(\omega t - kz) + \frac{2}{3} \cos(\omega t - kz) \cos 3(\omega t - kz) \right] \mathbf{E}$$

vector de Poynting es una función periódica del tiempo, de periodo $T = 2\pi / \omega$ (verificarlo). El **promedio temporal** del vector de Poynting es entonces:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \left[\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle + \frac{1}{9} \langle \cos^2 3(\omega t - kz) \rangle + \frac{2}{3} \langle \cos(\omega t - kz) \cos 3(\omega t - kz) \rangle \right] \\ &= \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{9} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} 0 \right] = \frac{5E_0^2}{9\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Se ve que el término que involucra el producto de las funciones de distinta frecuencia es nulo, como puede probarse en general a partir de los resultados de esta sección. El vector promedio de Poynting total es la suma de los vectores de Poynting medios para cada armónica.

Lo mismo ocurre para la densidad de energía:

$$\frac{\mathbf{N}(\mathbf{r}, t)}{u(\mathbf{r}, t)} = c \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow u(\mathbf{r}, t) = \frac{N(\mathbf{r}, t)}{c} \Rightarrow \langle u(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\langle N(\mathbf{r}) \rangle}{c} = \frac{5E_0^2}{9\eta_0 c} = \frac{5}{9} \epsilon_0 E_0^2$$

En este caso no podemos calcular los valores medios usando las propiedades de la notación fasorial descripta en el APENDICE 1 porque la onda **no es armónica o monocromática**.

Ondas esféricas elementales

En las ondas esféricas elementales los campos dependen solamente de la distancia a un punto de referencia, que se toma como origen de coordenadas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(r,t) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}(r,t)$$

La ecuación **escalar** de ondas en coordenadas esféricas para este tipo de dependencia es:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Para hallar la solución de esta ecuación de ondas, definimos: $f(r,t) = g(r,t)/r$ de donde:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{r(\partial g/\partial r) - g}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} - g \right) = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\partial g}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

y la ecuación diferencial queda: $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$

de donde se ve que, desde el punto de vista matemático formal, la ecuación para g es una ecuación de ondas planas, de forma que tiene la solución:

$$g(r,t) = g(r \mp ct) \Rightarrow f(r,t) = \frac{g(r,t)}{r} = \frac{g(r \mp ct)}{r}$$

El doble signo en la función del numerador define, como en el caso de las ondas planas, el sentido de la propagación. El signo (-) corresponde a una onda “**progresiva**” que se propaga en el **sentido creciente** de r , mientras que el signo (+) corresponde a una onda “**regresiva**” que se propaga en el sentido **decreciente** de r .

Ondas monocromáticas o armónicas

De igual manera que en las ondas planas, el numerador de una onda esférica elemental $f(r,t) = g(r \mp ct)/r$ puede expresarse mediante una representación de Fourier, una superposición de ondas armónicas del tipo: $f(r,t) = \tilde{f}_0 e^{i(\omega t \mp kr)}/r$ con $k = \omega/c$. Todas las propiedades halladas para las ondas armónicas planas se aplican también a estas ondas esféricas elementales armónicas.

Condiciones de transversabilidad

Para analizar las condiciones de transversabilidad de los campos de una onda esférica es necesario hallar las soluciones de la ecuación de onda **vectorial**. A diferencia del caso cartesiano, donde los versores son constantes y la ecuación de onda vectorial se reduce a tres ecuaciones de onda escalares sobre las componentes de los campos, en coordenadas esféricas esto no ocurre y es necesario buscar otras relaciones, si existen, entre las soluciones de la ecuación de onda escalar y las soluciones de la ecuación de onda vectorial. Estas relaciones fueron halladas por Mie y Debye⁴ en estudios de dispersión luminosa por partículas.

Sea $f(\mathbf{r},t) = f_s(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ la solución de la ecuación de ondas para ondas armónicas, de manera que $f_s(\mathbf{r})$ es solución de la correspondiente ecuación de Helmholtz. Entonces definimos los campos vectoriales:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \nabla \times [\mathbf{r} f(\mathbf{r},t)] \quad \text{y} \quad \mathbf{N}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r},t)$$

Observamos que ambos campos son solenoidales ($\nabla \cdot \mathbf{M} = \nabla \cdot \mathbf{N} = 0$) por ser proporcionales a un rotor, y están ligados entre sí a través del rotor. Por lo tanto estas funciones son candidatas a representar los campos eléctrico y magnético en el vacío, que son solenoidales y están ligados

⁴ G.Mie, Ann.Physik,25,377,1908 y P.Debye,Ann.Physik,30,57,1909. Para una presentación moderna, ver C.F.Bohren y D.R.Huffman, "Absorption and Scattering of Light by Small Particles", Wiley, New York, 1983, pp. 83-84.

entre sí a través del rotor. Puede demostrarse que \mathbf{M} satisface la ecuación vectorial de Helmholtz.

Además como: $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times [\mathbf{r} f(\mathbf{r}, t)] = -\mathbf{r} \times \nabla f(\mathbf{r}, t)$

se ve que \mathbf{M} es normal a \mathbf{r} y de la ecuación que define a \mathbf{N} este campo también resulta normal a \mathbf{r} . Por lo tanto, en el vacío, las soluciones a la ecuación vectorial de ondas **son campos transversales a la dirección de propagación** en el caso de las ondas esféricas elementales.

Impedancia intrínseca

Las ecuaciones del rotor ligan entre sí estas componentes transversales. Consideremos nuevamente las soluciones generales de ondas esféricas elementales **progresivas**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{e}(r - ct)}{r} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{h}(r - ct)}{r}$$

Tomamos la ley de Faraday: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ y tenemos así:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & r E_\theta & r \sin \theta E_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[-r\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta E_\phi) + r \sin \theta \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \right]$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[-(r E_\phi) \hat{\theta} + (r E_\theta) \hat{\phi} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-e_\phi \hat{\theta} + e_\theta \hat{\phi})$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (H_\theta \hat{\theta} + H_\phi \hat{\phi}) = -\frac{\mu_0}{r} \frac{\partial}{\partial t} (h_\theta \hat{\theta} + h_\phi \hat{\phi})$$

y de la ley de Faraday: $\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-e_\phi \hat{\theta} + e_\theta \hat{\phi}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{r} \frac{\partial}{\partial t} (h_\theta \hat{\theta} + h_\phi \hat{\phi})$

entonces: $\frac{\partial}{\partial r} (-e_\phi \hat{\theta} + e_\theta \hat{\phi}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (h_\theta \hat{\theta} + h_\phi \hat{\phi})$

Definimos la variable $u = r - ct$ de donde: $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{d}{du}$ $\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{d}{du}$ y entonces:

$$\frac{d}{du} (-e_\phi \hat{\theta} + e_\theta \hat{\phi}) = \mu c \frac{d}{du} (h_\theta \hat{\theta} + h_\phi \hat{\phi}) \Rightarrow \begin{cases} e_\phi = -\mu c h_\theta = -\eta h_\theta \\ e_\theta = \mu c h_\phi = \eta h_\phi \end{cases}$$

donde $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ es la impedancia intrínseca del vacío. Este par de ecuaciones que ligan a las componentes transversales de los campos entre sí se pueden resumir en las expresiones:

$$\mathbf{E}_T = -\eta_0 (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_T) \quad \mathbf{H}_T = \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_T}{\eta_0}$$

En general, $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$, y el campo eléctrico no es solenoidal. En tal caso se requiere otro tipo de solución, que **no** produce ondas transversales. Esta solución es, en coordenadas esféricas: $\mathbf{L}(\mathbf{r}, t) = \nabla f(\mathbf{r}, t)$ donde $f(\mathbf{r}, t)$ es la solución de la ecuación escalar de Helmholtz. En este caso el campo eléctrico tiene una componente longitudinal en la dirección de propagación.

Ondas cilíndricas elementales

En las ondas cilíndricas elementales los campos dependen solamente de la distancia a un eje de referencia, que se toma como eje z de un sistema de coordenadas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\rho, t) \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\rho, t)$$

La ecuación **escalar** de ondas en coordenadas cilíndricas para este tipo de dependencia es:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

A diferencia de las ondas planas no se puede reducir esta ecuación diferencial a una forma analíticamente simple o general. Sin embargo, es posible hallar las soluciones para ondas armónicas o monocromáticas, a partir de las cuales se puede hallar la solución general mediante la representación de Fourier.

Tomamos así: $f(\rho, t) = f_s(\rho) e^{i\omega t}$ y nos queda la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df_s}{d\rho} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} f_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df_s}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 f_s = 0 \quad \text{con } k = \omega/c$$

Esta es la **ecuación de Bessel**, que vimos en el Capítulo 7, para $n = 0$. Por lo tanto, la solución es:

$$f_s(\rho) = \begin{cases} A J_0(k\rho) + B Y_0(k\rho) & k \neq 0 \\ A' \ln(\rho) + B' & k = 0 \end{cases}$$

donde $J_0(k\rho)$ es la **función de Bessel** de orden cero (regular en el origen) y $Y_0(k\rho)$ es la **función de Neumann** de orden cero (singular en el origen). Estas funciones son linealmente independientes. Para describir situaciones de propagación ondulatoria es conveniente usar otro par de funciones linealmente independientes:

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + i Y_0(x) \qquad H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - i Y_0(x)$$

que son las llamadas **funciones de Hankel** de primera y segunda especie.

Finalmente, la solución armónica para las ondas cilíndricas elementales es:

$$f(\rho, t) = [A H_0^{(1)}(k\rho) + B H_0^{(2)}(k\rho)] e^{i\omega t}$$

Para puntos lejanos ($\rho \rightarrow \infty$), las funciones de Bessel tienden a (pág. 7-5):

$$x \rightarrow \infty: \quad J_0(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad Y_0(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

de modo que las funciones de Hankel tienden a:

$$x \rightarrow \infty: \quad H_0^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \qquad H_0^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

y entonces: $x \rightarrow \infty: \quad f(\rho, t) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \left[A e^{i\left(\omega t + k\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + B e^{i\left(\omega t - k\rho + \frac{\pi}{4}\right)} \right]$

que se ve como la superposición de una onda **progresiva** (que se propaga en el sentido **creciente** de ρ) y una onda **regresiva** (que se propaga en el sentido **decreciente** de ρ).

En forma similar a las ondas esféricas es posible hallar soluciones a la ecuación **vectorial** de onda en función de las soluciones a la ecuación escalar. En la propagación de ondas en el vacío pueden hallarse soluciones de ondas **transversales**.

El cálculo de la **impedancia intrínseca** para la propagación de ondas transversales elementales se complica por la presencia de las funciones de Bessel, pero se obtienen las mismas relaciones que en los casos cartesiano plano y esférico elemental.

Superposición de ondas

Cuando hay más de una fuente de ondas electromagnéticas presentes simultáneamente se dan dos situaciones:

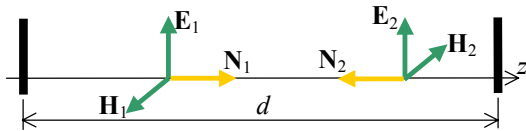
- las fases de las fuentes **están correlacionadas en el tiempo**.

En este caso se dice que las fuentes son **coherentes**. Los campos individuales de cada onda se superponen linealmente para dar un campo resultante. Esta superposición introduce diferencias de fase debido a la relación de fase original de las fuentes y la posición del punto de observación, que llevan a una redistribución de la energía en el espacio que llamamos **interferencia**. Un ejemplo de fuentes coherentes es un conjunto de antenas alimentadas desde una misma fuente.

- las fases de las fuentes **no están correlacionadas en el tiempo**.

En este caso se dice que las fuentes son **incoherentes**. Se superponen las **intensidades** (vectores de Poynting) individuales de las ondas para dar una intensidad resultante. Como las intensidades no contienen relaciones de fase, no se produce interferencia. Un ejemplo típico de fuentes incoherentes son las fuentes extensas de luz como un tubo fluorescente.

Ejemplo 8.3: Analizar el comportamiento del campo emitido por dos fuentes de ondas planas linealmente polarizadas y monocromáticas de igual frecuencia que irradian **coherentemente** en la dirección z .



Los campos emitidos por cada fuente se ilustran en la figura. Tomamos un sistema coordenado con su

eje x vertical y tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)} & \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - kz)} & \Rightarrow \mathbf{N}_1(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \cos^2(\omega t - kz) \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) &= E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i[\omega t + k(z-d)]} & \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) &= -\frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} e^{i[\omega t + k(z-d)]} & \Rightarrow \mathbf{N}_2(\mathbf{r}, t) &= -\frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \cos^2[\omega t + k(z-d)] \end{aligned}$$

donde se ha supuesto por simplicidad matemática que E_0 es real. Obsérvense los signos de los vectores y su relación con el sentido de la propagación. La fuente de la izquierda genera una onda progresiva y la de la derecha (ubicada en $z = d$) una onda regresiva. Como la emisión de ondas es coherente, se suman los campos y se obtiene para el campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i\omega t} [e^{-ikz} + e^{ik(z-d)}] = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right)} \left[e^{-i\left(kz - \frac{kd}{2}\right)} + e^{i\left(kz - \frac{kd}{2}\right)} \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right)} \cos\left(kz - \frac{kd}{2}\right)$$

y análogamente para el campo magnético:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -2i \frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} e^{i\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right)} \sin\left(kz - \frac{kd}{2}\right)$$

Si tomamos las partes reales de estas expresiones fasoriales para obtener la forma verdadera de los campos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 2E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \cos\left(kz - \frac{kd}{2}\right) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \sin\left(kz - \frac{kd}{2}\right) \end{aligned}$$

Se ve que existen puntos donde los campos son siempre nulos:

$$k\left(z_n - \frac{d}{2}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{m\u00e1ximo} \Rightarrow z_n = \frac{d}{2} + (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$k\left(z_m - \frac{d}{2}\right) = m\pi \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{m\u00e1ximo} \Rightarrow z_m = \frac{d}{2} + m\frac{\lambda}{2}$$

En los puntos en que el campo el\u00e9ctrico es siempre nulo, el campo magn\u00e9tico oscila con amplitud m\u00e1xima, y viceversa. Hay un desfase espacial de $\pi/2$. Se dice que los campos est\u00e1n en **cuadratura espacial**. Adem\u00e1s existe un desfase temporal de $\pi/2$. Se dice que los campos est\u00e1n en **cuadratura temporal**. Estas son caracter\u00edsticas de una **onda estacionaria**.

Para analizar el comportamiento energ\u00e9tico, calculamos el vector de Poynting instant\u00e1neo:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \text{sen} \left[2\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \right] \text{sen} \left[2\left(kz - \frac{kd}{2}\right) \right]$$

y su valor medio:

$$\langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \left\langle \text{sen} \left[2\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \right] \right\rangle \text{sen} \left[2\left(kz - \frac{kd}{2}\right) \right] = 0$$

No hay flujo de potencia en la onda estacionaria

La densidad instant\u00e1nea de energ\u00eda es:

$$u(r, t) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$$

$$= \frac{1}{2} \left[4\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \left(\omega t - \frac{kd}{2} \right) \cos^2 \left(kz - \frac{kd}{2} \right) + 4\mu_0 \frac{E_0^2}{\eta_0^2} \text{sen}^2 \left(\omega t - \frac{kd}{2} \right) \text{sen}^2 \left(kz - \frac{kd}{2} \right) \right]$$

$$= 2\epsilon_0 E_0^2 \left[\cos^2 \left(\omega t - \frac{kd}{2} \right) \cos^2 \left(kz - \frac{kd}{2} \right) + \text{sen}^2 \left(\omega t - \frac{kd}{2} \right) \text{sen}^2 \left(kz - \frac{kd}{2} \right) \right]$$

y su valor medio:

$$\langle u(\mathbf{r}) \rangle = 2\epsilon_0 E_0^2 \left(\left\langle \cos^2 \left(\omega t - \frac{kd}{2} \right) \right\rangle \cos^2 \left(kz - \frac{kd}{2} \right) + \left\langle \text{sen}^2 \left(\omega t - \frac{kd}{2} \right) \right\rangle \text{sen}^2 \left(kz - \frac{kd}{2} \right) \right)$$

$$= \epsilon_0 E_0^2 \left(\cos^2 \left(kz - \frac{kd}{2} \right) + \text{sen}^2 \left(kz - \frac{kd}{2} \right) \right) = \epsilon_0 E_0^2$$

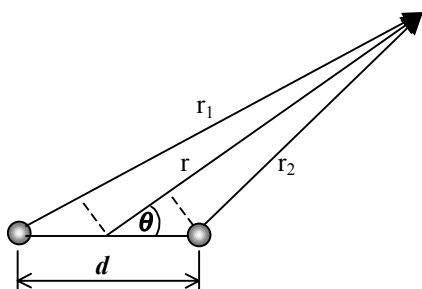
y se observa que la distribuci\u00f3n de la energ\u00eda que transporta la onda es homog\u00e9nea como la de la onda plana sin interferencia.

Sin embargo, hay situaciones donde la interferencia produce una redistribuci\u00f3n de la energ\u00eda en el espacio, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.4: Analizar el comportamiento del campo lejano emitido en el vac\u00edo por dos fuentes de ondas **esf\u00e9ricas** linealmente polarizadas y monocrom\u00e1ticas de igual frecuencia que irradian coherentemente.

El campo creado en el vac\u00edo por una fuente esf\u00e9rica situada en el origen de coordenadas puede escribirse, en coordenadas esf\u00e9ricas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} e^{i(\omega t - kr)} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\eta_0 r} \hat{\boldsymbol{\phi}} e^{i(\omega t - kr)}$$



Si el punto de observaci\u00f3n es lejano, podemos aproximar suponiendo que los campos emitidos por ambas fuentes son colineales, y entonces:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \approx E_0 \hat{\boldsymbol{\theta}} e^{i\omega t} \left[\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{E_0}{\eta_0} \hat{\boldsymbol{\phi}} e^{i\omega t} \left[\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right]$$

De acuerdo a la figura, para puntos lejanos ($r \gg d$): $r_{1,2} \approx r \pm \frac{d}{2} \cos \theta$

Estas distancias entran en la expresión de los campos de dos formas: como un **factor de amplitud** en el denominador y como un **factor de fase**. Podemos simplificar aún más: $r_{1,2} \approx r$ en el factor de amplitud, pero no podemos hacerlo en el factor de fase, porque aquí la diferencia de fase da lugar a **interferencia**, que puede ser destructiva y anular el campo. Por lo tanto aproximaremos a **orden cero** ($r_{1,2} \approx r$) en la amplitud y a **orden uno** en la fase:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{E_0}{r} \hat{\theta} e^{i(\omega t - kr)} \left[e^{-ik \frac{d}{2} \cos \theta} + e^{ik \frac{d}{2} \cos \theta} \right] = \frac{2E_0}{r} \hat{\theta} e^{i(\omega t - kr)} \cos \left(k \frac{d}{2} \cos \theta \right)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{2E_0}{\eta_0 r} \hat{\phi} e^{i(\omega t - kr)} \cos \left(k \frac{d}{2} \cos \theta \right)$$

Podemos calcular el promedio del vector de Poynting ya que se trata de una onda armónica:

$$\langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \Re e(\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) \approx \frac{2E_0^2}{\eta_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cos^2 \left(k \frac{d}{2} \cos \theta \right)$$

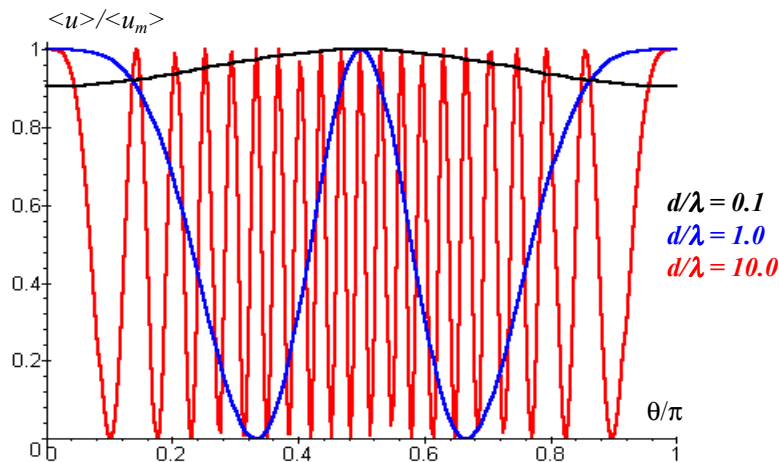
y la densidad promedio de energía:

$$\langle u(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\langle N(\mathbf{r}) \rangle}{c} \approx \frac{2E_0^2}{\eta_0 c r^2} \cos^2 \left(k \frac{d}{2} \cos \theta \right) = \frac{2\epsilon_0 E_0^2}{r^2} \cos^2 \left(k \frac{d}{2} \cos \theta \right)$$

Se ve que tanto la densidad media de energía como la densidad de flujo de potencia no son isotropas, ya que dependen de la dirección de observación θ . Por otra parte, como $k = 2\pi/\lambda$ podemos escribir:

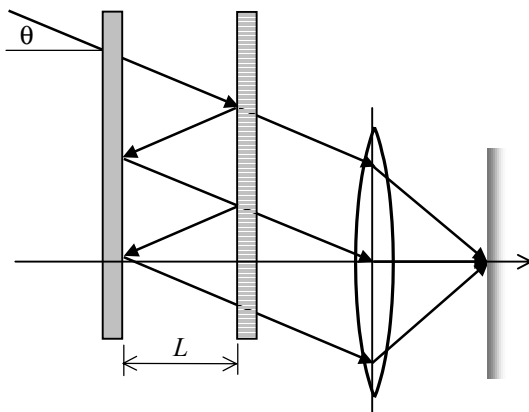
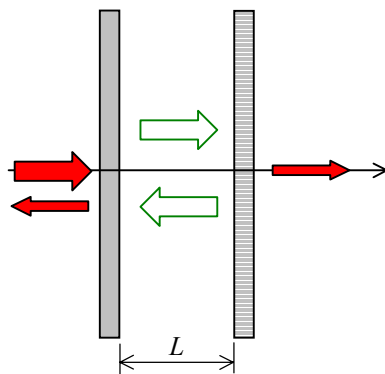
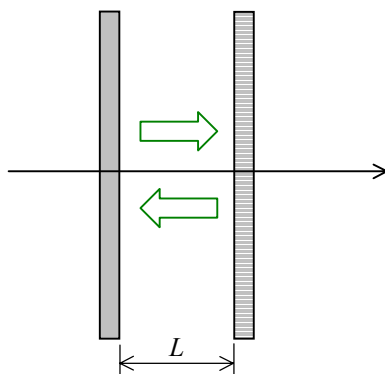
$\langle u(\mathbf{r}) \rangle \approx \frac{2\epsilon_0 E_0^2}{r^2} \cos^2 \left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta \right)$ y se observa que la anisotropía energética también es función de

la separación entre las fuentes, comparada con la longitud de onda de la radiación. Si graficamos para una distancia dada r la densidad de energía en función de θ para distintos valores de d/λ nos queda la figura, donde se nota claramente la anisotropía.



Interferometría

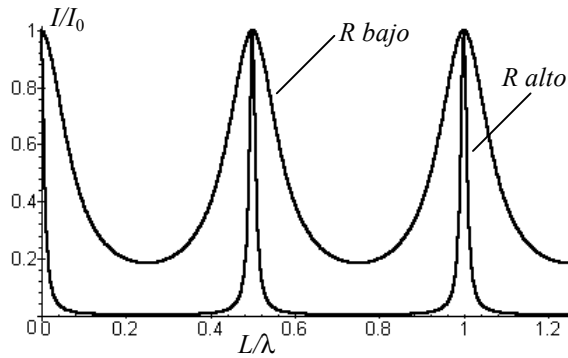
Un dispositivo que utiliza la interferencia de ondas para realizar mediciones de alguna naturaleza es un **interferómetro**. Hasta mediados del siglo veinte, la interferometría se realizaba exclusivamente con ondas de luz, pero luego se han utilizado ondas electromagnéticas de múltiples frecuencias para diversos propósitos, como veremos al final de esta sección. Aunque el modelo de interferómetro más conocido es el de **Michelson**, conectado con la búsqueda de las propiedades del “éter luminífero” y la historia de la teoría de la relatividad, el sistema más simple es el modelo de **Fabry-Perot**, que consiste (en forma simplificada) en un par de espejos paralelos de alta reflectividad. Cuando uno de los espejos es móvil, modificando, como vemos más abajo, la longitud de onda de la radiación a usar, se dice que el aparato es un interferómetro, mientras que cuando la distancia entre los espejos es fija, pero se dispone de un mecanismo para asegurar el paralelismo de los espejos, se dice que el aparato es un **etalon**. Este tipo de aparato está ligado al desarrollo y construcción de la mayoría de los láseres, incluidos los láseres semiconductores, que desempeñan un rol fundamental en las comunicaciones ópticas. En el caso ideal, la radiación



consiste en ondas planas que viajan entre los dos planos espejados según una dirección perpendicular a ellos. Los espejos son perfectos (es decir, la reflexión es total). Esto se logra con espejos hechos de un material conductor perfecto. Dentro del interferómetro se producen ondas estacionarias porque los espejos se colocan en los nodos de la onda de campo eléctrico, tomando la distancia entre los espejos como un múltiplo entero de media longitud de onda: $L = N\lambda$. Si esta relación no se cumple, los campos en el interior del aparato no satisfacen las condiciones de contorno y no pueden existir. Para que la radiación pueda entrar y salir del aparato en una aplicación práctica, se usan espejos imperfectos, de modo que tenemos radiación reflejada y transmitida por el aparato. Dentro del interferómetro se producen ahora ondas cuasi-estacionarias para la condición: $L = N\lambda$. Si esta relación no se cumple, la mayor parte de la energía incidente a la izquierda se refleja. En la figura se muestra una disposición donde la radiación incide formando un ángulo θ con el eje óptico del sistema. La radiación que sale se enfoca sobre una pantalla (o un dispositivo de fotodetección) mediante una lente. La condición de interferencia constructiva es ahora $2L\cos\theta = N\lambda$. Dado que los espejos no son perfectamente reflectores, la condición de onda estacionaria no se cumple exactamente, como tampoco se

cumple si la longitud de onda se varía. Si se grafica la intensidad de la radiación transmitida en función de la longitud de onda se observa una curva continua con picos en las longitudes de onda de resonancia. El ancho de estos picos depende de la reflectividad R de los espejos. Cuando mayor es la reflectividad, el sistema se acerca más al caso ideal y los picos tienden a deltas centradas en las posiciones de resonancia, como se muestra en la gráfica de la figura. Las ecuaciones que describen esta gráfica son⁵:

⁵ Ver, por ejemplo, M.Young, “Optics and Lasers”, 4th.Ed., Springer-Verlag, Berlin,1992, p.136-138.



$$I = \frac{I_0}{1 + F \sin^2(\delta/2)}$$

$$\delta = 4\pi \frac{L}{\lambda} \cos\theta$$

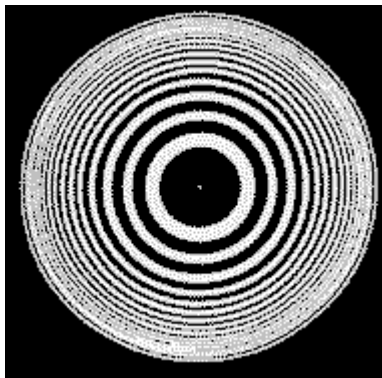
$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$
 es la **fineza** o resolución del interfe-

rómetro, que es una medida de la habilidad del aparato para resolver o distinguir entre longitudes de onda cercanas. Cuanto mayor es la reflectividad de los espejos, mayor será el cambio en la intensidad transmitida para un cambio en la

longitud de onda (o la frecuencia) de la onda incidente. Otra figura de mérito usada en el interferómetro es el **rango espectral libre** (FSR), que se define como la separación en longitud de onda

entre dos máximos sucesivos, y vale: $FSR = \frac{2d \cos\theta}{N^2}$. Este parámetro indica el “ancho de ban-

da” del aparato, ya que si se varía la longitud de onda más allá de la distancia entre máximos sucesivos se repite la respuesta y no es posible distinguir entre longitudes de onda separadas más allá de este rango.



Si ahora fijamos la longitud de onda de la radiación incidente y variamos el ángulo de incidencia θ , habrá un conjunto de ángulos diferentes para los cuales se satisface la ecuación $2L \cos\theta = N\lambda$ para sucesivos valores de N . Dado que esto ocurre para cualquier orientación ϕ alrededor del eje normal al etalon, los máximos de transmisión toman el aspecto de círculos concéntricos, como se muestra en la figura.

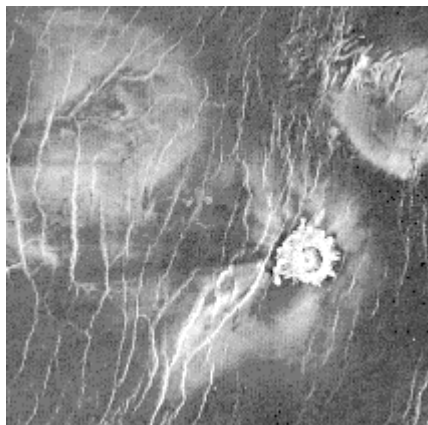
Consideremos una fuente luminosa que irradia en un rango dado de longitudes de onda. Las figuras de interferencia que produce un interferómetro de cualquier tipo (que varían en el dominio de

las longitudes de onda o de la frecuencia) son directamente proporcionales a la transformada de Fourier de la fuente luminosa. Por lo tanto, se pueden usar interferómetros para realizar imágenes de fuentes luminosas. Esta propiedad se usa en astronomía para obtener imágenes de objetos poco brillantes como planetas, dado que en el proceso de la interferencia se puede sumar en contrafase la luz de una estrella cercana para eliminar sus efectos.

También se usan técnicas interferométricas para medir longitudes o distancias con gran precisión, observando el corrimiento de las franjas de interferencia con la separación de los espejos, uno de los cuales se halla en el objeto cuya distancia se desea conocer.

En los últimos años ha crecido exponencialmente el uso de imágenes satelitales para obtener información sobre áreas de terreno. Muchos de estos sistemas utilizan técnicas de radar para registrar la altura topográfica de los accidentes geográficos o construcciones. El radar ilumina el área con ondas electromagnéticas (normalmente microondas) y registra la intensidad y tiempo de viaje de las señales reflejadas. La resolución del sistema está determinada, entre otros factores, por el tamaño de la apertura óptica de la antena receptora: cuanto mayor la apertura, mejor resolución.

Es posible obtener buena resolución para imágenes en el visible e infrarrojo, pero cuando se usan microondas se requieren tamaños de antena que son demasiado grandes para transportar y mantener estables. Por ejemplo, para obtener una resolución de 100 m con un radar de $\lambda = 5\text{ cm}$ desde una altura de 800 Km requiere una apertura de unos 400 m de largo. Sin embargo, a estas frecuencias existe la ventaja de poder “ver” el terreno aún en condiciones de nubosidad, niebla o



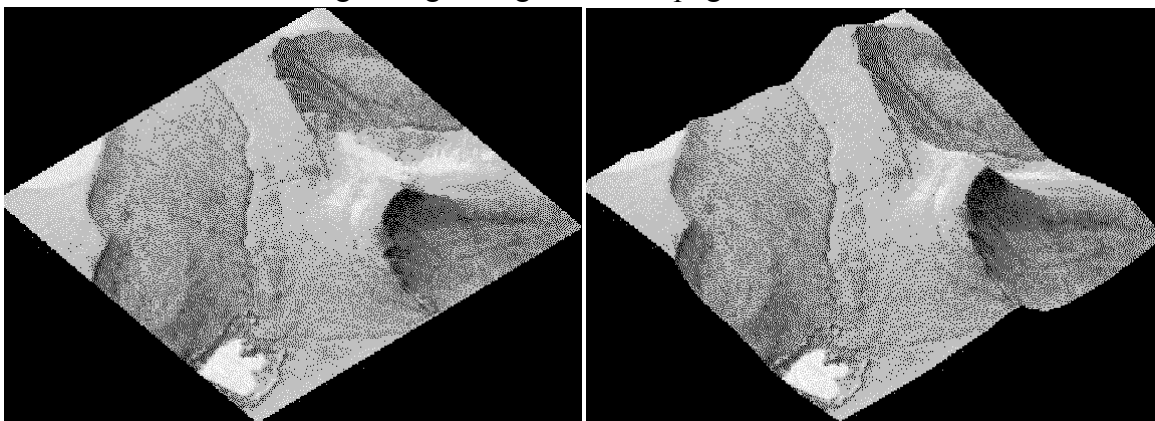
lluvia que impiden usar frecuencias ópticas. La imagen de la izquierda⁶, perteneciente a la NASA, es un área de 400 x 400 Km de la superficie de Venus obtenida en 1990 por el transbordador espacial Atlantis, usando la técnica SAR que describimos a continuación para evitar el eterno cielo nublado del planeta.

Sin embargo, si el satélite se mueve en su órbita, es posible combinar señales reflejadas a lo largo del camino de vuelo para crear artificialmente antenas receptoras de aperturas muy grandes. Este es el principio del **radar de apertura sintética (SAR – Synthetic Aperture Radar)**.

En la generación de imágenes por SAR, la información relevante es el tiempo de vuelo y la intensidad reflejada. Una combinación de estos dos parámetros permite deducir el tipo de objeto que se está iluminando y así obtener cartas “temáticas” (donde cada pixel representa un tipo de terreno, cultivo, mineral u objeto dado). Otras posibilidades son medir la polarización de las ondas reflejadas en función de la polarización de las incidentes (ver la siguiente sección sobre polarización). Se llaman **imágenes polarimétricas**. En la figura se muestra una imagen polarimétrica del pueblo de Feltwell, en el sudeste de Inglaterra.



Estas imágenes son planas. Para obtener la altura y poder crear imágenes 3D que reflejen además la topografía del terreno se usan técnicas interferométricas, capturando las ondas reflejadas mediante dos antenas separadas. En las figuras que siguen se muestra una imagen SAR normal a la izquierda y a la derecha un diagrama de relieve reconstruido a partir de dos imágenes cercanas. Nótese las sombras en la imagen original ligadas a la topografía.



Speckle

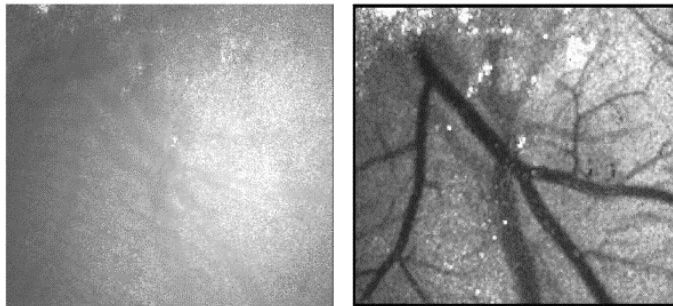
Todo método interferométrico de observación utiliza radiación coherente. Cuando esta radiación incide sobre una superficie, cada elemento de la misma se constituye en un centro emisor de ondas. La interferencia de todas las ondas elementales genera la onda reflejada. Si la superficie es lisa, habrá relaciones de fase definidas entre las ondas incidentes sobre distintos elementos de la superficie y también entre las fases de las ondas elementales reemitidas. La onda resultante será coherente. Si la superficie es rugosa, y el tamaño de grano de la rugosidad es muy pequeño,

⁶ Las imágenes de esta sección pertenecen al libro "Understanding Synthetic Aperture Radar Images", de C.Oliver y S.Quegan, Artech House, London, 1998.

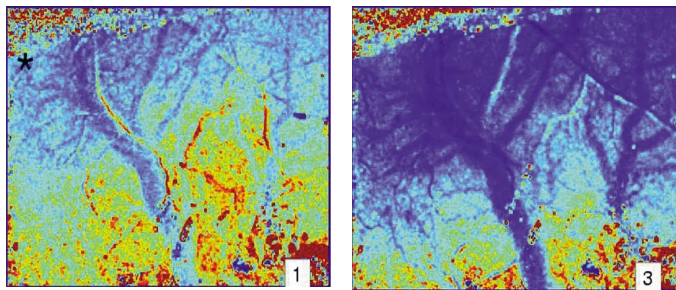
frente a la longitud de onda de la radiación, la situación será similar a la de una superficie lisa, pero si la rugosidad es de tamaño similar a la longitud de onda de la radiación, la interferencia será muy importante. Como además la orientación de cada elemento de superficie en una superficie rugosa es al azar, esto genera una imagen ruidosa y granulosa, con manchas oscuras y brillantes. Este fenómeno, llamada speckle, es universal pero es de mayor importancia en sistemas de imágenes que usan la coherencia de la fuente para detectar las diferencias de fase, como por ejemplo imágenes hechas con iluminación láser y técnicas de ecografía.

En muchas instancias el speckle es un problema y los equipos contienen sistemas de reducción de ruido específicos para mejorar la calidad de las imágenes. Sin embargo, como la intensidad del granulado y su disposición dependen de la rugosidad de la superficie y de su estado de movimiento respecto de la fuente luminosa, se han diseñado sistemas que permiten medir rugosidad, de uso en fabricación y control de calidad de superficies de cojinetes, películas autolubricantes y todo tipo de superficies "lisas". También se usa para hallar microfisuras en superficies y en detectar deformaciones y desplazamientos de superficies.

En los últimos años han aparecido aplicaciones médicas de speckle. En la oftalmología se ha hallado que el speckle formado en la reflexión en la córnea y la retina permite medir con mucha



exactitud el grado de miopía, hipermetropía y astigmatismo. Una aplicación reciente espectacular es la formación de imágenes dinámicas de flujo sanguíneo cerebral durante operaciones de neurocirugía⁷ A la izquierda se ve la foto del speckle original y a la derecha la imagen contrastada.



Las imágenes de la izquierda se obtuvieron iluminando la duramadre de una rata con un diodo laser de 760 nm y 30 mW . Se observan los cambios en el flujo sanguíneo en el cerebro después de inducir isquemia (reducción de flujo) por 1 minuto (foto 1) y por 30 minutos (foto 3). Las áreas azules indican regiones de mayor reducción de flujo y las áreas en rojo

indican flujo normal.

⁷ A. Dunn, H. Bolay, M. Moskowitz, D. Boas, "Dynamic Imaging of Cerebral Blood Flow Using Laser Speckle", *Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism* vol 21 pp 195-201, 2001.

Polarización

En las ondas electromagnéticas, los campos tienen componentes sobre un plano normal a la dirección de propagación, y estas componentes pueden variar en el tiempo. En general, puede haber un desfase entre ambas componentes del campo. Vamos a ejemplificar con el campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_{x_0} \hat{x} \cos(\omega t - k z) + E_{y_0} \hat{y} \cos(\omega t - k z + \phi)$$

para $z = 0$: $\mathbf{E}(z = 0, t) = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = E_{x_0} \hat{x} \cos(\omega t) + E_{y_0} \hat{y} \cos(\omega t + \phi)$

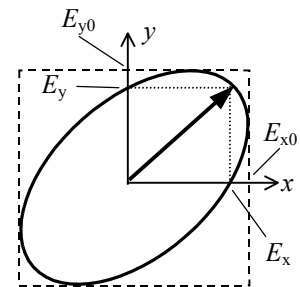
y podemos escribir: $\cos(\omega t) = \frac{E_x}{E_{x_0}}$ $\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \sin \phi = \frac{E_y}{E_{y_0}}$

de donde: $\sin(\omega t) = \left(\frac{E_x}{E_{x_0}} \cos \phi - \frac{E_y}{E_{y_0}} \right) / \sin \phi$

y además: $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 = \left(\frac{E_x}{E_{x_0}} \right)^2 + \frac{\left(\frac{E_x}{E_{x_0}} \cos \phi - \frac{E_y}{E_{y_0}} \right)^2}{\sin^2 \phi}$

y operando tenemos:

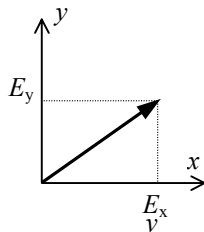
$$\left(\frac{E_x}{E_{x_0}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y_0}} \right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{E_{x_0} E_{y_0}} \cos \phi = \sin^2 \phi$$



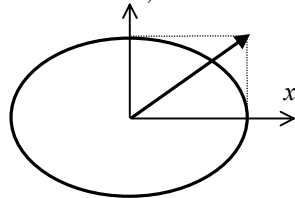
Esta ecuación representa una elipse en el plano xy.

Entonces, en general la punta del campo eléctrico de una onda plana describe una hélice de sección elíptica. El sentido de giro puede ser horario o antihorario. La convención más usada es la que se menciona más abajo en relación a las ondas circularmente polarizadas.

Casos especiales



▪ Si $\phi = \pm n\pi \Rightarrow \frac{E_x}{E_{x_0}} = \frac{E_y}{E_{y_0}}$ que es la ecuación de una recta en el plano del campo. Este caso se denomina **polarización lineal**.

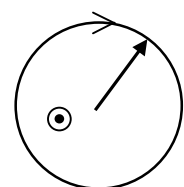


▪ Si $\phi = \pm(2n + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{E_x}{E_{x_0}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y_0}} \right)^2 = 1$

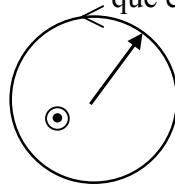
y se trata de una **polarización elíptica** donde los ejes de la elipse coinciden con x e y.

▪ Si además $E_{x_0} = E_{y_0} = E_0 \Rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$

que es la ecuación de una circunferencia de radio E_0 . Se trata de un caso de **polarización circular**.



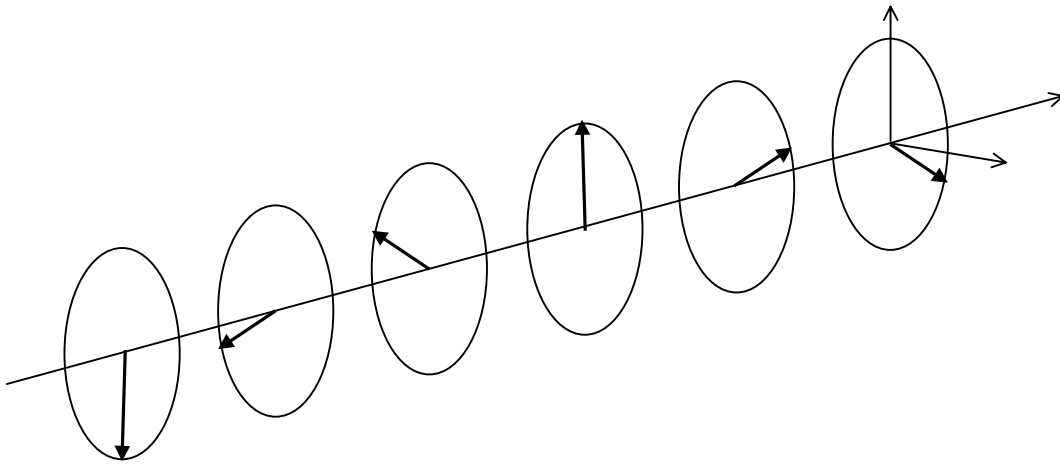
$\phi = \pi/2$



$\phi = -\pi/2$

Las ondas circularmente polarizadas pueden estar polarizadas a **derecha** o a **izquierda**, según el sentido de giro de E a medida que se propaga. En las ilustraciones de la figura la onda **sale** del papel hacia el lector.

En la figura siguiente se muestra un esquema de la propagación de una onda elípticamente polarizada a izquierda.

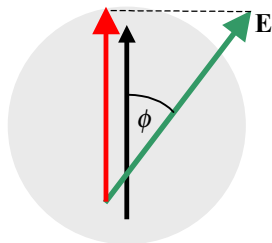


Polarizadores. Electroóptica

La luz natural del sol o la producida por fuentes extensas está normalmente no polarizada, dado que cada fuente elemental emite con una polarización propia e independiente de las demás. Por lo tanto, además de ser incoherente, la radiación natural es no polarizada.

Un **polarizador** es un dispositivo óptico que deja pasar solamente ondas con una dada polarización lineal, absorbiendo todas las demás. Antiguamente se usaban cristales de turmalina, un compuesto natural que exhibe **dicroísmo**, que es la propiedad de absorber la radiación polarizada paralela a un eje cristalino. La radiación polarizada normal a esa dirección cristalina pasa sin atenuación. Debido a su fragilidad, actualmente se usan polarizadores artificiales formados por polímeros o cadenas moleculares colocados en una base plástica inerte. Los campos polarizados en la dirección de las cadenas moleculares son fuertemente absorbidos.

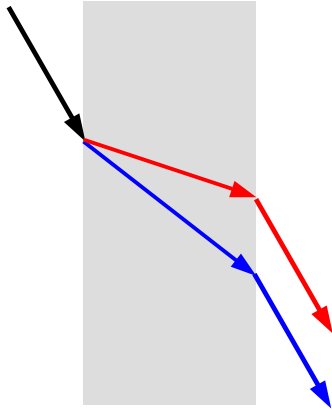
En la figura se esquematiza un polarizador. El eje de máxima transparencia es vertical (la absorción se produce sobre un eje horizontal). De un campo eléctrico polarizado en una dirección oblicua sólo pasa la componente vertical $E_0 \cos \phi$, donde E_0 es la amplitud del campo, de manera que la densidad media de flujo de potencia que atraviesa el polarizador es:



$$\langle N \rangle = \frac{|E|^2}{2\eta} = \frac{E_0^2 \cos^2 \phi}{2\eta}$$

proporcional al coseno al cuadrado del ángulo entre el campo y la dirección de máxima transparencia. Esta expresión de la intensidad transmitida a través del polarizador se conoce como **ley de Malus**. Esta variación de la intensidad de la radiación que se obtiene al girar el polarizador (variando así el ángulo ϕ) permite verificar que la onda incidente está linealmente polarizada. Una onda circularmente polarizada o no polarizada no genera esta variación. Una onda elípticamente polarizada presenta un máximo cuando el eje de transparencia del polarizador se halla paralelo al eje mayor de la elipse y un mínimo no nulo cuando el eje de transparencia del polarizador se halla perpendicular al eje mayor de la elipse.

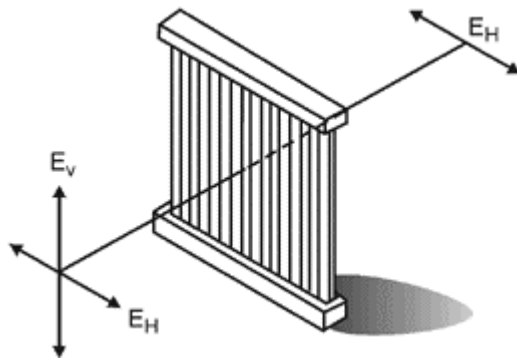
Algunos materiales exhiben respuestas diferentes de acuerdo al estado de polarización del campo electromagnético que se propaga en ellos. Generalmente este comportamiento depende de algún grado de anisotropía que presenta el material. Algunos materiales como la calcita y el cuarzo exhiben **birrefringencia** natural, cuando el índice de refracción depende de la dirección de polarización de la radiación. Estos materiales tienen un eje óptico, una dirección privilegiada debido a la disposición cristalina de sus átomos o moléculas. Si se propaga una onda electromagnética linealmente polarizada con su campo eléctrico normal al eje óptico, el material se comporta como un material normal y exhibe la refracción descrita por la ley de Snell de la óptica. Sin embargo, si se propaga una onda linealmente polarizada en un plano que contiene al eje óptico, se produce una refracción diferente, como si el índice de refracción del material fuera diferente al



correspondiente a la otra polarización. Si se propaga una onda linealmente polarizada de polarización oblicua al eje óptico, se obtienen dos rayos: el rayo **ordinario**, para la componente polarizada normal al eje óptico, y el rayo **extraordinario**, para la componente polarizada en el plano del eje óptico. En la figura, el rayo ordinario se simboliza en azul y el extraordinario en rojo.

Hay materiales que no tienen birrefringencia natural, pero pueden volverse birrefringentes cuando se aplica sobre ellos un campo eléctrico intenso. En el caso de líquidos o soluciones líquidas, la birrefringencia inducida se conoce como **efecto Kerr** y se debe al alineamiento o deformación de las moléculas polares del líquido. Se induce un eje óptico paralelo al campo aplicado. La diferencia entre el índice de refracción ordinario n_o y el extraordinario n_e es proporcional al cuadrado del campo: $\Delta n = n_o - n_e = K\lambda E^2$. El parámetro K llamado constante de Kerr depende de la sustancia y es extraordinariamente alto en los hidrocarburos como el nitrobenzono. El efecto Kerr se ha utilizado para analizar en forma no destructiva la composición de aceites refrigerantes en transformadores de alta potencia.

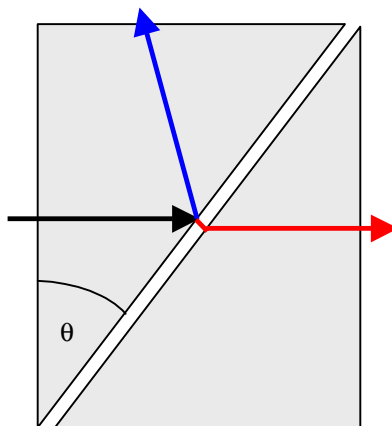
En ciertos materiales cristalinos es posible inducir birrefringencia aplicando un campo eléctrico (**efecto Pockels**). El efecto Pockels difiere del efecto Kerr en que la diferencia de índices de refracción es proporcional a la intensidad del campo en lugar del cuadrado. El efecto Pockels tiene también aplicaciones en el análisis de los transformadores de alta tensión, donde se usa para medir el campo dentro del refrigerante para detectar la presencia de “puntos calientes” de alta tensión potencialmente destructivos y en moduladores ópticos para comunicaciones. También otros materiales, como la turmalina, exhiben **dicroísmo**, efecto que consiste en que uno de los planos de polarización es absorbido mientras que el otro se propaga sin atenuación apreciable. Un material artificial que exhibe dicroísmo es el formado por una red de hilos conductores. La componente del campo eléctrico paralela a los hilos induce corriente en ellos y se anula, mientras que la



componente normal a los hilos pasa con atenuación mucho menor. Este artefacto es de muy difícil construcción práctica, pero es la base del material llamado **Polaroid**, que consiste en largas cadenas poliméricas de un alcohol, separadas en pocos angstroms

($1\text{\AA} = 10^{-10} m$) a las que se les ha agregado átomos de yodo. Estos átomos son conductores y absorben la componente de la onda paralela a las cadenas poliméricas. El material Polaroid original fue inventado en 1938 por el químico norteamericano E.H. Land.

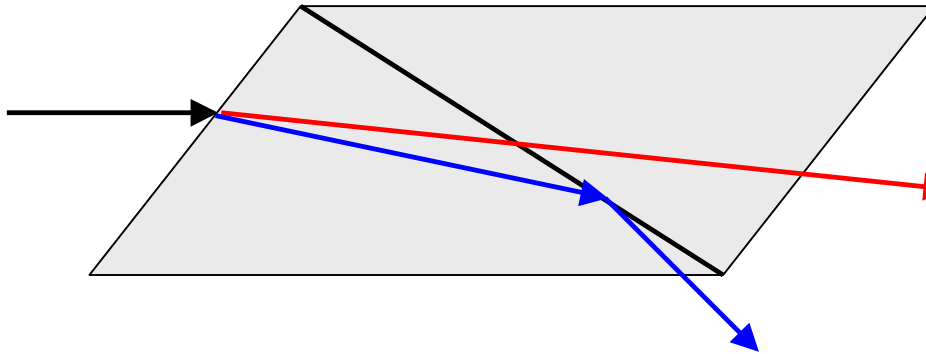
Actualmente existen diversos materiales poliméricos y cristales líquidos que funcionan por el mismo principio.



Otra forma de polarizar una onda es usar el dicroísmo. Glan y Foucault fueron los primeros que usaron esta propiedad y la propiedad de reflexión total de una onda en una interfase dieléctrica que veremos en el Capítulo siguiente. Dos prismas de calcita se colocan con sus hipotenusas paralelas separadas en una muy corta distancia. La radiación incide desde la izquierda normal a la superficie del prisma. Se elige el ángulo θ del prisma para que refleje completamente el rayo extraordinario. El rayo ordinario sale refractado y es recogido por otro prisma que lo coloca en la misma dirección del rayo incidente. Este **polari-**

zador de Glan-Foucault presenta varios problemas prácticos, como el de garantizar el paralelismo de los prismas ante movimientos o vibraciones. Si se usan prismas de calcita se puede colocar un pegamento entre los prismas de índice de refracción intermedio entre el ordinario y el extraordinario que resuelve el problema de las vibraciones.

Este polarizador se conoce como **Glan-Thompson**.



Otro tipo de polarizador es el **prisma de Nicol**, que es similar al de Glan-Thompson, con la diferencia que usa cuñas en lugar de prismas y la radiación incide a un ángulo (generalmente pequeño) respecto a una

de las caras del prisma.

Otros polarizadores usan la **polarización por reflexión** cuyas bases físicas veremos en el siguiente Capítulo.

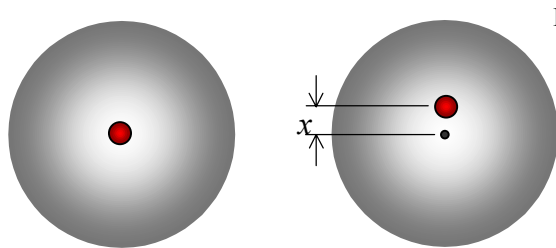
Otros efectos electroópticos están ligados a la acción de un campo magnético sobre las propiedades de las sustancias. Por ejemplo, el **efecto Kerr magnético** usa un campo magnético para crear birrefringencia de reflexión sobre superficies materiales. Ciertas sustancias, como el cuarzo cristalino y soluciones de azúcar son **ópticamente activas**, lo que significa que rotan el plano de polarización de una onda linealmente polarizada⁸. El grado de rotación y el sentido (horario o antihorario) depende de la sustancia. El **efecto Faraday** surge al colocar vidrios en campos magnéticos intensos. Los vidrios se vuelven ópticamente activos, y el ángulo de rotación es proporcional al campo de inducción magnética **B** aplicado y a la longitud de la muestra.

⁸ La existencia de la rotación en cristales de ácido tartárico, algunos en sentido horario y en otros en sentido antihorario, y la no existencia de la rotación en el ácido tartárico, una mezcla de ambos, fue la primera investigación relevante de Louis Pasteur, que era de formación química, en 1848. Este trabajo lo llevó al conocimiento de J.J.Biot (quien había tratado de explicar el fenómeno) y a sus posteriores estudios sobre microbiología.

Modelos simples de comportamiento electrodinámico de materiales

En la próxima sección vamos a analizar la propagación de ondas electromagnéticas en un medio material. Para ello se requiere determinar la relación entre **D** y **E** y entre **B** y **H** en un medio material. Se presentan modelos simples que permiten establecer esta relación para **D** y **E** en el caso de dieléctricos y conductores. Los materiales magnéticos se analizaron en el Capítulo 4.

Dieléctricos: Modelo de Drude-Lorentz.



Un material dieléctrico se **polariza** en la presencia de un campo eléctrico aplicado. En el modelo de **Drude-Lorentz** se supone que los centros de masa de las cargas positiva y negativa se separan una cantidad x dando lugar a un dipolo. Si el campo aplicado depende del tiempo la separación $x(t)$ también lo hará.

El electrón y el ión atómico se desplazarán bajo la fuerza eléctrica. Debido a que el ión es mucho más pesado que el electrón, podemos suponer que sólo este se mueve significativamente. Debido a que existe una **fuerza de cohesión** entre el núcleo (positivo) y la nube electrónica (negativa), habrá una fuerza que tratará de volver el electrón a su posición de equilibrio. La forma más sencilla de modelizar esta fuerza es como la de un “resorte”, proporcional al desplazamiento:

$$F_1(t) = -m \omega_0^2 x(t) \quad \text{donde } m \text{ es la masa del electrón.}$$

En este modelo, el electrón, que se ve sometido a una fuerza, se acelera, aumentando su energía cinética. Luego de un recorrido libre, experimenta una **colisión** con la red cristalina. En este modelo se considera que cede a la red toda la energía acumulada. Este **proceso de "frenado"**, a expensas de su energía cinética, puede representarse, en la forma más sencilla, como una fuerza proporcional a la velocidad del electrón:

$$F_2(t) = -m \Gamma v(t)$$

Finalmente, existe la **fuerza eléctrica** del campo $eE(t)$ aplicado sobre la nube electrónica. Conocidas todas las fuerzas que actúan sobre el electrón, podemos plantear la ecuación de Newton: $m a(t) = \Sigma F_i$ de la cual podemos hallar $x(t)$:

$$m \ddot{x} = e E(t) - m \omega_0^2 x - m \Gamma \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} - \omega_0^2 x - \Gamma \dot{x} = \frac{e}{m} E(t)$$

donde el punto simboliza la derivada respecto del tiempo.

Para una excitación armónica: $E(t) = \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$ (notación fasorial)

existe una respuesta forzada: $x(t) = \tilde{x}_0 e^{i\omega t}$

de donde: $\dot{x}(t) = i \omega x(t) \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

y tenemos: $(-\omega^2 \tilde{x}_0 + i \Gamma \omega \tilde{x}_0 + \omega_0^2 \tilde{x}_0) e^{i\omega t} = \frac{e}{m} \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$

de donde podemos despejar la amplitud (compleja) del movimiento:

$$\tilde{x}_0 = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \Gamma \omega} \tilde{E}_0 = \frac{e}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \tilde{E}_0$$

El factor de proporcionalidad entre \tilde{x}_0 y \tilde{E}_0 es complejo, lo que indica un **desfasaje** en el tiempo entre la posición y el campo aplicado.

El desplazamiento de los centros de masa de la carga atómica genera un **dipolo**, de momento dipolar $\tilde{\mathbf{p}} = e \tilde{x}_0 \hat{\mathbf{x}}$. Si hay N átomos por unidad de volumen que se mueven simultáneamente y en fase, el momento dipolar por unidad de volumen, es decir, la **polarización**, es:

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = N e \tilde{x}(t) \hat{\mathbf{x}} = \frac{N e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i \omega t} \hat{\mathbf{x}} = \frac{N e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \tilde{\mathbf{E}}(t)$$

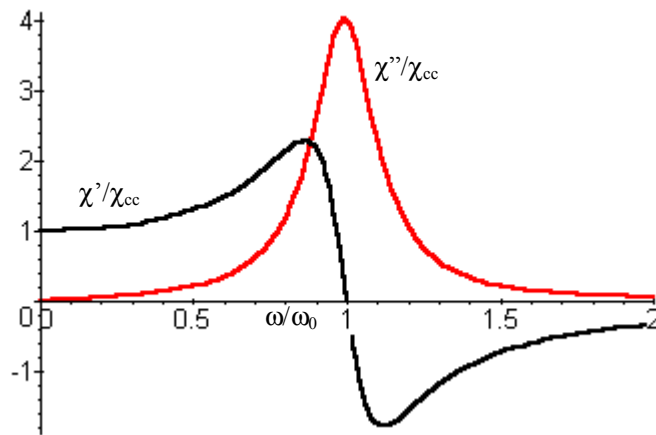
Por analogía con la polarización estática de dieléctricos podemos definir una **susceptibilidad dieléctrica** y una **permitividad para ondas monocromáticas**:

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \epsilon_0 \chi_\omega \tilde{\mathbf{E}}(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{D}}(t) = \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}(t) + \tilde{\mathbf{P}}(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{D}}(t) = \epsilon_0 (1 + \chi_\omega) \tilde{\mathbf{E}}(t) = \epsilon_\omega \tilde{\mathbf{E}}(t) \quad \text{con:}$$

$$\chi_\omega = \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad \epsilon_\omega = \epsilon_0 (1 + \chi_\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \right) = \epsilon'_\omega - i \epsilon''_\omega$$

Se produce entonces también un desfase entre el campo **E** y el campo **D**. Este desfase está asociado a una pérdida de energía, en forma análoga a la vista en la propagación de ondas en líneas de transmisión.

Se ve además que la parte real y la parte imaginaria de la susceptibilidad dieléctrica **dependen de la frecuencia**, como se muestra en la siguiente gráfica.



En esta gráfica se ha tomado:

$$\chi_{cc} = \chi_\omega(\omega = 0) = \chi'_\omega(\omega = 0) = \frac{N e^2}{m \epsilon_0}$$

Se observa que $\chi''_\omega = 0$ para $\omega = \omega_0$. Se demuestra en el siguiente Ejemplo que el máximo de χ'' se da cerca de $\omega = \omega_0$ y vale $\chi_{cc} \omega_0 / \Gamma$, es decir, es inversamente proporcional a Γ , que es el factor vinculado con la pérdida de energía por radiación. También se demuestra que el ancho del pico es proporcional a Γ .

Ejemplo 8.5: a) Hallar la posición y el valor del máximo de la curva de χ''_ω . b) Calcular el ancho de banda alrededor del máximo para χ''_ω mayor que 1/2 de su valor máximo.

a) La parte imaginaria de la susceptibilidad dieléctrica es:

$$\chi''_\omega = \frac{\Gamma \omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} = \frac{\gamma \delta}{(1 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{\Gamma}{\omega_0} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Derivamos esta expresión respecto de δ e igualamos a cero para obtener:

$$3\delta_{max}^4 - (2 - \gamma^2)\delta_{max}^2 - 1 = 0 \Rightarrow \delta_{max}^2 = \frac{2 - \gamma^2 + \sqrt{(2 - \gamma^2)^2 + 12}}{6}$$

donde hemos tomado el signo (+) de la doble determinación porque en general $\gamma \ll 1$ y δ^2 debe ser positivo. En tal caso podemos aproximar mediante un desarrollo de Taylor en γ :

$$\delta_{max} = \sqrt{\frac{2 - \gamma^2 + \sqrt{(2 - \gamma^2)^2 + 12}}{6}} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{8} \quad \text{y} \quad \delta_{max}^2 = \frac{2 - \gamma^2 + \sqrt{(2 - \gamma^2)^2 + 12}}{6} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{4}$$

Se ve que la posición del máximo difiere muy poco de la frecuencia de resonancia: $\delta = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0$. El valor del máximo es aproximadamente: $\chi''_{\omega}|_{max} \approx 1/\gamma$

b) Calculamos el ancho de banda mitad suponiendo que es pequeño. Entonces δ difiere poco de 1 y podemos aproximar: $(1 - \delta^2)^2 = [(1 - \delta)(1 + \delta)]^2 \approx 4(1 - \delta)^2$ de donde:

$$\chi''_\omega = \frac{\gamma \delta}{(1 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2} \approx \frac{\gamma \delta}{4(1 - \delta)^2 + \gamma^2 \delta^2}$$

Para $\delta = \delta_{1/2}$ este valor debe ser la mitad del valor máximo, de manera que tenemos:

$$\frac{\gamma \delta_{1/2}}{4(1 - \delta_{1/2})^2 + \gamma^2 \delta_{1/2}^2} \approx \frac{1}{2\gamma} \Rightarrow \delta_{1/2}^2 - 2\delta_{1/2} + \frac{4}{4 + \gamma^2} \approx 0 \Rightarrow \delta_{1/2} \approx 1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{4 + \gamma^2}}$$

de donde se ve que las frecuencias de ancho mitad están centradas en la frecuencia de resonancia y el intervalo entre ellas vale:

$$\Delta\delta_{1/2} \approx \frac{2\gamma}{\sqrt{4 + \gamma^2}} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \gamma - \frac{\gamma^3}{8}$$

y para bajas pérdidas: $\Delta\omega_{1/2} \approx \Gamma$

Conductores: Modelo de Drude

En un conductor los electrones son libres, de manera que podemos usar el modelo de dieléctricos para el movimiento electrónico anulando el término de la fuerza de cohesión. Mantenemos el término de pérdidas de frenado. Tenemos así:

$$m \ddot{x} = e \tilde{E}(t) \omega - m \Gamma \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \Gamma \dot{x} = \frac{e}{m} \tilde{E}(t) \Rightarrow \dot{v} + \Gamma v = \frac{e}{m} \tilde{E}(t)$$

dado que nos interesará hallar la velocidad del electrón más que su posición.

Para una excitación armónica: $E(t) = \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$ (notación fasorial)

existe una respuesta forzada: $v(t) = \tilde{v}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{v}(t) = i\omega v(t)$

y tenemos: $(i\omega + \Gamma)\tilde{v}_0 e^{i\omega t} = \frac{e}{m} \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$

de donde podemos despejar la velocidad (compleja) del movimiento:

$$\tilde{v}_0 = \frac{e/m}{i\omega + \Gamma} \tilde{E}_0 = \frac{e}{m} \frac{\Gamma - i\omega}{\omega^2 + \Gamma^2} \tilde{E}_0$$

Si hay N electrones por unidad de volumen, la densidad de corriente será:

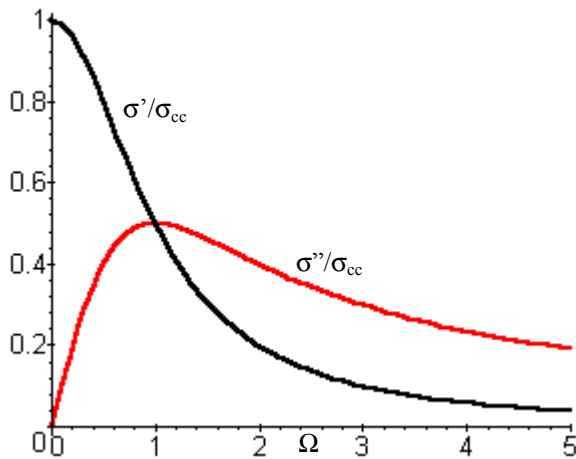
$$\mathbf{j}(t) = N e \mathbf{v}(t) = \frac{N e^2}{m} \frac{\Gamma - i\omega}{\omega^2 + \Gamma^2} \mathbf{E}(t) = (\sigma'_\omega - i \sigma''_\omega) \mathbf{E}(t)$$

Se observa que aquí también la conductividad es compleja, describiendo un defasaje entre \mathbf{j} y \mathbf{E} .

Para frecuencia cero, se tiene la **conductividad de corriente continua**: $\sigma_{cc} = \frac{N e^2}{m \Gamma}$ de donde:

$$\sigma = \sigma_{cc} \frac{1 - i\Omega}{1 + \Omega^2} \quad \text{con: } \Omega = \omega/\Gamma$$

En la siguiente gráfica se presentan las curvas de la parte real e imaginaria de la conductividad en función de la frecuencia Ω .



Se observa que la parte imaginaria se hace máxima y coincide con la parte real para $\Omega = 1$ ($\omega = \Gamma$) y luego decae. Para conductores, el valor de $\Gamma \approx 10^{12} \text{ s}^{-1}$, de manera que en la mayoría de las aplicaciones prácticas se trabaja para $\omega \ll \Gamma$. En tal caso, $\Omega \rightarrow 0$ y se puede expandir la conductividad en serie de Taylor:

$$\sigma \approx \sigma_{cc} (1 - i\Omega) = \sigma_{cc} \left(1 - i \frac{\omega}{\Gamma} \right) \approx \sigma_{cc}$$

y entonces se puede suponer que la conductividad coincide con su valor de corriente continua para la mayoría de las aplicaciones prácticas.

Plasma

Un plasma es un gas de partículas cargadas o **iones**. Habitualmente existen simultáneamente iones positivos y negativos que (estadísticamente) se neutralizan. Cuando se coloca un plasma en una región donde hay un campo eléctrico, las cargas se redistribuyen rápidamente de manera de anular (o **apantallar**, en la jerga) el campo en el interior del plasma. Esto es similar a lo que ocurre en un conductor a baja frecuencia. En muchos casos los iones negativos son electrones y los iones positivos son átomos o moléculas cargados, de manera que el movimiento de estos iones positivos sólo tiene relevancia a muy bajas frecuencias o como el movimiento del conjunto del gas. Por lo tanto, habitualmente es de interés el movimiento electrónico y entonces un plasma se

puede modelar como un conductor: $\ddot{x} + \Gamma \dot{x} = \frac{e}{m} \tilde{E}(t)$

El factor Γ tiene en cuenta la pérdida de energía de los electrones móviles por radiación electromagnética o colisiones con los iones positivos del gas. Para una excitación armónica: $E(t) = \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$ existe una respuesta forzada:

$$x(t) = \tilde{x}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{x}(t) = i\omega x(t) \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \Rightarrow (-\omega^2 + i\omega\Gamma)\tilde{x}_0 e^{i\omega t} = \frac{e}{m} \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$$

de donde despejamos la amplitud (compleja) del movimiento: $\tilde{x}_0 = -\frac{e\tilde{E}_0}{(\omega - i\Gamma)m\omega}$

Aunque no existe una polarización real, es posible hallar la **permitividad equivalente** del plasma, noción que es útil para modelar la propagación de ondas en él. Si hay N iones por unidad de

volumen: $\tilde{P}(t) = N e \tilde{x}(t) = -\frac{N e^2}{(\omega - i\Gamma)m\omega} \tilde{E}_0 e^{i\omega t} = -\frac{N e^2}{(\omega - i\Gamma)m\omega} E(t)$

Pero: $\tilde{P}(t) = \epsilon_0 \chi_{eq} E(t) \Rightarrow \chi_{eq} = -\frac{N e^2}{m\epsilon_0 \omega^2} - \frac{N e^2}{(\omega - i\Gamma)m\epsilon_0 \omega}$

Llamamos **frecuencia de plasma** a la cantidad: $\omega_p = \sqrt{N e^2 / m \epsilon_0}$ y entonces podemos escribir:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}} \Rightarrow \chi_{eq} = -\frac{\omega_p^2}{(\omega - i\Gamma)\omega} \Rightarrow D(t) = \epsilon_0 (1 + \chi_{eq}) E(t) = \epsilon_{eq} E(t) \Rightarrow \epsilon_{eq} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - i\Gamma)\omega} \right)$$

o sea: $\epsilon_{eq} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2 (\omega + i\Gamma)}{(\omega^2 + \Gamma^2)\omega} \right) = \epsilon_0 \left[\left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \Gamma^2)} \right) - i \frac{\Gamma \omega_p^2}{(\omega^2 + \Gamma^2)\omega} \right] = \epsilon'_{eq} - i \epsilon''_{eq}$

Se ve que la permitividad equivalente de un plasma es compleja. La parte imaginaria está ligada a las pérdidas de energía y es proporcional al parámetro Γ . La parte real está ligada a la propagación.

Si el parámetro Γ , vinculado con las pérdidas, es pequeño frente a la frecuencia de operación, podemos aproximar: $\epsilon_{eq} \approx \epsilon_0 \left(1 - \omega_p^2 / \omega^2 \right)$ que es una permitividad real. Se observa que esta permitividad **es negativa** para frecuencias menores que la frecuencia de plasma. Esto tiene consecuencias en la propagación de ondas electromagnéticas en el plasma, como veremos en la sección siguiente.

Análogamente, podemos definir una **conductividad equivalente** del plasma. Si hay N iones por unidad de volumen, la densidad de corriente será:

$$j(t) = N e \frac{dx}{dt} = i\omega N e x(t) = -\frac{i N e^2}{(\omega - i\Gamma)m} E(t) = -\frac{i \omega_p^2 \epsilon_0}{(\omega - i\Gamma)} E(t) = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{(\Gamma - i\omega)} E(t) \Rightarrow \sigma_{eq} = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{(\Gamma - i\omega)}$$

de donde:

$$\sigma_{eq} = \omega_p^2 \epsilon_0 \frac{(\Gamma + i\omega)}{(\Gamma^2 + \omega^2)} = \sigma'_{eq} + i \sigma''_{eq}$$

La conductividad equivalente es compleja. Se observa que: $\sigma''_{eq} = \omega \epsilon''_{eq}$ relación cuyo significado se aclarará más abajo. En el caso de bajas pérdidas, donde $\Gamma \ll \omega$, la conductividad es imaginaria pura:

$$\sigma_{eq} = i \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\omega}$$

Ondas en medios materiales

El análisis del comportamiento de los materiales para campos electrodinámicos de la sección precedente es que, **para campos armónicos**, es posible establecer **relaciones lineales**:

$$\mathbf{D} = \epsilon(\omega) \mathbf{E} \quad \mathbf{j} = \sigma(\omega) \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu(\omega) \mathbf{H}$$

donde los parámetros $\epsilon(\omega)$, $\sigma(\omega)$ y $\mu(\omega)$ son **parámetros complejos que dependen de la frecuencia** de los campos armónicos. La existencia de parámetros complejos describe un desfase en el tiempo entre los fasores involucrados.

Analizamos a continuación cómo esta circunstancia influye sobre la propagación de ondas en medios materiales.

Consideremos un recinto del espacio donde existe un medio material de propiedades definidas por sus parámetros ϵ , σ y μ , dependientes de la frecuencia. Para evitar generalidades sin correlato práctico, consideramos que μ es real, mientras que $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$ y $\sigma = \sigma' + i\sigma''$ son la permitividad y conductividad complejas. Las ecuaciones de Maxwell **sin fuentes** resultan así:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 & \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega\mu \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 & \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - \sigma \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Desacoplamos las ecuaciones del rotor como hicimos antes para el caso de las ondas en el vacío. Por ejemplo, de la ley de Faraday:

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega\mu \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0 &\Rightarrow \nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega\mu \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla [\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] - \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega\mu (i\omega\epsilon + \sigma) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

y finalmente: $\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \gamma^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0$ con $\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma$

que es una **ecuación de Helmholtz**. Se obtiene una ecuación idéntica para el campo magnético.

La solución de la ecuación de Helmholtz es: $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{\mp i\gamma z}$

Pero γ es complejo, porque lo es γ^2 : $\gamma = \beta - i\alpha$

de donde la solución queda: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} + \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{\alpha z} e^{i(\omega t + \beta z)}$

El primer sumando es una onda progresiva y el segundo una onda regresiva, cuyas amplitudes decaen exponencialmente a medida que se propagan.

La parte real β del número de onda es el llamado **factor de propagación** y la parte imaginaria α el **factor de atenuación**. En general ambos parámetros dependen de la frecuencia.

La inversa del factor de atenuación se conoce como **profundidad de penetración**:

$$\delta = 1/\alpha$$

La **velocidad** de las ondas armónicas (también llamada velocidad de fase) es: $v_f = \omega / \beta$ y la **longitud de onda** en el material es $\lambda = 2\pi/\beta$. Ambas cantidades generalmente dependen de la frecuencia.

Como el campo magnético cumple la misma ecuación diferencial que el campo eléctrico, su expresión matemática es similar:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}_1 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} + \tilde{\mathbf{H}}_2 e^{\alpha z} e^{i(\omega t + \beta z)}$$

Podemos calcular la **impedancia intrínseca** del medio a partir de la ley de Faraday:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{\mp i \gamma z} \quad \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{H}}_0 e^{\mp i \gamma z} \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i \omega \mu \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0$$

Recordemos que el signo superior de la doble determinación corresponde a la onda progresiva y el signo inferior a la onda regresiva. Entonces:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tilde{E}_x & \tilde{E}_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} = \mp i \gamma (-\tilde{E}_y \hat{\mathbf{x}} + \tilde{E}_x \hat{\mathbf{y}}) = \mp i \gamma \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -i \omega \mu \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$$

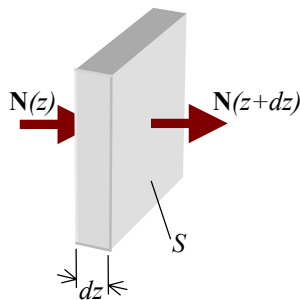
de donde:
$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \pm \frac{\gamma}{\omega \mu} \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \Rightarrow \eta = \frac{\omega \mu}{\gamma} = \frac{\omega \mu}{\beta - i \alpha} = \frac{\omega \mu (\beta + i \alpha)}{\beta^2 + \alpha^2} = \eta' + i \eta''$$

y la impedancia intrínseca también es, en general, compleja.

El valor medio del **vector de Poynting** es:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re e(\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) = \pm \frac{1}{2} \Re e\left(\tilde{\mathbf{E}} \times \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}^*}{\eta^*}\right) = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}|^2}{2 |\eta|^2} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2 |\eta|^2} \hat{\mathbf{z}}$$

donde el signo superior corresponde a la onda progresiva y el inferior a la regresiva. Como el vector de Poynting medio decae con la propagación por la potencia perdida, podemos relacionar estas dos cantidades.



Para ello planteamos el balance de la potencia electromagnética que entra a un paralelepípedo de sección S transversal a la propagación y espesor dz , parte de ella se pierde (por cualquier mecanismo) dentro del paralelepípedo y parte sale por la otra cara:

$$\langle N(z) \rangle S = \langle P(z) \rangle + \langle N(z+dz) \rangle S \text{ de donde:}$$

$$\left. \frac{d\langle N \rangle}{dz} \right|_z dz = -\frac{\langle P(z) \rangle}{S} \Rightarrow \left. \frac{d\langle N \rangle}{dz} \right|_z = -\frac{d\langle P(z) \rangle}{dv}$$

Pero como, en general, $\langle \mathbf{N}(z) \rangle = \pm \langle \mathbf{N}_{0\pm} \rangle e^{\mp 2\alpha z} \Rightarrow \left. \frac{d\langle N \rangle}{dz} \right|_z = -2\alpha \langle N(z) \rangle = -\frac{d\langle P(z) \rangle}{dv}$

y finalmente:
$$\left. \frac{d\langle N \rangle}{dz} \right|_z = -\frac{d\langle P \rangle}{dv} \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha \langle N \rangle$$
 donde $\langle P \rangle$ es la potencia perdida

en el material por cualquier mecanismo. Se ve que esta expresión es válida independientemente del sentido de la propagación.

El valor medio de la **densidad de energía** es:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \Re e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^*) = \frac{1}{4} \Re e\left(\epsilon^* |\tilde{\mathbf{E}}|^2 + \mu |\tilde{\mathbf{H}}|^2\right) = \left(\epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2}\right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}|^2}{4}$$

y finalmente:
$$\langle u \rangle = \left(\epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2}\right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{4}$$

y la **velocidad de la energía** puede calcularse como: $\mathbf{v}_E = \frac{\langle \mathbf{N} \rangle}{\langle u \rangle} = \pm \frac{2|\eta| \cos \varphi}{(\epsilon' |\eta|^2 + \mu)} \hat{\mathbf{z}}$

En resumen, para la propagación en un medio material general:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0+} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} + \tilde{\mathbf{E}}_{0-} e^{\alpha z} e^{i(\omega t + \beta z)}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{\mathbf{E}}_{0+}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} - \frac{\tilde{\mathbf{E}}_{0-}}{\eta} e^{\alpha z} e^{i(\omega t + \beta z)}$$

con: $\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma}$

(β = factor de propagación)
(α = factor de atenuación)

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

(profundidad de penetración)

$$v = \omega/\beta$$

(velocidad de propagación)

$$\lambda = 2\pi/\beta$$

(longitud de onda)

$$\eta = \eta' + i\eta'' = |\eta| e^{i\varphi} = \frac{\omega \mu}{\gamma}$$

(impedancia intrínseca)

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|^2} \hat{\mathbf{z}}$$

(vector medio de Poynting)

$$\frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha \langle N \rangle$$

(densidad de potencia media perdida)

$$\langle u \rangle = \left(\epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{4}$$

(densidad de energía almacenada)

$$\mathbf{v}_E = \frac{\langle \mathbf{N} \rangle}{\langle u \rangle} = \pm \frac{2|\eta| \cos \varphi}{(\epsilon' |\eta|^2 + \mu)} \hat{\mathbf{z}}$$

(velocidad de la energía)

A continuación usamos estas expresiones en casos particulares de interés.

Dieléctricos sin pérdidas

En este caso se tienen los parámetros: ϵ real, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$.

Entonces: $\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_r}}{c} = k \sqrt{\epsilon_r}$

donde k es el número de onda en el vacío. γ es real \Rightarrow no hay atenuación y la profundidad de penetración es infinita.

La velocidad de propagación de las ondas en el material es:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} < c$$

En la propagación a frecuencias ópticas se usa el **índice de refracción** del material, que se define como la relación entre la velocidad de propagación de la luz en el vacío y la velocidad de propagación de la luz en el material. En esta definición se trata de las velocidades de fase. En general el índice de refracción varía con la frecuencia, lo que se comprueba experimentalmente en los prismas, por ejemplo. Tenemos:

$$\text{índice de refracción} \quad n = \frac{c}{v_f} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

y la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} < \lambda_0$$

La impedancia intrínseca es:

$$\eta = \frac{\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{k\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} < \eta_0$$

El vector de Poynting medio es:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|^2} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2}{2\eta} \hat{\mathbf{z}}$$

No hay atenuación ($\alpha = 0$), de manera que $\langle N \rangle$ no cambia con z y la potencia de pérdidas:

$\frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha \langle N \rangle = 0$ es nula. La energía almacenada en el campo es:

$$\langle u \rangle = \left(\epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{4} = \left(\epsilon + \frac{\mu_0}{\mu_0/\epsilon} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2}{4} = \frac{\epsilon}{2} |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2$$

y se ve que la velocidad de la energía es:

$$\mathbf{v}_E = \pm \frac{2|\eta| \cos \phi}{(\epsilon' |\eta|^2 + \mu)} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{2\sqrt{\mu_0/\epsilon}}{2\mu_0} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \hat{\mathbf{z}}$$

que coincide con la velocidad de las ondas en el material.

Ejemplo 8.6: Analizar la propagación de una onda de $f = 100 \text{ MHz}$ en un medio de $\epsilon_r = 16$.

La velocidad de propagación es menor que en el vacío: $v = c/\sqrt{\epsilon_r} = c/4$

La longitud de onda en el medio es menor que en el vacío: $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r} = \lambda_0/4 \approx 0.75 \text{ m}$

La impedancia intrínseca en el medio es menor que en el vacío: $\eta = \eta_0/\sqrt{\epsilon_r} = \eta_0/4$

La densidad de energía en el medio es mayor que en el vacío: $\langle u \rangle = \epsilon_r \langle u_0 \rangle = 16 \langle u_0 \rangle$

El índice de refracción es: $n \approx \sqrt{\epsilon_r} = 4$

Conductores

En este caso se tienen los parámetros: $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma$ real.

Entonces: $\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - i\omega \mu_0 \sigma}$

En los **buenos conductores** los efectos conductivos son de mucha mayor relevancia que los efectos de las variaciones del campo eléctrico en el tiempo, lo que puede medirse diciendo que la corriente de conducción es mucho mayor que la llamada "corriente de desplazamiento":

$$\text{buen conductor} \Rightarrow |\mathbf{j}| \gg \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \Rightarrow \sigma E \gg \omega \epsilon_0 E \Rightarrow \sigma \gg \omega \epsilon_0$$

Para un buen conductor el número de onda es:

$$\gamma = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - i\omega \mu_0 \sigma} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{-i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}} e^{-i\pi/4} = \sqrt{\omega \mu_0 \sigma} e^{-i\pi/4}$$

$$\text{y finalmente: } \gamma = \beta - i\alpha \approx \sqrt{\omega \mu_0 \sigma} e^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} (1 - i) = \frac{1 - i}{\delta} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$$

Se ve que $\alpha = \beta = 1/\delta$. Los campos que se propagan en un buen conductor decaen a $1/e (\approx 0.37)$ de su valor cuando recorren δ . Al recorrer 10δ los campos decaen a alrededor de

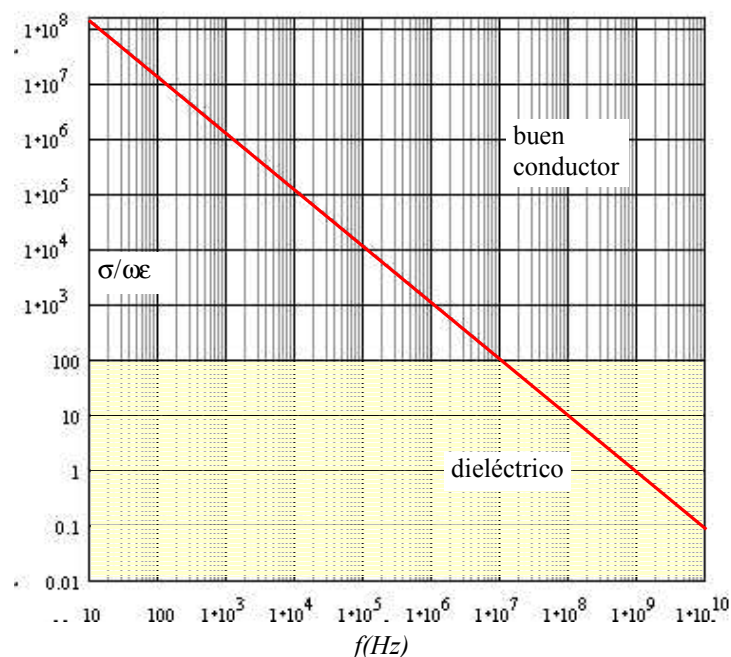
4.5×10^{-5} de su valor. Para cobre, por ejemplo:

$$\sigma \approx 6 \times 10^7 (\Omega m)^{-1} \Rightarrow \delta \approx \frac{92}{\sqrt{f}} \text{ mm} \Rightarrow \begin{cases} \delta \approx 9.2 \text{ mm} & (\sigma / \omega \epsilon_0 \approx 8.6 \times 10^4) & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ \delta \approx 92 \mu\text{m} & (\sigma / \omega \epsilon_0 \approx 8.6 \times 10^0) & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \\ \delta \approx 2.9 \mu\text{m} & (\sigma / \omega \epsilon_0 \approx 8.6 \times 10^{-7}) & \text{a } f = 1 \text{ GHz} \end{cases}$$

A medida que aumenta la frecuencia, la relación $\sigma/\omega\epsilon$ disminuye y el material deja de comportarse progresivamente como buen conductor. Además, los valores mismos de σ y ϵ varían con la frecuencia como se muestra con los modelos sencillos de la sección precedente.

El ejemplo paradigmático de este comportamiento es el del **agua de mar**, que a bajas frecuencias se comporta como un conductor pero ya a frecuencias de UHF y cercanas a las microondas se comporta como un dieléctrico con pérdidas moderadas:

$$\sigma = 4 (\Omega m)^{-1}, \epsilon_r = 80 \Rightarrow \sigma/\omega\epsilon \approx 9 \times 10^8 / f(\text{Hz})$$



En la gráfica loglog se muestra la variación de $\sigma/\omega\epsilon$ versus f .

Se observa que para $f > 10 \text{ MHz}$ el agua de mar comienza a dejar de ser un buen conductor, y para $f > 1 \text{ GHz}$ ya se comporta como un dieléctrico, aunque con altas pérdidas.

Como otro ejemplo (de relevancia en el diseño de antenas y radioenlaces en zonas rurales) damos la siguiente tabla de valores de $\sigma/\omega\epsilon$ para distintas frecuencias para un terreno rural de humedad promedio:

Frecuencia (Hz)	$\sigma/\omega\epsilon$	Comportamiento
10^3 (1 KHz)	1.3×10^4	Conductor
10^7 (10 MHz)	1.3	Conductor/Dieléctrico
10^{10} (30 GHz)	4.3×10^{-4}	Dieléctrico

La velocidad de propagación y la longitud de onda dentro del conductor son:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \omega \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \sigma}} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \delta = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$$

fuertemente dependientes de la frecuencia. La impedancia intrínseca es:

$$\eta = \eta' + i\eta'' = \frac{\omega \mu_0}{\gamma} = \frac{\omega \mu_0 \delta}{1-i} = \frac{1+i}{2} \omega \mu_0 \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} = \frac{1+i}{\sigma \delta}$$

Las partes real e imaginaria de la impedancia intrínseca son iguales, de modo que el **ángulo de fase es $\pi/4$ (45°)**. Un gran valor del ángulo de fase indica altas pérdidas. Se ve además que $|\eta| \ll \eta_0$. El vector medio de Poynting es:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|^2} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{\cos \varphi |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{\sqrt{2}\sigma \delta |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}}{4\sqrt{2}} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{\sigma \delta |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}}{4} \hat{\mathbf{z}}$$

La potencia perdida por unidad de volumen es:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha \langle N \rangle = \frac{2}{\delta} \langle N \rangle = \frac{\sigma |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}}{2} = \frac{|\tilde{\mathbf{j}}_{0\pm}| e^{\mp z/\delta} |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}| e^{\mp z/\delta}}{2} = \frac{1}{2} |\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}|$$

que coincide con la expresión de las pérdidas medias por efecto Joule.

La densidad media de energía almacenada en el campo es:

$$\langle u \rangle = \left(\epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{4} = \left(\epsilon_0 + \frac{\mu_0 \sigma^2 \delta^2}{2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}}{4} = \left(1 + \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \frac{\epsilon_0 |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}}{4}$$

y como $\sigma \gg \omega \epsilon_0$ el segundo término, vinculado con la energía magnética, es mucho mayor que el primero, vinculado con la energía eléctrica: $\langle u \rangle \approx \frac{\sigma}{4\omega} |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}$

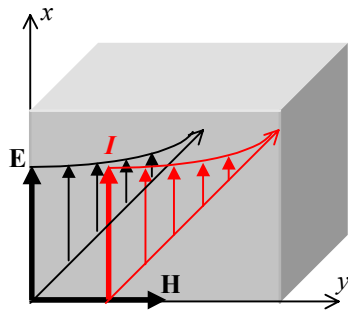
Se observa que la energía del campo electromagnético dentro del conductor, energía que se intercambia con el medio, es predominantemente magnética. Este resultado lleva a que en los modelos de interacción de campos electromagnéticos con **objetos biológicos**, que tienen un fuerte comportamiento conductor a frecuencias de interés tecnológico, interese fundamentalmente la interacción magnética.

La velocidad de la energía es:

$$\mathbf{v}_E = \pm \frac{2|\eta| \cos \varphi}{(\epsilon_0 |\eta|^2 + \mu_0)} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{2\sigma\delta}{(2\epsilon_0 + \sigma^2\delta^2\mu_0)} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{\sigma\delta}{\epsilon_0 + \frac{\sigma}{\omega}} \hat{\mathbf{z}} \approx \pm \omega\delta \hat{\mathbf{z}}$$

coincidente con la velocidad de las ondas en el conductor.

Efecto pelicular

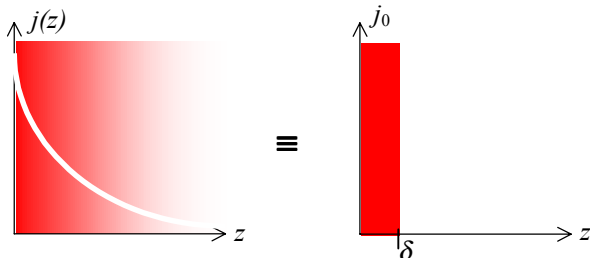


En el gráfico se observa que el campo y la corriente (orientados según +x) decaen exponencialmente al propagarse según z. Se ve que el campo y la corriente tienen valores significativos solamente para valores pequeños de z. Para $z = \delta$ la corriente es aproximadamente 0.37 el valor sobre la superficie del conductor $z = 0$. Además, la potencia perdida por efecto Joule por unidad de área sobre el plano xy en todo el conductor es:

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS_{xy}} \right\rangle = \int_0^\infty \left\langle \frac{dP_J}{dv} \right\rangle dz = \frac{\sigma E_0^2}{2} \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma E_0^2}{4\alpha} = \frac{1}{4} \sigma \delta E_0^2$$

que podemos escribir:

$$\langle P_J \rangle = \frac{1}{4} \delta S_{xy} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \Big|_{z=0}$$



Esta expresión equivale a las pérdidas por efecto Joule producidas por una corriente estacionaria $j_0 = \sigma E \Big|_{z=0}$ en una faja de espesor δ de un conductor de conductividad σ . Por este motivo, en el

cálculo se suele usar esta equivalencia suponiendo una corriente uniforme solamente en la periferia y nula en el resto del material.

Este comportamiento lleva también a que la corriente que circula por un cable se concentre en la periferia a medida que aumenta la frecuencia, como veremos en la siguiente sección. Por este motivo suelen usarse cables de cobre, aluminio o acero con un depósito delgado de plata. A altas frecuencias la corriente circula fundamentalmente por el depósito de plata que es un material de

mayor conductividad (y por lo tanto, menos pérdidas), aunque de mayor precio y menor resistencia estructural que el material central.

Ejemplo 8.7: Analizar la propagación de ondas de $f = 100 \text{ Hz}$ y $f = 1 \text{ MHz}$ en cobre, donde $\sigma \approx 6 \times 10^7 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$.

$$\text{La relación } \sigma / \omega \epsilon \text{ es } \sigma / \omega \epsilon = \sigma / \omega \epsilon_0 \approx \begin{cases} 1 \times 10^{16} & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ 1 \times 10^{12} & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

En ambos casos se trata de un buen conductor. Esta es además la relación entre la energía asociada al campo magnético y la energía asociada al campo eléctrico dentro del material.

$$\text{La profundidad de penetración es: } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \mu_0 \sigma f}} \approx \begin{cases} 6.5 \text{ mm} & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ 65 \text{ nm} & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

$$\text{La velocidad de propagación en el medio es: } v = \omega / \beta = 2\pi f \delta \approx \begin{cases} 4.08 \text{ m/s} & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ 408 \text{ m/s} & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

en ambos casos mucho menores que c .

$$\text{La longitud de onda en el medio es: } \lambda = v / f = 2\pi \delta \approx \begin{cases} 4.08 \text{ cm} & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ 408 \text{ nm} & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

$$\text{La impedancia intrínseca es: } \eta = \frac{1+i}{\sigma \delta} \approx \begin{cases} 2.5 \times 10^{-6} (1+i) \Omega & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ 0.25 (1+i) \Omega & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

Ejemplo 8.8: Analizar la propagación de una onda de $f = 1 \text{ GHz}$ en agua de mar.

A esta frecuencia, como se ve en la gráfica de la página 340, $\sigma \approx \omega \epsilon$, y el agua de mar no es un dieléctrico ni es un buen conductor. Tenemos con mayor exactitud:

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \frac{4 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}}{2\pi \times 10^9 \text{ s}^{-1} \times 80 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}} \approx 0.899$$

En esta situación debemos retomar la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + k^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{con} \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - i \omega \mu \sigma = \omega^2 \mu \epsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)$$

Haciendo los cálculos tenemos:

$$\gamma = \beta - i\alpha \approx (202.93 - i77.82) \text{ m}^{-1} \Rightarrow \delta = 1/\alpha \approx 1.285 \text{ cm}$$

$$v = \omega / \beta \approx 3.096 \times 10^7 \text{ m/s} \approx 0.1c \Rightarrow \lambda = v f \approx 3.09 \text{ cm} \approx 1.02 \lambda_0$$

$$\eta = \frac{\omega \mu}{\gamma} \approx (33.92 + i13) \Omega \ll \eta_0$$

Efecto pelicular en conductores cilíndricos

Es de particular interés el análisis del efecto pelicular en conductores cilíndricos como los que se usan normalmente en cables.

En el **Ejemplo 5.12** se analizó la distribución de corriente en un conductor cilíndrico por sucesivas aproximaciones en la aplicación de las ecuaciones de Maxwell del rotor para campos variables en el tiempo, a partir de la aproximación cuasiestática. En esta sección veremos una solución más rigurosa del problema.

Consideremos un alambre cilíndrico recto de longitud indefinida y sección circular de radio a . El material tiene una permitividad ϵ y una conductividad σ que serán en general dependientes de la frecuencia. Suponemos la presencia de campos armónicos: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$ de modo que las ecuaciones de Maxwell llevan a la ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico: $\nabla^2 \mathbf{E}_s + \gamma^2 \mathbf{E}_s = 0$ con $\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0 - i \omega \mu \sigma$

Como la longitud del alambre es muy larga y hay simetría cilíndrica de revolución alrededor del eje del cilindro, el campo sólo puede depender de ρ . Nos interesa además solamente el campo

axial E_z , que es el que está ligado a la corriente de conducción en el alambre. Como el versor \hat{z} es constante, tenemos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) E_{s_s} \hat{z} + \gamma^2 E_{s_s} \hat{z} = 0 \Rightarrow \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dE_{s_s}}{d\rho} \right) + \gamma^2 \rho^2 E_{s_s} = 0$$

Esta es la ecuación de Bessel, que vimos en los **Capítulos 5 y 7**, para $n = 0$. Por lo tanto, la solución es:

$$E_{s_s}(\rho) = A J_0(\gamma\rho) + B Y_0(\gamma\rho)$$

Como la solución debe ser regular para $\rho = 0$, sólo puede quedar el primer término:

$$E_{s_s}(\rho) = A J_0(\gamma\rho)$$

Debemos tener en cuenta que en general γ es complejo: $\gamma = \beta - i\alpha$ y que depende de la frecuencia.

Para la mayoría de los metales, se cumple la condición de **buen conductor** ($\sigma \gg \omega\epsilon$) hasta frecuencias por encima del rango de las microondas (10^{10} Hz), de modo que en general podemos tomar:

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0 - i\omega \mu \sigma = \omega \mu (\omega \epsilon_0 - i\sigma) \approx -i\omega \mu \sigma \Rightarrow \gamma \approx \sqrt{\omega \mu \sigma} e^{-i\pi/4}$$

y entonces:

$$E_{s_s}(\rho) = A J_0(e^{-i\pi/4} \sqrt{\omega \mu \sigma} \rho)$$

Estas funciones de Bessel de argumento complejo se conocen como **funciones de Kelvin**⁹: $\text{ber}_\nu(x) + i \text{bei}_\nu(x) = e^{i\nu\pi} J_\nu(x e^{-i\pi/4})$ con x real no-negativo y ν real.

Para $\nu = 0$, como es nuestro caso, se suele suprimir el subíndice. Las funciones de Kelvin cumplen la ecuación diferencial:

$$x^2 w'' + x w' - (ix^2 + \nu^2) w = 0 \Rightarrow w(x) = \text{ber}_\nu(x) + i \text{bei}_\nu(x) = e^{i\nu\pi} J_\nu(x e^{-i\pi/4})$$

Hay otro par de soluciones independientes de esta ecuación diferencial:

$$w(x) = \text{ker}_\nu(x) + i \text{kei}_\nu(x) = i \frac{\pi}{2} H_\nu^{(1)}(x e^{i3\pi/4}) = -i \frac{\pi}{2} e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(x e^{-i\pi/4})$$

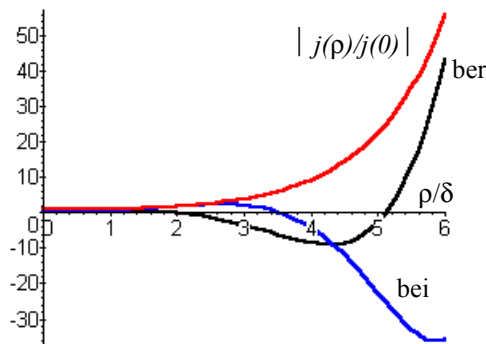
que son útiles para describir procesos de propagación ondulatoria.

Para analizar la distribución de corriente en el conductor se usa el primer par de soluciones, ya que el segundo par es singular en $\rho = 0$:

$$E_{s_s}(\rho) = A [\text{ber}(\sqrt{\omega \mu \sigma} \rho) + i \text{bei}(\sqrt{\omega \mu \sigma} \rho)] = A [\text{ber}(\sqrt{2} \rho / \delta) + i \text{bei}(\sqrt{2} \rho / \delta)]$$

donde δ es la profundidad de penetración en el conductor a la frecuencia de trabajo. La corriente axial será entonces:

$$j_{s_s}(\rho) = j_{z_s}(0) [\text{ber}(\sqrt{2} \rho / \delta) + i \text{bei}(\sqrt{2} \rho / \delta)]$$



donde $j_{z_s}(0)$ es la densidad de corriente en el eje del conductor. En la figura se grafican *ber*, *bei* y el módulo de la corriente en función de ρ/δ . Se ve que la corriente es mínima en el eje del conductor y va aumentando hacia la periferia. Por lo tanto la corriente se concentra en la superficie del material. Esto causa una variación de la resistencia por unidad de longitud del cable con la frecuencia. La distribución no uniforme de corriente también modifica la distribución de campo magnético dentro del conductor y en consecuencia la inductancia interna por unidad de longitud, como se calcula en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.9: Hallar la impedancia **interna** por unidad de longitud de un conductor macizo cilíndrico de radio a y conductividad constante σ en función de la frecuencia.

⁹ Ver, por ejemplo, M.Abramowitz e I.Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York, 1970, p.379.

La impedancia por unidad de longitud es: $Z_i = R + i\omega L_i$ donde R es la resistencia y L_i la inductancia interna. En términos de las variables circuitales, esta impedancia se define como el cociente de la caída de tensión a lo largo de la unidad de longitud sobre la superficie del conductor y la corriente total que circula: $Z_i = E_z(a) / I_z = j_z(a) / \sigma I_z$

Podemos calcular la corriente integrando la densidad sobre toda la sección:

$$I_z = \int_S j_z dS = 2\pi \int_0^a \rho j_z(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^a \rho j_{z_s}(0) [\text{ber}(\sqrt{2} \rho / \delta) + i \text{bei}(\sqrt{2} \rho / \delta)] d\rho$$

$$= \pi \delta^2 j_{z_s}(0) \int_0^{\sqrt{2}a/\delta} x [\text{ber}(x) + i \text{bei}(x)] dx$$

Pero¹⁰: $\int x \text{ber}(x) dx = x \text{bei}'(x) \quad \int x \text{bei}(x) dx = -x \text{ber}'(x)$

donde la prima simboliza la derivada respecto de x. Tenemos entonces:

$$I_z = \sqrt{2}\pi a \delta j_{z_s}(0) [\text{bei}'(\sqrt{2}a/\delta) - i \text{ber}'(\sqrt{2}a/\delta)]$$

y nos queda: $Z_i = \frac{j_z(a)}{\sigma I_z} = \frac{i}{\sqrt{2}\pi\sigma a \delta} \left[\frac{\text{ber}(\sqrt{2}a/\delta) + i \text{bei}(\sqrt{2}a/\delta)}{\text{ber}'(\sqrt{2}a/\delta) + i \text{bei}'(\sqrt{2}a/\delta)} \right]$

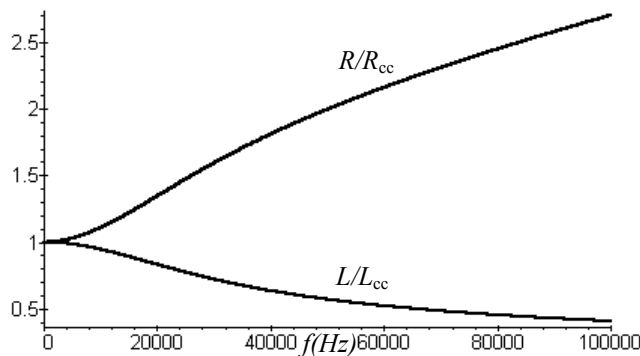
de donde: $Z_i = R + i\omega L_i = \frac{i R_s}{\sqrt{2}\pi a} \left[\frac{\text{ber}(\sqrt{2}a/\delta) + i \text{bei}(\sqrt{2}a/\delta)}{\text{ber}'(\sqrt{2}a/\delta) + i \text{bei}'(\sqrt{2}a/\delta)} \right]$

es la impedancia interna del conductor. $R_s = 1/\sigma\delta$ es la resistencia superficial.

Para $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \delta \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \text{ber}(\sqrt{2}a/\delta) \rightarrow 1 \\ \text{bei}(\sqrt{2}a/\delta) \rightarrow (\sqrt{2}a/\delta)^2/4 \\ \text{ber}'(\sqrt{2}a/\delta) \rightarrow -(\sqrt{2}a/\delta)^3/16 \\ \text{bei}'(\sqrt{2}a/\delta) \rightarrow (\sqrt{2}a/\delta)/2 \end{cases}$

y entonces:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow Z_i = R + i\omega L_i \rightarrow \frac{i}{\sigma\sqrt{2}\pi a \delta} \left[\frac{1 + i(\sqrt{2}a/\delta)^2/2}{i(\sqrt{2}a/\delta)/2} \right] = \frac{1}{\sigma\pi a^2} + i\omega \frac{\mu}{4\pi} = R_{cc} + i\omega L_{i_{cc}}$$



donde R_{cc} es la resistencia y $L_{i_{cc}}$ la inductancia interna del conductor en corriente continua. En la figura se muestra la variación de la resistencia y la inductancia interna por unidad de longitud para un conductor de cobre ($\sigma \approx 6 \times 10^7 (\Omega m)^{-1}$) de 1mm de radio, entre 0 y 100 KHz. Se observa que la resistencia aumenta, porque disminuye la sección eficaz de transporte de la corriente, mientras que la inductancia interna disminuye porque el campo magnético creado es menor a medida que disminuye la corriente.

¹⁰ M.Abramowitz, I.Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York, 1972. p.380.
 Juan C. Fernández - Departamento de Física – Facultad de Ingeniería
 Universidad de Buenos Aires – www.fi.uba.ar

Dieléctricos con pérdidas

Cuando un campo electromagnético variable en el tiempo se propaga en un material dieléctrico, el campo eléctrico crea fuerzas variables en el tiempo sobre los electrones del medio. Los electrones se mueven aceleradamente y, como veremos más adelante, emiten una nueva radiación electromagnética. La energía de esta radiación se toma del campo original, que ve disminuida su energía y va decayendo a medida de que se propaga. Así, desde el punto de vista del campo EM original este proceso de **dispersión** (scattering) se ve como pérdida de energía.

En este caso se tienen los parámetros: $\epsilon = \epsilon' - i \epsilon''$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$.

Entonces: $\gamma = \beta - i \alpha = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - i \omega \mu \sigma} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 (\epsilon' - i \epsilon'')}$

Y se ve que existe atenuación. Son de interés los llamados **dieléctricos de bajas pérdidas**, dado que habitualmente el propósito de los dieléctricos es almacenar energía. En tal caso: $\epsilon'' \ll \epsilon'$ y podemos aproximar:

$$\gamma = \beta - i \alpha = \sqrt{\omega^2 \mu_0 (\epsilon' - i \epsilon'')} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon' (1 - i \epsilon'' / \epsilon')} \approx \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon'} \left(1 - i \frac{\epsilon''}{2 \epsilon'} \right)$$

La velocidad de propagación es:

$$v = \omega / \beta \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon'}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon'_r}}$$

La profundidad de penetración es:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{2 \epsilon'}{\beta \epsilon''} = \frac{v}{\omega} \frac{2 \epsilon'}{\epsilon''}$$

La longitud de onda:

$$\lambda = 2\pi / \beta \approx \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon'_r}}$$

Se ve que la profundidad de penetración es grande (porque las pérdidas son pequeñas) y la velocidad de propagación y la longitud de onda tienen expresiones similares a las del dieléctrico ideal.

La impedancia intrínseca es: $\eta = \eta' + i \eta'' = \frac{\omega \mu}{\gamma} = \frac{\omega \mu_0}{\beta^2} (\beta + i \alpha) \approx \frac{\omega \mu_0}{\beta^2 + \alpha^2} (\beta + i \alpha)$

ya que $\beta \gg \alpha$. Resulta además que $\eta' \gg \eta''$, o sea que $\phi \rightarrow 0$.

Finalmente: $\eta \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon'}} \left(1 + i \frac{\epsilon''}{2 \epsilon'} \right) = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon'_r}} \left(1 + i \frac{\epsilon''}{2 \epsilon'} \right)$

El vector medio de Poynting es:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|^2} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z} \cos \phi}{2|\eta|} \hat{\mathbf{z}} \approx \pm \frac{\sqrt{\epsilon'_r} |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2\eta_0} \hat{\mathbf{z}}$$

y entonces podemos calcular los otros parámetros:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha \langle N \rangle \quad \text{(densidad de potencia media perdida)}$$

$$\langle u \rangle = \left(\epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{4} \quad \text{(densidad de energía almacenada)}$$

$$\mathbf{v}_E = \frac{\langle \mathbf{N} \rangle}{\langle u \rangle} = \pm \frac{2|\eta| \cos \phi}{(\epsilon' |\eta|^2 + \mu)} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{(velocidad de la energía)}$$

donde hemos introducido la impedancia intrínseca compleja:

$$\eta = \frac{\omega \mu}{\gamma} = \frac{\omega \mu}{\beta - i\alpha} \Rightarrow \eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 + i \frac{\epsilon''}{2\epsilon'} \right)$$

o sea $\eta = \eta' + i\eta''$ con $\eta'' \ll \eta'$

Para un dieléctrico de bajas pérdidas, la profundidad de penetración es alta (la atenuación es baja) y la impedancia intrínseca es prácticamente real.

La potencia que fluye y las pérdidas se pueden calcular mediante el vector de Poynting:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \frac{E_0^2}{2|\eta|} \cos \varphi e^{-2\alpha z}$$

donde: $\cos \varphi \approx \frac{\epsilon'}{\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}}$ es cercano a 1 (φ es muy pequeño).

Los dieléctricos con pérdidas de aplicación técnica suelen caracterizarse por la llamada **tangente de pérdidas** δ , definida por¹¹:

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \Rightarrow \tan \delta \approx \delta \rightarrow 0 \text{ para dieléctricos de bajas pérdidas.}$$

La potencia perdida en la propagación de una onda en el medio es:

$$\left\langle \frac{dP}{dv} \right\rangle = 2\alpha \langle N \rangle = \frac{\alpha E_0^2}{|\eta|} \cos \varphi e^{-2\alpha z} \text{ proporcional a } \alpha.$$

Conductividad equivalente

Independientemente del tipo de material que estemos analizando, siempre podemos imaginar un medio conductor equivalente con las mismas pérdidas:

$$\left\langle \frac{dP}{dv} \right\rangle = \frac{\sigma_{eq} E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} \text{ y como para un dieléctrico: } \left\langle \frac{dP}{dv} \right\rangle = \frac{\alpha E_0^2}{|\eta|} \cos \varphi e^{-2\alpha z}$$

podemos obtener: $\sigma_{eq} = \frac{2\alpha}{|\eta|} \cos \varphi \cong \frac{2\omega \sqrt{\mu \epsilon'} \frac{\epsilon''}{2\epsilon'}}{\sqrt{\mu/\epsilon'}} = \omega \epsilon''$ donde se ha tomado $\cos \varphi \cong 1$.

y se ve claramente la relación entre las pérdidas dieléctricas y la **parte imaginaria** de la permitividad compleja. Puede comprobarse que la cantidad $\omega \epsilon''$ tiene dimensiones de conductividad eléctrica¹².

Cuando un material presenta **simultáneamente** pérdidas conductoras y dieléctricas (por ejemplo, nuevamente el agua de mar), las pérdidas pueden expresarse mediante una conductividad equivalente: $\sigma_{eq} = \sigma_c + \omega \epsilon''$

Análogamente, el factor de atenuación puede escribirse: $\alpha = \alpha_c + \alpha_d$

¹¹ En alguna literatura se define $\tan \delta = \epsilon''/2\epsilon'$

¹² También podemos hablar de una **permitividad equivalente** de, por ejemplo, un conductor, estableciendo la equivalencia $\sigma \leftrightarrow \omega \epsilon$ (que surge de considerar las pérdidas) para pasar de una descripción a la otra. Estos modelos son convenientes para simplificar los cálculos.

Plasmas

En la sección precedente se encontró que, para la descripción de la propagación de ondas electromagnéticas, se puede describir al plasma como un medio con una **permitividad equivalente**:

$$\epsilon_{eq} = \epsilon_0 \left[\left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \Gamma^2)} \right) - i \frac{\Gamma \omega_p^2}{(\omega^2 + \Gamma^2) \omega} \right] \quad \text{donde: } \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \text{ es la } \mathbf{frecuencia de plasma}.$$

Para $\Gamma \ll \omega$, la parte imaginaria de la permitividad es pequeña y podemos aproximar a la parte real: $\Gamma \rightarrow 0 \Rightarrow \epsilon_{eq} \approx \epsilon_0 (1 - \omega_p^2 / \omega^2)$

Se ve que para frecuencias menores que la frecuencia de plasma, la permitividad equivalente es negativa, de manera que el vector de onda: $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon_{eq}} = i \omega \sqrt{\mu |\epsilon_{eq}|}$ es imaginario puro y por lo tanto **no hay propagación**. Los campos decaen exponencialmente con la distancia pero no hay un factor de fase real. Por ejemplo, para el campo eléctrico:

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i(\omega t - i|k|z)} = E_0 e^{i\omega t} e^{-|k|z}$$

Este tipo de campos que no se propagan se llaman evanescentes. La frecuencia de plasma resulta así un límite inferior para la propagación de ondas en el plasma.

En el siguiente ejemplo calculamos la frecuencia de plasma para varios casos.

Ejemplo 8.10: Calcular la frecuencia de plasma en a) la cromosfera solar ($N = 3 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$), b) la ionósfera ($N = 3 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$), c) un arco de descarga ($N = 3 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$) y en d) un metal ($N = 10^{28} \text{ m}^{-3}$).

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \Rightarrow \begin{cases} \text{cromosfera:} & \omega_p \approx 3.1 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} & \text{ionosfera:} & \omega_p \approx 9.78 \times 10^7 \text{ s}^{-1} \\ \text{arco:} & \omega_p \approx 9.78 \times 10^{12} \text{ s}^{-1} & \text{metal:} & \omega_p \approx 5.65 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

Vemos que, salvo en el caso de la ionósfera, donde el gas es muy enrarecido, las frecuencias de plasma son muy altas, lo que indica que estos plasmas son generalmente opacos porque la radiación tiene normalmente frecuencias menores.

La ionosfera

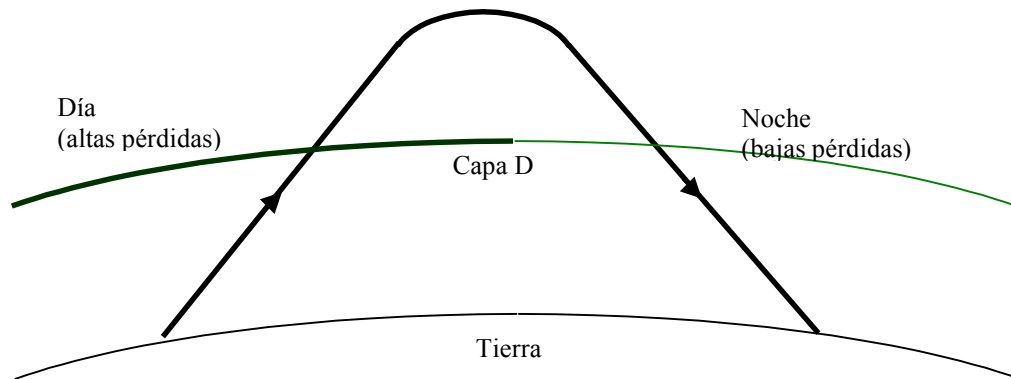
En la región atmosférica que se extiende aproximadamente entre los 50 y 500 Km de altura la radiación solar produce una ionización parcial de los gases produciendo un plasma. Esta región se conoce como ionosfera. La ionosfera consiste en un gas de electrones libres, separados de sus átomos originales por la ionización, y un gas de iones pesados. Como la frecuencia de plasma depende inversamente de la raíz de la masa de los iones involucrados, se ve que el gas de electrones tiene una frecuencia de plasma mayor (más de 40 veces) que la frecuencia de plasma del gas de iones, lo que hace al gas de electrones el factor más importante para la propagación de ondas de alta frecuencia de radio. Además cuanto mayor sea la densidad de electrones, producto de una mayor ionización, mayor será la frecuencia de plasma.

Durante el día puede haber cuatro regiones presentes, llamadas **capas** o regiones D, E, F1 y F2, que difieren entre sí por sus densidades electrónicas. Sus alturas aproximadas son:

D	50 a 90 Km	F1	140 a 210 Km
E	90 a 140 Km	F2	por encima de los 210 Km

Durante el día, una zona E esporádica se observa a veces dentro de la región E y en ciertos momentos del ciclo solar las capas F1 y F2 no son distinguibles sino que se confunden en una única capa F. Como la ionización depende casi exclusivamente de la luz solar, a la noche disminuye notablemente el número de electrones libres, dejando sólo la capa F2 prácticamente disponible para comunicaciones. Debido a la absorción de la luz solar, la densidad del gas de electrones

aumenta a medida que se aumenta la altura, pero este efecto se ve contrarrestado por la menor densidad de la atmósfera a medida que ascendemos, de manera que el máximo se da en la zona de la capa F. La variación de la densidad de electrones con la altura modifica la frecuencia de plasma y con ella la permitividad equivalente del plasma, lo que lleva a que el índice de refracción efectivo de la ionosfera varía con la altura. Esto lleva a que una onda que incide oblicuamente sobre la ionosfera siga un camino “curvo” en su propagación y eventual rebote dentro del plasma, cuando la densidad de electrones local lleve a una frecuencia de plasma mayor que la frecuencia de la onda.



Sólo las capas E, F1, la E esporádica (si está presente), y la F2 refractan ondas de HF. La capa D es también importante porque, aunque no refracta las ondas de HF, las absorbe y atenúa. La región F2 es la más importante para uso en comunicaciones ya que está presente las 24 horas, su gran altitud permite los rebotes más largos y usualmente refracta las frecuencias superiores del espectro de HF (3 a 30 MHz).

La composición y altura de las capas ionosféricas varía por diversos factores:

- La hora del día. La ionización es un fenómeno que depende casi exclusivamente de la luz solar. A la noche las capas son más delgadas y con densidad electrónica menor. La altura de la capa inferior (D) se eleva de noche y se hace casi insignificante, lo que es de importancia para las comunicaciones ya que esta capa absorbe las ondas de HF.
- La latitud. Cuanto más verticalmente incida la radiación solar es mayor la densidad de potencia y la tasa de ionización. Por ello las capas ionosféricas son más gruesas y más ionizadas en el ecuador, disminuyendo paulatinamente hasta llegar a los polos, donde además influye la mayor intensidad del campo magnético terrestre que desvía la radiación cósmica que produciría mayor ionización.
- La estación del año. En los equinoccios el sol está perpendicular a la latitud media de cada hemisferio, lo que aumenta la tasa de ionización¹³.
- El ciclo solar. El Sol varía la densidad de potencia que emite en forma cíclica, con un pico máximo cada alrededor de once años. Estos son los periodos de máxima ionización de la ionosfera, aunque la presencia de otras partículas de alta energía que el Sol emite en las llamadas tormentas solares aumenta la ionización de la capa D aumentando la absorción de ondas de comunicaciones. Este efecto lleva a los clásicos desvanecimientos de la señal inmediatamente después de producida la tormenta solar y puede durar hasta un día completo. Las tormentas solares con emisión de partículas cargadas a velocidades relativistas modifican profundamente las líneas de campo magnético terrestre, fundamentalmente en los polos, cau-

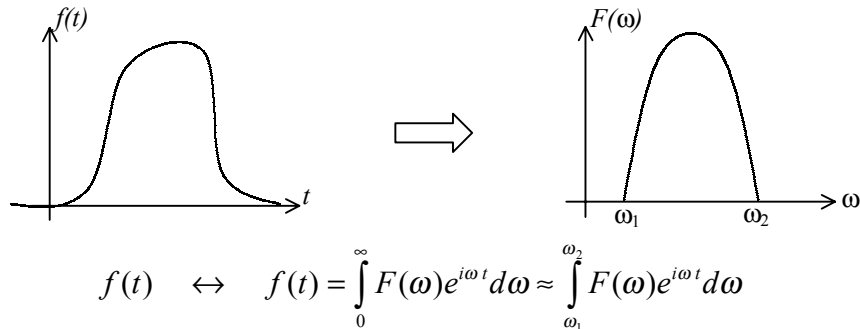
¹³ Es en la primavera donde se produce el mayor efecto en la capa de ozono austral.

sando mayor ionización y presencia de auroras. Estos efectos totalmente al azar perturban apreciablemente las comunicaciones en zonas de alta latitud.

Medios dispersivos. Señales de banda angosta.

La propagación de señales **no armónicas** en medios dispersivos presenta la dificultad conceptual de definir cuál es la velocidad de la señal, ya que cada componente de frecuencia viaja a una velocidad distinta. Es posible obtener una definición consistente cuando el ancho de banda de la señal es pequeño. Llamamos a este tipo de señales **señales de banda angosta**.

Una señal acotada en el tiempo tiene una representación de Fourier acotada en frecuencia:



En el caso de una onda plana:

$$f(z - vt) \leftrightarrow f(z - vt) = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i(\omega t - \beta z)} d\omega \approx \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega) e^{i(\omega t - \beta z)} d\omega$$

Como la velocidad de propagación de las ondas generalmente depende de la frecuencia, tendremos que $\beta = \beta(\omega)$. Si el **ancho de banda** $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ es pequeño (condición matemática para una señal de **banda angosta**) en ese intervalo puede escribirse:

$$\beta = \beta(\omega) \approx \beta(\omega_0) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \dots$$

donde $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$ es la **frecuencia central** de la banda. Queda así:

$$\begin{aligned} f(z - vt) &\approx \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega) e^{i(\omega t - \beta z)} d\omega \approx \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega) e^{i \left[\omega t - \left(\beta_0 + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \right) z \right]} d\omega \\ &= e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega) e^{i(\omega - \omega_0) \left[t - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} z \right]} d\omega = e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} F(\Omega) e^{i\Omega \left[t - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} z \right]} d\Omega \end{aligned}$$

donde: $\Omega = \omega - \omega_0$. Pero esta integral es la representación de Fourier:

$$f\left(t - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} z\right) \leftrightarrow \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} F(\Omega) e^{i\Omega \left[t - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} z \right]} d\Omega \Rightarrow f(z - vt) \approx f\left(t - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} z\right) e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)}$$

donde $\beta_0 = \beta(\omega_0)$ y ω_0 es la frecuencia central de la banda de señal.

Se observa que la señal se comporta como una envolvente $f(z - v_g t)$ junto con una oscilación rápida de frecuencia ω_0 .

La velocidad con que viaja la envolvente es la **velocidad de grupo:** $v_g = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\beta_0}$
 que debe compararse con la **velocidad de fase** $v_f = \omega/\beta$

con que se **propaga cada componente de frecuencia** de la señal.

Esto significa que el conjunto (el "centro de masa" del "paquete" de ondas) viaja con v_g , mientras que cada componente de frecuencia viaja con su correspondiente v_f .

Como en general la llamada **relación de dispersión** $\omega = \omega(\beta)$ no es lineal, la velocidad de fase será diferente a cada frecuencia, y algunas componentes viajarán más rápido que otras. Esto lleva a una deformación de la forma de onda del paquete, lo que se conoce como **dispersión**, que, desde el punto de vista de la transmisión de información codificada en señales electromagnéticas, se traduce en distorsión y/o pérdida de datos.

Podemos escribir la velocidad de grupo en función de la velocidad de fase:

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\beta_0} = \left. \frac{d}{d\beta} (v_f \beta) \right|_{\beta_0} = v_f \Big|_{\beta_0} + \beta_0 \left. \frac{dv_f}{d\beta} \right|_{\beta_0}$$

También podemos escribir:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{d}{d\beta} = \frac{d}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\beta} = -\frac{2\pi}{\beta^2} \frac{d}{d\lambda} \Rightarrow v_g = v_f \Big|_{\lambda_0} - \frac{2\pi}{\beta_0^2} \beta_0 \left. \frac{dv_f}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} = v_f \Big|_{\lambda_0} - \lambda_0 \left. \frac{dv_f}{d\lambda} \right|_{\lambda_0}$$

Los medios dispersivos se clasifican como:

- **dispersión normal.** Son los medios en donde $\frac{dv_f}{d\lambda} > 0 \Rightarrow v_g < v_f$
- **dispersión anómala.** Son los medios en donde $\frac{dv_f}{d\lambda} < 0 \Rightarrow v_g > v_f$

Cuando hay dispersión normal (pequeña) el paquete se distorsiona poco al viajar por el material y su identidad se mantiene. Cuando la dispersión es normal y grande o se trata de dispersión anómala la señal se distorsiona tanto que es imposible recuperar la información. En tal caso la noción de velocidad de grupo pierde su sentido como parámetro que describe la propagación de energía e información. En el siguiente ejemplo vemos que la propagación en un material **con pérdidas** (un conductor) se da con dispersión anómala.

Ejemplo 8.11: Calcular las velocidades de fase y de grupo para un buen conductor.

En un buen conductor:
$$\beta \approx \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

La velocidad de fase es:
$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \omega \Big/ \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}}$$

Y la velocidad de grupo:
$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = 1 \Big/ \frac{d\beta}{d\omega} = 1 \Big/ \frac{d}{d\omega} \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = 1 \Big/ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu \sigma}{2\omega}} = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}} = 2v_f$$

y se ve que la velocidad de grupo es el doble de la velocidad de fase para toda frecuencia, lo que indica que se trata de un caso de **dispersión anómala**.

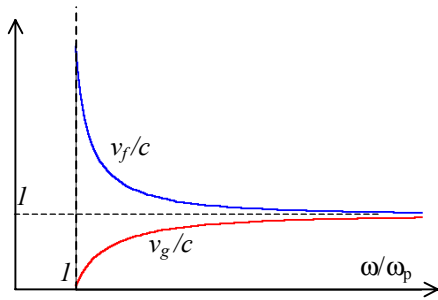
Ejemplo 8.12: Calcular las velocidades de fase y de grupo para un plasma sin pérdidas.

En el caso de un plasma sin pérdidas:

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon_{eq}} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

Luego:
$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}}$$

y
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 \Big/ \frac{dk}{d\omega} = c \Big/ \frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} = c \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}$$



Se observa que: $v_f v_g = c^2$. En la figura se muestra la dependencia de ambas velocidades respecto de ω .

Como para todo ω : $v_f > v_g$, se trata de un caso de **dispersión normal**.

El archivo **GV.ZIP** contiene una página HTML GroupVelocity.htm desde la cual se corre un applet que permite ver la forma de un paquete de ondas con distintos valores de la velocidad de grupo en relación a la velocidad de fase.

APENDICE 6 - Relaciones de Kramers y Krönig

A una dada frecuencia en muchos dieléctricos existe una relación lineal entre el campo eléctrico y el desplazamiento (o la polarización):

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad \text{donde} \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$$

es la permitividad compleja dependiente de la frecuencia. Pero cada función de la frecuencia se puede pensar como la transformada de Fourier de la correspondiente señal o función en el dominio del tiempo:

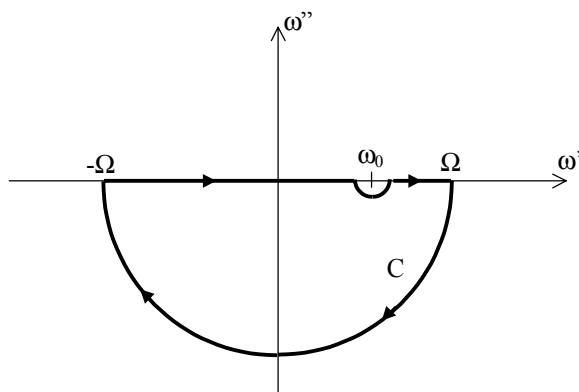
$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \int_0^\infty \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt & \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= \int_0^\infty \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) &= \int_0^\infty \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt & \varepsilon(\omega) &= \int_0^\infty \varepsilon(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Entonces, la relación que establece el producto de las transformadas corresponde a un **producto convolución** en el dominio del tiempo:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \varepsilon(\tau) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \varepsilon_0 \chi(\tau) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau$$

Estas ecuaciones describen una **relación causal**, en el sentido que es el campo eléctrico aplicado $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ la causa que genera el efecto $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$ o $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$, la polarización del material. Como en toda relación causal, el efecto debe ser posterior a la causa, de manera que $t > t - \tau \Rightarrow \tau > 0$ y el límite inferior en las integrales de convolución es cero. En términos generales, hablamos de la relación causal entre un **estímulo** y una **respuesta** mediante una **función de transferencia** $\varepsilon(t)$.

Las partes real e imaginaria de la función de transferencia están ligadas entre sí, como puede demostrarse de la siguiente manera. Consideremos momentáneamente que la frecuencia es una cantidad compleja: $\omega = \omega' + i\omega''$. Tenemos entonces que:



$$\varepsilon(\omega) = \int_0^\infty \varepsilon(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty \varepsilon(t) e^{\omega'' t} e^{-i\omega' t} dt$$

y vemos que $\varepsilon(\omega)$ es una función analítica en el semiespacio inferior del plano complejo ($\omega'' < 0$). Entonces calculamos la integral:

$$\oint_C \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0}$$

sobre la curva C del recinto de la figura, donde el semicírculo tiene un radio Ω que tiende a infinito. Como el integrando es una función analítica en todo el recinto de integración, se puede aplicar el teorema de los residuos. Como se ha evitado el único polo (en ω_0) la integral es cero. También se anula la integral sobre el semicírculo, debido a que el radio tiende a infinito y el denominador del integrando se anula. Nos queda así:

$$\oint_C \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} = \int_{-\infty}^{\omega_0 - \delta} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} + \int_{C_1} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} + \int_{\omega_0 - \delta}^{\infty} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} = 0$$

donde δ es el radio del semicírculo C_1 . La contribución de este tramo es $-i\pi \chi(\omega_0)$ de modo que podemos escribir:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega_0 - \delta} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} + \int_{\omega_0 + \delta}^{\infty} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} \right] - i\pi \chi(\omega_0) = 0$$

Este límite es el llamado **valor principal de Cauchy** de la integral sobre el eje real y entonces nos queda la relación:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi} \wp \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\chi(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \right]$$

donde \wp indica el valor principal de la integral y hemos cambiado $\omega \rightarrow \omega'$ y $\omega_0 \rightarrow \omega$.

Separando esta ecuación en parte real e imaginaria tenemos:

$$\chi'(\omega) - i\chi''(\omega) = \frac{1}{\pi} \wp \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[i\chi'(\omega') + \chi''(\omega')] d\omega'}{\omega' - \omega} \right] \Rightarrow \begin{cases} \chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \wp \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \right] \\ \chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \wp \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \right] \end{cases}$$

Estas son las llamadas **relaciones de Kramers y Krönig**¹⁴ que vinculan entre sí las partes real e imaginaria de la susceptibilidad dieléctrica.

Como: $\epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega) = \epsilon_0[1 + \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)] = \epsilon_0[1 + \chi'(\omega)] - i\epsilon_0\chi''(\omega)$ tenemos:

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 + \frac{1}{\pi} \wp \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \right] \quad \epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \wp \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\epsilon'(\omega') - \epsilon_0] d\omega'}{\omega' - \omega} \right]$$

La parte real de la permitividad está relacionada con el índice de refracción del material, es decir, con la propagación de las ondas en el material, mientras que la parte imaginaria está relacionada con las pérdidas dieléctricas o la absorción del material.

De esta forma se pueden usar las relaciones de Kramers-Krönig para determinar las características de propagación en términos de las propiedades de absorción, que son de más simple medición experimental.

Estas relaciones surgen únicamente de la condición de causalidad en una relación lineal entre estímulo y respuesta que establece que el estímulo debe preceder a la respuesta, y entonces **son aplicables a cualquier situación causal**. Estas relaciones fueron descubiertas independientemente en el diseño de circuitos eléctricos, como surge del libro clásico de Bode "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", de la década del 40 y en otras disciplinas.

La relación entre el par de funciones:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \wp \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t} \right] \quad g(t) = -\frac{1}{\pi} \wp \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t} \right]$$

se conoce como **transformada de Hilbert**. Las transformadas de Hilbert se usan en diseño de filtros de fase mínima, análisis de vibraciones y deformaciones en sólidos y en todo aspecto donde haya un estímulo y una respuesta lineal.

¹⁴ H.A.Kramers, Nature, 117 (1926) 775, R. De L.Kronig, J. Opt. Soc. Am. 12 (1926) 547

RESUMEN

En este capítulo describimos la propagación de ondas electromagnéticas en recintos libres de fuentes.

- El caso más simple se da cuando el recinto es vacío. Las ecuaciones de Maxwell llevan a **ecuaciones vectoriales de onda** de las que se deduce que el campo electromagnético se comporta como ondas que se propagan con velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- Las **ondas planas elementales** ocurren cuando la simetría es cartesiana y la onda se propaga según un eje: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(z, t)$ $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(z, t)$
- y las ondas **linealmente polarizadas** son aquellas donde la dirección de los campos no varía con el tiempo: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(z, t) \hat{\mathbf{e}}_0$ $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H(z, t) \hat{\mathbf{h}}_0$
- En ondas planas cualquier función del tipo $f(z \mp ct)$ es solución.
- Se demuestra además que las ondas planas son **transversales** a la dirección de propagación: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(z, t) \Rightarrow E_z = 0$ $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(z, t) \Rightarrow H_z = 0$
- Y existe una relación entre los campos eléctrico y magnético de la onda plana, llamada **impedancia intrínseca** (del vacío): $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0}$ $\eta_0 \cong 377 \Omega$

- El vector de Poynting y la densidad de energía que transporta una onda plana son:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \quad u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{N}(\mathbf{r}, t)}{u(\mathbf{r}, t)} = \pm \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\eta_0 \epsilon_0} = \pm c \hat{\mathbf{z}}$$

es la llamada velocidad de la energía.

- Cualquier señal físicamente realizable se puede describir como una superposición de armónicas. Para ondas armónicas la ecuación de ondas lleva a una ecuación de Helmholtz: $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$ con $k = \omega / c$

- La descripción de una onda plana que se propaga en una dirección del espacio cualquiera ζ es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re e \left\{ \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{e}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \Re e \left\{ \frac{\tilde{E}_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{h}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\}$$

con $\mathbf{k} = k \hat{\zeta}$ $\hat{\mathbf{h}}_0 = \hat{\zeta} \times \hat{\mathbf{e}}_0$

mientras que el vector de Poynting y la densidad de energía son:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{|E_0|^2}{\eta_0} \hat{\zeta} \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0) \quad \text{con} \quad \tilde{E}_0 = |E_0| e^{i\varphi_0}$$

$$u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 |E|^2 = \epsilon_0 |E_0|^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)$$

- Los valores medios de estas cantidades son: $\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{E_0^2 \hat{\zeta}}{2\eta_0}$ $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$

- En el caso de **ondas no armónicas**, se demuestra que el valor medio del vector de Poynting y la densidad de energía resultan la suma de los valores correspondientes a cada armónica. En el caso de señales periódicas tenemos:

$$\langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E_n(z)|^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\eta_0} \quad \langle u(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 |E_n(z)|^2}{2}$$

- Se presentan las descripciones de las **ondas esféricas** y **cilíndricas elementales**, que dependen solamente de la distancia al origen de coordenadas (esféricas) y de la distancia al eje de simetría (cilíndricas). En ambos casos se resuelve la ecuación de onda **escalar** para pasar luego a las soluciones de la ecuación de onda **vectorial**. En el caso esférico existe una forma general de solución:

$$\nabla^2 f(r,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f(r,t) = \frac{g(r \mp ct)}{r}$$

que para ondas armónicas puede escribirse: $f(r,t) = \tilde{f}_0 e^{i(\omega t \mp kr)} / r$ con $k = \omega/c$.

A partir de la solución escalar podemos escribir una solución vectorial:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \nabla \times [\mathbf{r} f(\mathbf{r},t)] = -\mathbf{r} \times \nabla f(\mathbf{r},t) \quad \text{y} \quad \mathbf{N}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r},t)$$

Estos campos son transversales a la dirección de propagación y su relación es la impedancia intrínseca del vacío.

En el caso **cilíndrico** no existe una forma general de solución sino que se tiene, para ondas armónicas escalares:

$$\nabla^2 f_s - k^2 f_s = 0 \Rightarrow f_s(\rho) = \begin{cases} A H_0^{(1)}(k\rho) + B H_0^{(2)}(k\rho) & k \neq 0 \\ A' \ln(\rho) + B' & k = 0 \end{cases}$$

donde $H_0^{(1)}$ y $H_0^{(2)}$ son las llamadas funciones de Hankel. Las soluciones vectoriales son más complejas que en el caso esférico pero comparten las condiciones de transversabilidad y la relación de la impedancia intrínseca del vacío entre los campos.

- Cuando existe más de una fuente de ondas, es necesario superponer los efectos. Se dan dos casos, según que las fases de los campos emitidos estén correlacionados en el tiempo o no:
 - ♦ Superposición de campos si hay correlación de fase (caso **coherente**);
 - ♦ Superposición de intensidades si no hay correlación de fase (caso **incoherente**).

La superposición coherente se conoce como **interferencia**, que da lugar a una redistribución espacial de la energía y crea una serie de fenómenos que se utilizan en diversas técnicas, llamadas de **interferometría**, que se describen brevemente. Por otra parte la interferencia es la técnica fundamental en el diseño de antenas para obtener esquemas direccionales de emisión a demanda.

- Un aspecto importante de las ondas es su **polarización**, que describe la posición de los vectores campo a medida que se propagan. En general, la punta de los campos traza una hélice de sección elíptica. Casos particulares son la polarización circular y la polarización lineal. La polarización de las ondas crea fenómenos en la propagación

en materiales, que permiten conocer propiedades de estos materiales, y es también de importancia en el diseño de antenas. Se describen varios fenómenos asociados a la polarización en la disciplina que se conoce como **electroóptica**.

- Para describir la propagación de ondas en medios materiales es necesario previamente entender la respuesta de los átomos y moléculas del medio a un campo electromagnético. Este comportamiento se puede describir en primera aproximación mediante modelos simples, que son de utilidad para aplicaciones técnicas. Se presentan los modelos clásicos de Drude-Lorentz (dieléctricos) y Drude (conductores).
- En el modelo de **Drude-Lorentz** se halla que para campos armónicos existe una **permitividad compleja** que describe el fenómeno de pérdidas:

$$\epsilon_\omega = \epsilon_0(1 + \chi_\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \right) = \epsilon'_\omega - i \epsilon''_\omega$$

mientras que en el modelo de **Drude** de conductores también existe **una conductividad compleja**:

compleja: $\sigma = \sigma_{cc} \frac{1 - i \Omega}{1 + \Omega^2}$ que en la mayoría de las aplicaciones se puede considerar real y coincidente con la conductividad de cc.

- Finalmente, un **plasma** es un gas de iones, que puede describirse alternativamente

mediante una **permitividad compleja:** $\epsilon_{eq} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2 (\omega + i \Gamma)}{(\omega^2 + \Gamma^2) \omega} \right)$

o mediante una **conductividad compleja:** $\sigma_{eq} = \omega_p^2 \epsilon_0 \frac{(\Gamma + i \omega)}{(\Gamma^2 + \omega^2)}$

donde la **frecuencia de plasma** es: $\omega_p = \sqrt{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}}$

- La propagación de ondas en medios materiales debe tener en cuenta los parámetros complejos y dependientes de la frecuencia que los caracterizan. En el caso de los **dieléctricos** llamados **sin pérdidas** (donde se desprecian las pérdidas, en rigor), la propagación es idéntica a la propagación en el vacío, salvo que la velocidad y la impedancia intrínseca son menores:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} < c \quad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{n} < \eta_0$$

donde n es el llamado **índice de refracción** del medio en las aplicaciones ópticas.

- En la propagación en medios con pérdidas hay una atenuación de los campos a medida que se propagan. Esto lleva a un vector de onda e impedancia intrínseca complejos: $\gamma = \beta - i \alpha$ $\eta = \eta' + i \eta''$ y los campos tienen la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

β es el **factor de propagación** y α el **factor de atenuación**, generalmente dependientes de la frecuencia. La inversa de α , $\delta = 1/\alpha$, se llama **profundidad de penetración**. Indica grosso modo la zona de influencia importante de los campos dentro del material debido al decaimiento posterior. La impedancia intrínseca compleja implica un des-

fasaje entre los campos. Este ángulo es tanto mayor cuanto mayores son las pérdidas.

Se encuentra que el vector de Poynting es: $\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{E_0^2}{2|\eta|} \cos \varphi e^{-2\alpha z}$

donde φ es el ángulo de fase del complejo η . La potencia perdida en la propagación

de una onda en el medio es: $\left\langle \frac{dP}{dv} \right\rangle = 2\alpha \langle N \rangle$ proporcional a α .

- En la propagación en conductores interesan los **buenos conductores**, donde:

$$|\mathbf{j}| \gg \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \Rightarrow \sigma \gg \omega \epsilon_0$$

Y tenemos:

$$\gamma = \beta - i\alpha = \frac{1-i}{\delta} \quad \text{con} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha}$$

El comportamiento de decaimiento se conoce como **efecto pelicular** e implica una distribución no uniforme de las líneas de campo dentro de los conductores. Se describe el efecto pelicular en **conductores cilíndricos**, que incrementa el valor de la resistencia del material aumentando las pérdidas de Joule con la frecuencia. Los conductores exhiben una impedancia intrínseca compleja:

$$\eta = \eta' + i\eta'' = \frac{1+i}{\sigma\delta}$$

El ángulo de fase φ en un conductor es $\pi/4$ (45°), lo que indica fuertes pérdidas.

- En la propagación en **dieléctricos con pérdidas** interesa el caso de bajas pérdidas, donde $\epsilon'' \ll \epsilon'$. Se tiene nuevamente un factor de propagación complejo:

$$\gamma = \beta - i\alpha \Rightarrow \begin{cases} \beta = \omega / v \\ \alpha = 1/\delta = \frac{\epsilon''}{2\epsilon'} \beta \end{cases} \quad \text{con} \quad v = 1/\sqrt{\mu\epsilon'}$$

y una impedancia intrínseca: $\eta = \eta' + i\eta'' \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 + i \frac{\epsilon''}{2\epsilon'} \right)$

El ángulo de fase φ en un dieléctrico de bajas pérdidas es pequeño. Su tangente se conoce como **tangente de pérdidas** del material.

- En el caso de los **plasmas**, la permitividad equivalente tiene su parte real negativa **por debajo** de la frecuencia de plasma. Como esto implica un factor de propagación imaginario puro, se tendría un campo del tipo:

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i(\omega t - i|k|z)} = E_0 e^{i\omega t} e^{-|k|z}$$

Este es un campo que **no se propaga** o **evanescente**. Por lo tanto, en el plasma la frecuencia de plasma es una **frecuencia de corte inferior**, que indica un límite inferior a la propagación de ondas. Por encima de la frecuencia de plasma el material se comporta como un dieléctrico con pérdidas. El ejemplo de aplicación de los plasmas más importante para las comunicaciones es la ionosfera, que se describe brevemente.

- Cuando en un medio la velocidad de las ondas armónicas depende de la frecuencia, y se propaga una señal **no armónica**, cada componente armónica se propaga a

velocidad diferente, y se produce una **distorsión** de la señal, que en casos destruye su contenido de información. Este fenómeno se conoce como **dispersión**. Incluso es difícil decir cuál es la velocidad de la señal en su conjunto. En el caso de señales de **banda angosta** (donde el espectro de Fourier es limitado) es posible definir una velocidad del conjunto, llamada **velocidad de grupo**: $v_g = d\omega/d\beta|_{\beta_0}$

que comparamos con la **velocidad de fase**: $v_f = \omega/\beta$ con que viaja cada componente armónica. Ambas velocidades dependen de la frecuencia. Si $v_g < v_f$ decimos que la dispersión es **normal**, mientras que es **anómala** en los casos donde: $v_g > v_f$. En casos de dispersión normal pequeña la señal puede conservar su integridad, lo que no ocurre para dispersión normal grande o dispersión anómala.

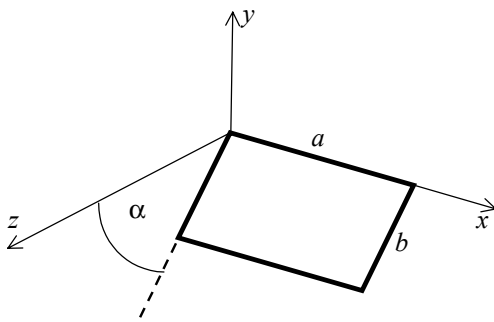
- El Apéndice 6 demuestra que existen relaciones entre la parte real y la parte imaginaria de la permitividad compleja, relaciones llamadas de **Kramers-Krönig**. Estas relaciones son válidas para cualquier función de transferencia en **sistemas causales** y están asociadas a la **transformada de Hilbert**.

PROBLEMAS

- 8.1) Una onda plana monocromática de frecuencia $f = 10 \text{ Mhz}$ se propaga en el vacío según la dirección del eje x . El campo \mathbf{E} tiene la dirección del eje z y su valor pico es $E_0 = 1 \text{ V/m}$. a) Calcular k y λ . b) Escribir la expresión de los campos eléctrico y magnético y el vector de Poynting instantáneos para la onda progresiva. c) Hallar la ecuación de los planos de fase constante. d) Hallar las frecuencias del espectro del vector de Poynting. e) Calcular el valor medio del vector de Poynting. f) Calcular los valores instantáneos y medio de la densidad de energía almacenada en el campo.

$$[\text{Rta: } \mathbf{k} = 0.2 \text{ m}^{-1} \mathbf{x}, \lambda = 30 \text{ m}, \omega_1 = 0, \omega_2 = 2\omega, \langle \mathbf{N} \rangle = 1.32 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2 \mathbf{x}, \langle u \rangle = 4.42 \times 10^{-12} \text{ J/m}^3]$$

- 8.2) Dos ondas monocromáticas de igual amplitud, frecuencia y fase inicial se propagan en el vacío según el eje z . Los planos de polarización forman un ángulo α . Hallar los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} totales, el valor instantáneo y el valor medio del vector de Poynting.
- 8.3) Dos ondas monocromáticas de igual amplitud, frecuencia y fase inicial están polarizadas linealmente según el eje z . Los vectores de propagación están en el plano xy y forman un ángulo α entre ellos. Calcule $\langle \mathbf{N} \rangle$ e indique si la onda resultante es una onda plana. Analice en particular el caso $\alpha = \pi$.



- 8.4) Una onda plana que viaja en el vacío $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$ incide sobre una espira rectangular de resistencia R , situada como indica la figura. Calcular: a) el campo magnético asociado a la onda incidente, b) la velocidad de la onda, c) la corriente inducida en la espira y d) el valor eficaz de la corriente inducida y graficar en función de α . Considerar los casos particulares $b/\lambda = 1/2, 1$.

- 8.5) Una onda plana monocromática de 100 Mhz se propaga en neoprene en la dirección z . Calcular sin utilizar aproximaciones: a) el desfase entre los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} , b) la expresión del vector de Poynting medio y c) la distancia que debe recorrer la onda para que su densidad media de flujo de potencia se reduzca a la mitad. Dato: Para neoprene a 100 Mhz : $\frac{\epsilon'}{\epsilon_0} = 3.4$ $\frac{\epsilon''}{\epsilon'} = 0.16$

$$[\text{Rta: } 4^\circ 33', 1.12 \text{ m}]$$

- 8.6) En un medio dieléctrico con pérdidas cuya permitividad relativa es 2.5 y cuya tangente de pérdidas es 0.001 existe un campo eléctrico armónico de amplitud 250 V/m y frecuencia 1 Ghz . Calcule la conductividad del medio y la potencia media disipada por metro cúbico.

$$[\text{Rta: } 1.39 \times 10^{-4} \text{ S/m}, 4.34 \text{ W/m}^3]$$

- 8.7) Utilizando los datos de la página 8-32 determine la frecuencia a la cual la profundidad de penetración en el agua de mar es de 10 m . Discuta la dificultad que existe para las comunicaciones submarinas, incluso a muy bajas frecuencias.

- 8.8) Una onda plana monocromática de 10 Mhz se propaga en un metal, del cual se conoce el tiempo de relajación $\tau = 10^{-17} \text{ seg}$. Hallar, a) la conductividad del metal y b) la profundidad de penetración a la frecuencia dada.

$$[\text{Rta: } 8.85 \times 10^5 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, 0.17 \text{ mm}]$$

- 8.9) Una onda plana de 10 MHz se propaga en cobre ($\sigma_{\text{Cu}} = 5.88 \times 10^7\text{ I}/\Omega\text{m}$) en la dirección del eje $+x$. Se sabe que $H_y(x=0, t=0) = 0.1\text{ A/m}$. a) Verificar que a la frecuencia dada el material se comporta como un buen conductor. b) Hallar las expresiones de $\mathbf{E}(x, t)$, $\mathbf{H}(x, t)$ y $\mathbf{j}(x, t)$. c) Calcular la longitud de onda y la velocidad de fase.

[Rta: $1.3 \times 10^{-4}\text{ m}$, 1304 m/s]

- 8.10) Una onda electromagnética se propaga en agua de mar en la dirección $+z$ y es tal que en $z = 0$ vale $\mathbf{E} = 100 \cos(107\pi t)\mathbf{x}\text{ V/m}$. Sabiendo que $\epsilon_r = 72$ y $\sigma = 4\text{ S/m}$, determine la constante de atenuación, la constante de fase, la impedancia intrínseca, la profundidad de penetración y la velocidad de fase.

[Rta: 8.89 Np/m , 8.89 rad/m , $\pi e^{j\pi/4}\Omega$, 0.112 m , $3.53 \times 10^6\text{ m/s}$]

- 8.11) La velocidad de grupo de una onda en un cierto medio es proporcional a la frecuencia: $v_g(\omega) = a\omega$, donde a es una constante. Se sabe además que a una frecuencia especial ω_0 , la velocidad de fase iguala a la velocidad de grupo. Se desea saber cuál es la velocidad de fase para cualquier otra frecuencia. ¿Se trata de una dispersión normal o anómala?

- 8.12) Determinar la velocidad de fase y la velocidad de grupo para una onda plana de 100 MHz que se propaga en la ionósfera.