# GUIA 1

**Teoría de la probabilidad – Espacios muestrales – Probabilidad condicional – Independencia**

1. Defina el espacio muestral para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

   *a*) se tiran 3 monedas distintas.
   *b*) se tiran 3 monedas iguales.
   *c*) se tiran 2 dados distinguibles.
   *d*) se tiran 2 dados no distinguibles.
   *e*) se eligen 3 personas de un grupo de 5.

2. Una caja contiene 8 bolillas de luz de las cuales 3 tienen filamentos rotos. Estas se prueban una por una hasta que se encuentra una defectuosa. Describa el espacio muestral.

3. Describa el espacio muestral correspondiente a la elección el azar de un número real comprendido entre 0 y 1/2. Defina dos sucesos asociados a dicho experimento.

4. Se deja caer un dardo sobre una hoja de papel y se marca el lugar donde cayó. Defina el espacio muestral y dos sucesos aleatorios asociados a dicho experimento.

5. Se tiran 2 dados no cargados. Indique la probabilidad de que:

   *a*) no aparezca ningún as.
   *b*) no aparezca ningún as y ningún dos.

   Resp: *a*) 0,6944 *b*) 0,4444

6. Jugando con un dado, se gana si sale 1 ó 2 y se pierde si sale 4, 5 ó 6. Si sale 3, se tira de nuevo. Calcular la probabilidad de ganar.

   Resp: 2/5

7. Una caja contiene 7 bolillas blancas y 3 rojas. Se extraen dos bolillas con reposición. Calcular la probabilidad de que:

   *a*) ambas sean blancas.
   *b*) ambas sean del mismo color.
   *c*) al menos una sea roja.
   *d*) ídem (a), (b) y (c), pero considerando extracciones sin reposición.

   Resp: *a*) 0,49 *b*) 0,58 *c*) 0,51 *d*) 7/15; 8/15; 8/15

8. Una caja $C_1$ contiene 3 bolillas negras y 5 blancas; otra caja $C_2$ tiene una negra y 9 blancas. Se toma la caja $C_1$, se extrae una bolilla y, sin mirarla, se introduce en $C_2$; luego se extrae una bolilla al azar de $C_2$.

   *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que esta última sea negra?
   *b*) Si ésta es negra, ¿cuál es la probabilidad de haber pasado una blanca de $C_1$ a $C_2$?

   Resp: *a*) 1/8 *b*) 5/11

9. Sacando cartas de un mazo español de 40, calcular la probabilidad de que el primer basto aparezca a partir de la tercera extracción, sabiendo que en las dos primeras salió por lo menos un oro.

   Resp: 49/69

10. Una caja $C_1$ contiene 3 bolillas blancas y 7 rojas. Otra caja $C_2$ tiene 12 blancas y 8 rojas. Se elige una caja al azar y se extrae una bolilla que resulta ser blanca; esta bolilla se reintegra a la caja y se vuelve a extraer una bolilla de la misma caja. ¿Cuál es la probabilidad de que esta última bolilla sea blanca? (Cuidado, el problema no es tan fácil como parece).

    Resp: 1/2

11. Indique la probabilidad de obtener los siguientes resultados en el primer tiro de un juego de "generala":

    *a*) Generala servida.
    *b*) Poker servido.
    *c*) Escalera servida.
    *d*) 18 al 6.

    Resp: *a*) 1/1296 *b*) 25/1296 *c*) 5/162 *d*) 125/3888

12. Se carga un dado de manera que la probabilidad de cada número es proporcional a él. Calcular la probabilidad de obtener un 2 dado que se obtuvo un número par.

    Resp: 1/6

13. En una universidad se obtuvo la siguiente información: el 32 % de las chicas tienen cabello rubio, ojos azules o ambas cosas; el 20 % tiene ojos azules; y el 17 % tiene cabello rubio. ¿Qué porcentaje de chicas tiene:

    *a*) cabello rubio y ojos azules?
    *b*) solo cabello rubio?
    *c*) solo ojos azules?
    *d*) ninguna de las dos características mencionadas?

    Resp: *a*) 5 % *b*) 12 % *c*) 15 % *d*) 68 %

14. En un colegio secundario el 25 % de los estudiantes fue aplazado en Matemática, el 10 % en Química y el 5 % fue aplazado en ambas materias. Calcular:

    *a*) De los aplazados en Química, ¿qué porcentaje aplazó Matemática?
    *b*) De los aplazados en Matemática, ¿qué porcentaje aplazó Química?
    *c*) ¿Qué porcentaje aplazó Matemática o Química?

    Resp: *a*) 50 % *b*) 20 % *c*) 30 %

15. $A$ y $B$ se baten a duelo. En cada disparo, la probabilidad de acierto para $A$ es 0,2 y para $B$ es 0,3. Dispara primero $A$ y si no acierta, se arroja una moneda; si sale cara dispara de nuevo $A$; de lo contrario dispara $B$. Si después de esto viven aún $A$ y $B$, tiene $B$ un último disparo. Calcular las probabilidades de que gane $A$, gane $B$ y ambos salgan ilesos.

    Resp: 0,28; 0,3; 0,42

16. El control de calidad para cierto tipo de motor incluye dos pruebas: $A$ (ensayo de sobrecarga) y $B$ (ensayo de consumo). El 5 % falla en la prueba $A$, el 6 % en la prueba $B$ y el 90 % en ninguna.

    *a*) Indique si las fallas en las pruebas son sucesos estadísticamente independientes, justificando numéricamente la respuesta.
    *b*) De los que fallan en $A$, ¿qué porcentaje falla en $B$?

Resp: *a*) No *b*) 5,26 %

17. Una nave no tripulada se dirige al planeta Venus y tiene una probabilidad 0,7 de descender satisfactoriamente. A su vez, el sistema monitor da la información correcta con probabilidad 0,9 (sea o no satisfactorio el descenso). En la prueba, el monitor informó que el descenso era correcto. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente lo haya sido?

    Resp: 0,9545

18. En una planta manufacturera se tiene un lote de piezas de rechazo que se ha decidido incorporar "honestamente" a la producción estándar, a razón de 5 en cada partida de 50, de modo que haya a lo sumo 45 buenas, pero puede haber menos porque el proceso estándar trabaja con un 5 % defectuoso. El comprador selecciona al azar dos unidades de cada partida y acepta la misma si ambas son buenas, de lo contrario la rechaza. Determinar el porcentaje de partidas rechazadas.

    Resp: 27,06 %

19. En una ciudad el 45 % de la población lee el periódico $A$, el 50 % lee el $B$ y el 45 % lee el $C$. De las personas que leen el $B$, el 50 % no lee el $A$. Se sabe que la probabilidad de que una persona que lee el $C$ lea el $A$ es 1/3, y que si no lee ni el $A$ ni el C, la probabilidad de que lea el $B$ es 0,6. Además hay un 5 % de personas que lee los tres periódicos.

    *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar de dicha ciudad lea algún periódico?

    *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo un periódico?

    *c*) Si lee el $C$, ¿cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los otros dos periódicos?

    Resp: *a*) 0,9 *b*) 0,45 *c*) 4/9

20. Una ciudad de 1 millón de habitantes se considera dividida en dos zonas: la 1, con 700.000 y la 2 con 300.000. Ante el peligro de una epidemia, se decide vacunar al 80 % de la población; en la zona 1 se utiliza una vacuna con un 92 % de efectividad y en la zona 2, una con un 84 % de efectividad. Si la vacuna no inmuniza a la persona, hay una probabilidad 0,12 de contraer la enfermedad, lo mismo que si la persona no es vacunada.

    *a*) ¿Cuántas personas enfermarán si sobreviene la epidemia?

    *b*) Si una persona se enferma, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada en la zona 2?

    Resp: *a*) aprox. 34.000 *b*) 0,136

21. Una instalación funciona cuando lo hacen el motor y alguna de sus dos bombas. La probabilidad de que funcione el motor es 0,8; de que funcione la bomba $B_1$ es 0,6; y de que funcione la bomba $B_2$ es 0,4. La probabilidad de que funcione la bomba $B_2$ ó no lo haga la $B_1$ es 0,5. La probabilidad de que funcione el motor si de ambas bombas sólo funciona la $B_1$, es 0,9. Además, si funciona la bomba $B_2$, el motor lo hace con probabilidad 0,75.

    *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que la instalación funcione?

    *b*) Si funciona alguna de las componentes de la instalación, ¿cuál es la probabilidad de que funcione la bomba $B_2$, pero no el motor?

    *c*) Indique, justificando el procedimiento, si los funcionamientos de la bomba $B_1$ y $B_2$ son estadísticamente independientes.

    Resp: *a*) 0,75 *b*) 0,1053 *c*) No

22. Se ha nominado a tres miembros de un club privado para ocupar la presidencia del mismo. La probabilidad de que se elija al seor $X$ es de 0,3; la de que se haga lo propio con el seor $Y$ es 0,5 y la de que se elija a la seora $Z$ es de 0,2. En caso de que se elija al seor $X$, la probabilidad de que la cuota de ingreso se incremente es de 0,8; si se elige al seor $Y$ o a la seora $Z$, las correspondientes probabilidades de que se incremente la cuota son 0,1 y 0,4.

    *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que haya un incremento en la cuota del ingreso?

    *b*) Si una persona retrasa por varias semanas su decisión de entrar al club por encontrar que la cuota de ingreso ha aumentado, ¿cuál es la probabilidad de que se haya elegido a la seora $Z$ como presidenta del club?

    Resp: *a*) 0,37 *b*) 0,2162

23. Una empresa arma computadoras y consta de tres plantas armadoras: $A$, $B$ y $C$, que producen el 15 %, 35 % y 50 % del total respectivamente. Se sabe que la probabilidad de que no funcione una computadora es del 3 %, 2 % y 1 % según sea armada por la planta $A$, $B$ o $C$ respectivamente.

    *a*) Un cliente de dicha empresa decide comprar una computadora al azar y elige una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que funcione?

    *b*) Si dicho cliente elige una computadora y observa que funciona, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido armada por la planta B?

    Resp: *a*) 0,9835 *b*) 0,3488

24. Se han enviado dos vendedores $A$ y $B$ a dos distintos clientes para ofrecer un producto y se sabe que $P(A$ no tenga éxito$) = 0{,}2$; $P($B *solo* no tenga éxito$) = 0{,}15$ y $P(A$ y $B$ no tengan éxito$) = 0{,}16$. Calcular:

    *a*) $P($uno al menos tenga éxito$)$

    *b*) $P(A$ tenga éxito / $B$ tuvo éxito$)$

    *c*) $P(A$ *solo* no tenga éxito$)$

    Resp: *a*) 0,84 *b*) 0,942 *c*) 0,04

25. Si $P(A) = P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$; calcular $P(\overline{A})$.

    Resp: 0,8571

26. Dados $P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/3$ y $P(A \cap B) = 1/4$; hallar $P(\overline{B})$.

    Resp: 3/8

27. Si $P(A \,/\, B) = 0{,}4$ y $P(\overline{A} \cup B) = P(A \cup \overline{B}) = 0{,}9$:

    *a*) Indique si $A$ y $B$ son sucesos independientes.

    *b*) Calcule $P(A \cup B)$ y $P(B \,/\, A)$.

    Resp: *a*) No *b*) $P(A \cup B) = 4/15$; $P(B \,/\, A) = 2/5$

28. Probar que si $A$ y $B$ son independientes, también lo son $\overline{A}$ y $\overline{B}$ entre sí, $A$ y $\overline{B}$ entre sí, $\overline{A}$ y $B$ entre sí.

29. Sean $A$ y $B$ dos sucesos independientes tales que la probabilidad de que ocurran ambos es 1/6 y la de que no ocurra ninguno es 1/3. Determine $P(A)$ y $P(B)$.

    Resp: $P(A) = 1/3$ y $P(B) = 1/2$ ó $P(A) = 1/2$ y $P(B) = 1/3$

30. Sean los sucesos $A$, $B$ y $C$. La probabilidad de que ocurra sólo el suceso $A$ es 1/4; de que ocurra sólo el suceso $B$ es 1/4; de que ocurra sólo el suceso $C$ es 1/4; y la probabilidad de que ocurran los tres sucesos simultáneamente también es igual a 1/4. Determine si los sucesos $A$, $B$ y $C$ son estadísticamente independientes.

    Resp: No

# GUIA 2

**Variables aleatorias – Función de probabilidad y densidad de probabilidad – Función de distribución de probabilidad – Esperanza – Media y variancia – Cambio de vaiable – Truncamiento – Mezcla**

1. Clasifique en discretas o continuas las siguientes variables aleatorias:

   *a*) Cantidad de llamadas telefónicas que llegan a un conmutador en un lapso de 10 minutos.

   *b*) Temperatura diaria de una ciudad.

   *c*) Duración promedio de un tubo de TV.

   *d*) Longitud de tornillos fabricados por una máquina.

   *e*) Estudiantes inscriptos en una universidad al comienzo de un año.

   *f*) Estado civil de un individuo de una ciudad.

   *g*) Suma del valor obtenido al arrojar 2 dados.

2. Halle la función de probabilidad y de distribución de probabilidad de las siguientes variables aleatorias:

   *a*) Cantidad de ases obtenidos al tirar un dado.

   *b*) Cantidad de caras obtenidas al arrojar dos monedas.

   *c*) Cantidad de espadas obtenidas al extraer 4 cartas de un mazo de barajas españolas (40 cartas).

   *d*) Suma de puntos obtenidos al tirar 2 dados.

3. Una variable discreta $r$ asume los valores 0, 1, 2 y 3 con probabilidades $a/(2^r)$. Calcular:

   *a*) $a$.

   *b*) La media y el desvío estándar.

   *c*) La función distribución.

   Resp: *a*) 8/15 *b*) 11/15; 0,9286 *c*) $\frac{8}{15}(2 - \frac{1}{2^r})$

4. El contenido de bolillas rojas de la caja $C_1$ se ha formado como sigue. Se arrojó un dado y se colocaron tantas como indicó el dado; luego se extrajeron dos bolillas de la caja $C_2$ que contenía 3 blancas y 7 rojas y se introdujeron en la caja $C_1$. Obtener la función de probabilidad, la media y la variancia del número de bolillas rojas que quedaron finalmente en cada una de las cajas.

   Resp: Caja $C_1$: $P(1) = 1/90$; $P(2) = 8/90$; $P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 15/90$; $P(7) = 14/90$; $P(8) = 7/90$
   Caja $C_2$: $P(5) = P(6) = 7/15$; $P(7) = 1/15$

5. En una estación de servicio, la distribución de clientes que llegan cada 15 min. tiene la siguiente función de probabilidad: $P(0) = 0{,}2$; $P(1) = 0{,}4$; $P(2) = 0{,}3$; $P(3) = 0{,}1$. Además, la probabilidad de que un cliente pague con tarjeta de crédito es 1/4. Obtener la distribución de los clientes que en el lapso de 15 min. pagan con tarjeta de crédito.

   Resp: $P(0) = 0{,}7109$; $P(1) = 0{,}2547$; $P(2) = 0{,}0328$; $P(3) = 0{,}0016$

6. Determine si las siguientes funciones son de densidad de probabilidad y en caso afirmativo halle la función de distribución para cada caso:

   *a*) $f(x) = 1$ para $0 \leq x < 1$; $f(x) = 0\ \forall$ otro $x$

*b*) $f(x) = 1/2$ para $2 \leq x < 4$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$

*c*) $f(x) = 1/6$ para $1 \leq x < 2$; $f(x) = 1/2$ para $2 \leq x < 3$; $f(x) = 1/3$ para $3 \leq x < 4$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$

*d*) $f(x) = x/6$ para $0 \leq x < 3$; $f(x) = (4-x)/2$ para $3 \leq x < 4$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$

*e*) $f(x) = 1 - |1-x|$ para $0 \leq x < 2$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$

*f*) $f(x) = (3/2)(x-1)$ para $1 \leq x < 2$; $f(x) = (1/8)(4-x)$ para $2 \leq x < 4$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$

*g*) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ x+2 & -2 \leq x < -1{,}5 \\ -x-1 & -1{,}5 \leq x < -1 \\ 0 & -1 \leq x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 5/12 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$

Resp: Las funciones de distribución de probabilidad son:

*a*) $F(x) = 0$ para $x < 0$; $x$ para $0 \leq x < 1$; $1$ para $x \geq 1$

*b*) $F(x) = 0$ para $x < 2$; $(x-2)/2$ para $2 \leq x < 4$; $1$ para $x \geq 4$

*c*) $F(x) = 0$ para $x < 1$; $(x-1)/6$ para $1 \leq x < 2$; $(3x-5)/6$ para $2 \leq x < 3$; $(x-1)/3$ para $3 \leq x < 4$; $1$ para $x \geq 4$

*d*) $F(x) = 0$ para $x < 0$; $x^2/12$ para $0 \leq x < 3$; $1 - (4-x)^2/4$ para $3 \leq x < 4$; $1$ para $x \geq 4$

*e*) $F(x) = 0$ para $x < 0$; $x^2/2$ para $0 \leq x < 1$; $1 - (2-x)^2/2$ para $1 \leq x < 2$; $1$ para $x \geq 2$

*f*) $F(x) = 0$ para $x < 1$; $(3/4)(x-1)^2$ para $1 \leq x < 2$; $1 - (4-x)^2/16$ para $2 \leq x < 4$; $1$ para $x \geq 4$

*g*) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ (x+2)^2/2 & -2 \leq x < -1{,}5 \\ (-2x^2-4x-1)/4 & -1{,}5 \leq x < -1 \\ 1/4 & -1 \leq x < 0 \\ (3+4x^3)/12 & 0 \leq x < 1 \\ (5x+2)/12 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$

7. Halle la media y la variancia de las variables aleatorias del ejercicio anterior.

   Resp: Medias: *a*) 1/2 *b*) 3 *c*) 2,67 *d*) 2,33 *e*) 1 *f*) 2,67 *g*) 1/2

8. Una variable aleatoria tiene función de densidad $f(x) = A\,x^2 + 1/2$ para $0 < x < 1$ ($f(x) = 0$ en cualquier otro caso).

   *a*) Calcular la constante $A$.

   *b*) Hallar la función de distribución $F(x)$.

   *c*) Hallar la probabilidad de que un valor de $x$ elegido al azar sea menor que 0,5.

   *d*) Si se sabe que un valor de $x$ elegido al azar fue mayor que 0,5, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor que 0,75?

   Resp: *a*) 3/2 *b*) $F(x) = x^3/2 + x/2$ *c*) 5/16 *d*) 53/88

9. Una variable aleatoria tiene función de densidad $f(x) = 1{,}2\,x$ para $0 < x < 1$ y $f(x) = 3\,m - m\,x$ para $1 < x < 3$.

*a*) Calcular $m$.

*b*) Hallar la media y la variancia de $x$.

*c*) $P(x < 2{,}5 \,/\, x > 2)$

Resp: *a*) 0,2 *b*) 16/15; 0,3622 *c*) 0,75

10. Hipotéticamente, la duración en horas de ciertas lámparas es una variable aleatoria cuya función de densidad es $f(x) = 30/x^2$ para $x > 30$ y $f(x) = 0$ en cualquier otro caso[1].

    *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que una lámpara elegida al azar dure más de 40 horas?

    *b*) Si hay una lámpara que funciona hace más de 35 horas, ¿cuál es la probabilidad de que funcione 10 horas más?

    *c*) Si se eligen 20 lámparas al azar, ¿cuál es la probabilidad de encontrar menos de 12 que duren más de 40 horas?

    Resp: *a*) 0,75 *b*) 0,778 *c*) 0,0409

11. El porcentaje de alcohol de un cierto compuesto se puede considerar una variable aleatoria con la siguiente función: $f(x) = k(100 - x)$ para $0 \leq x < 100$; $f(x) = 0 \;\forall$ otro $x$.

    *a*) Halle $k$ para que $f(x)$ sea función de densidad de probabilidad y grafique $f(x)$.

    *b*) Halle la función de distribución de probabilidad $F(x)$.

    *c*) ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje de alcohol en el compuesto sea superior a 30?

    *d*) ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje de alcohol en el compuesto sea inferior a 70?

    *e*) ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje de alcohol en el compuesto esté comprendido entre 30 y 70?

    *f*) Si el porcentaje de alcohol es inferior a 70, ¿cuál es la probabilidad de que supere 30?

    *g*) Si el porcentaje de alcohol es superior a 30, ¿cuál es la probabilidad de que supere 70?

    *h*) Sean los sucesos $A$: porcentaje superior a 30; $B$: porcentaje inferior a 70; determine si $A$ y $B$ son independientes.

    *i*) Halle el porcentaje medio de alcohol en el compuesto.

    Resp: *a*) $k = 1/5000$ *b*) $F(x) = 1 - (100 - x)^2/10000$ para $0 \leq x < 100$ *c*) 0,49 *d*) 0,91 *e*) 0,4 *f*) 0,4396 *g*) 0,1837 *h*) No *i*) 33,33

12. El tiempo en minutos en que una señorita habla por teléfono es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad de probabilidad: $f(x) = k\,e^{-x/5}$ para $x > 0$; $f(x) = 0$ para $x \leq 0$.

    *a*) Halle $k$ para que $f(x)$ sea función de densidad.

    *b*) Calcular $F(x)$.

    *c*) Halle la probabilidad de que hable más de 2 minutos.

    *d*) Halle la probabilidad de que hable a lo sumo 3 minutos.

    *e*) Halle la probabilidad de que hable entre 2 y 3 minutos.

[1] Nota para éste y los siguientes ejercicios: Las funciones densidad utilizadas sirven como modelos simples, adecuados para el entendimiento de la materia, pero en ningún modo representan la realidad. Más adelante se verán las funciones más utilizadas para estos tipos de variables.

*f*) Halle el tiempo medio en que la señorita habla por teléfono.

Resp: *a*) $k = 1/5$ *b*) $F(x) = 1 - e^{-x/5}$ para $x > 0$ *c*) 0,6703 *d*) 0,4512 *e*) 0,1215 *f*) 5

13. La duración en horas de una lámpara eléctrica es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad de probabilidad: $f(x) = (1/2000)e^{-x/2000}$ para $x > 0$; $f(x) = 0$ para $x \leq 0$.

    *a*) Halle y grafique la función de distribución.

    *b*) Calcule la probabilidad de que una lámpara dure menos de 1500 horas si se sabe que en la hora 1000 estaba funcionando.

    Resp: *a*) $F(x) = 1 - e^{-x/2000}$ para $x > 0$ *b*) 0,2212

14. Sea la variable aleatoria $X$ con: $P(x) = 1/4$ para $x = -1$; $P(x) = 1/2$ para $x = 0$; $P(x) = 1/4$ para $x = 1$; $P(x) = 0$ $\forall$ otro $x$.

    *a*) Halle la función de probabilidad de $Y = |X|$.

    *b*) Halle la media y la variancia de $Y$.

    Resp: *a*) $P(y) = 1/2$ para $y = 0$; $P(y) = 1/2$ para $y = 1$ *b*) 1/2; 1/4

15. Juan tira un dado cargado cuya función de probabilidad es: $P(x) = k\,x$ para $x = 1; 2; \ldots; 6$; $P(x) = 0$ $\forall$ otro $x$. Juan gana en dólares el cuadrado del número que obtiene al tirar el dado.

    *a*) ¿Cuál es la función de probabilidad de la ganancia que obtiene Juan?

    *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane por lo menos 9 dólares?

    *c*) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane más de 9 dólares?

    *d*) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane a lo sumo 9 dólares?

    *e*) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane menos de 9 dólares?

    *f*) ¿Cuál es la media de la ganancia de Juan?

    Resp: *a*) $P(y) = \sqrt{y}/21$ para $y = 1; 4; 9; 16; 25; 36$; $P(y) = 0$ $\forall$ otro $y$ *b*) 6/7 *c*) 5/7 *d*) 2/7 *e*) 1/7 *f*) 21

16. La variable $x$ tiene densidad $f(x) = x/2$ para $0 < x < 2$. Hallar la densidad y la media de $y = x^3$.

    Resp: $f(y) = y^{-1/3}/6$ para $0 < y < 8$; $E(y) = 3{,}2$

17. Una variable aleatoria $x$ está distribuida uniformemente en el intervalo $(-2; 2)$. Hallar la densidad y la media de $y = x^2$.

    Resp: $f(y) = (1/4)y^{-1/2}$ para $0 < y < 4$; $E(y) = 4/3$

18. Sea la varieble $x$ tal que $f(x) = x + 1$ para $-1 < x < 0$ y $f(x) = -x + 1$ para $0 < x < 1$. Hallar la densidad de la variable $y = x^2$.

    Resp: $f(y) = y^{-1/2} - 1$ para $0 < y < 1$

19. La variable $x$ tiene funcin densidad $f(x) = x + 1$ para $-1 < x < 0$ y $f(x) = -x/4 + 1/2$ para $0 < x < 2$. Hallar la densidad de la variable $y = x^2$.

    Resp: $f(y) = (3/4)y^{-1/2} - 5/8$ para $0 < y < 1$; $(1/4)y^{-1/2} - 1/8$ para $1 < y < 4$

20. Sea la v.a. $X$ continua con: $f(x) = 1/5$ para $-2 \leq x < 3$; $f(x) = 0$ $\forall$ otro $x$. Si $y = 4\,e^x$ para $x \leq 0$; $y = (x-2)^2$ para $x > 0$, halle $f(y)$ y $F(y)$.

21. Se toma un alambre de un metro de longitud y se elige un punto al azar del mismo. Luego se dobla el alambre por el punto elegido formando un ángulo recto. Uniendo los extremos del alambre se construye un triángulo rectángulo. Calcule la función de densidad de probabilidad del área del triángulo.

22. Sea una botella de 10 cc. La máquina envasadora envía una cantidad de líquido que es una v.a. con la siguiente función de densidad de probabilidad: $f(x) = k\,(x - 20)$ para $0 \leq x < 20$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$. Halle:

    *a*) La función de densidad de probabilidad del líquido en la botella.

    *b*) Idem del líquido rebalsado.

    *c*) La cantidad media de líquido en la botella.

    *d*) La variancia del líquido rebalsado.

23. Las aportaciones de agua que en un año llegan a un embalse procedente de su cuenca alimentadora, constituyen un volumen $X$ aleatorio que se distribuye según la siguiente función de densidad de probabilidad: $f(x) = (x - 150)/125^2$ para $150 \leq x < 275$; $f(x) = (400 - x)/125^2$ para $275 \leq x < 400$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$ (en $Hm^3$). Si la capacidad del embalse es de $170Hm^3$, el consumo de la ciudad que abastece es de $180Hm^3$, si el agua que llega primero se destina al consumo de la ciudad, y si se supone que al comienzo de un cierto año el embalse está vacío, se pide:

    *a*) Las funciones de densidad de probabilidad y de distribución de probabilidad del agua embalsada al cabo de un año.

    *b*) La probabilidad de que al cabo de un año el embalse esté vacío, así como la de que esté lleno.

    *c*) La media y variancia del agua embalsada al cabo de un año.

    *d*) Idem, del agua suministrada a la ciudad.

24. En una circunferencia tangente a los ejes coordenados, de centro $(R; R)$ y radio $R$ se elige al azar una cuerda en las siguientes formas:

    *a*) De las rectas paralelas al eje de abscisas se elige al azar la ordenada al origen entre $0$ y $2R$.

    *b*) De un haz de rectas con centro en el origen se elige al azar el argumento entre $0$ y $\pi/2$.

    Calcular en ambos casos la probabilidad de que la cuerda sea menor que $a$ con $0 < a < 2R$.

    Resp: *a*) $1 - \sqrt{1 - (a/2R)^2}$ *b*) $(2/\pi)\arcsin[(a/2R)^2]$

25. El diámetro de las lentejas es una v.a. $X$ con $f(x) = a\,(x - 3)^2$ para $1 \leq x < 5$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$ (en mm). Calcule:

    *a*) El valor de $a$,

    *b*) La probabilidad de que el diámetro de una lenteja supere los 4 mm, si se sabe que su diámetro está comprendido entre 2 y 5 mm.

    *c*) La función de distribución del diámetro de las lentejas cuyo diámetro es superior a 4 mm ó inferior a 2 mm.

26. El diámetro de las arandelas fabricadas por una máquina es una v.a. $X$ cuya función de densidad de probabilidad es $f(x) = x - 1$ para $1 \leq x < 2$; $f(x) = 3 - x$ para $2 \leq x < 3$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$ (en mm). Un sistema de control descarta las arandelas de diámetro superior a 2,5 mm y las arandelas de diámetro inferior a 1,5 mm. Halle la función de densidad y de distribución de probabilidad de las arandelas no descartadas.

27. Dos tornos cortan varillas cuyas longitudes (en metros) tienen las respectivas funciones de densidad de probabilidad: $f_1(x) = 2x/5$ para $2 \leq x < 3$; $f_1(x) = 0 \; \forall$ otro $x$. $f_2(x) = -3(x-1)(x-3)/4$ para $1 \leq x < 3$; $f_2(x) = 0 \; \forall$ otro $x$. El torno 1 corta el 60 % de las varillas de la producción total y el resto lo hace el torno 2. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad de la longitud de las varillas de la producción total? ¿Cuál es la media y la variancia de la longitud de las varillas de la producción total?

28. Un viajante tiene tres alternativas de viaje a su trabajo: $A$, $B$ y $C$, y sabe que los porcentajes de veces que usa estos medios son respectivamente: 50 %, 30 % y 20 %. El tiempo de viaje de cada medio de transporte es una v.a. $T$ (en horas) con: $f_A(t) = t$ para $0 \leq t \leq t_{max(A)}$; $f_B(t) = t$ para $0 \leq t \leq t_{max(B)}$; $f_C(t) = t$ para $0 \leq t \leq t_{max(C)}$. Se sabe que ha transcurrido media hora y aun no ha llegado al trabajo. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue por el medio de transporte $A$?

29. El diámetro de las ciruelas tiene una función de densidad de probabilidad: $f(x) = x/4$ para $0 \leq x < 2$; $f(x) = (4-x)/4$ para $2 \leq x < 4$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$ (en cm). Estas son clasificadas pasando por dos tamices tales que:

| | | |
|---|---|---|
| Calidad I | son | $x < 1$ |
| Calidad II | son | $1 \leq x \leq 3$ |
| Calidad III | son | $x > 3$ |

Pero, por cuestiones de forma, el 10 % de las que deberían atravesar el tamiz, no lo hace. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad de las ciruelas clasificadas como Calidad III?

30. El diámetro (en cm) de los huevos de una granja es una v.a. $X$ con la siguiente función de densidad de probabilidad: $f(x) = x - 3$ para $3 \leq x < 4$; $f(x) = 5 - x$ para $4 \leq x < 5$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$. Los huevos se clasifican en grandes si tienen un diámetro superior a 4,5 cm, y en chicos en caso contrario. Una máquina de la granja está diseñada para separar y colocar en una bandeja los huevos grandes. Por cuestiones de forma, un 10 % de los que deberían pasar (o sea los chicos), no lo hacen (quedan en la bandeja). Halle la función de densidad de probabilidad de los huevos que quedan en la bandeja.

31. Una empresa de fletes cobra a cada cliente de acuerdo a los kilómetros recorridos en cada viaje. Cobra 10 dólares por un viaje que insume menos de 10 km; 20 dólares por un viaje que insume entre 10 y 20 km, y para un viaje que supera los 20 km cobra 2 dólares el km menos 20 dólares. La cantidad de kilómetros recorridos en cada viaje es una v.a. $X$ con la siguiente función de densidad de probabilidad: $f(x) = x/375$ para $0 \leq x < 25$; $f(x) = (30-x)/75$ para $25 \leq x < 30$; $f(x) = 0 \; \forall$ otro $x$ (en km). La empresa tiene dos choferes. El primero se encarga de los viajes que insumen entre 10 y 20 km y el segundo de los restantes.

    *a*) ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad de la cantidad de dólares cobrados a cada cliente por cada viaje realizado?

    *b*) ¿Cuál es el kilometraje esperado para un viaje cualquiera realizado por el primer chofer?

    *c*) ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad de la cantidad de kilómetros recorridos por el segundo chofer en un viaje?

    *d*) Halle la variancia de la cantidad de dólares cobrados por un viaje.

32. Una máquina produce una pieza cuyo peso (en gramos) tiene una función de densidad de probabilidad dada por: $f(x) = x/32$ para $0 \leq x < 8$; $f(x) = 0$ en otros casos. Se descartan las piezas de peso menos que 2 y las de peso mayor que 4 se cortan en dos piezas de igual peso (que son reintegradas a la población). Halle la función de densidad de probabilidad del peso de las piezas resultantes.

# GUIA 3

**Espacios muestrales bidimensionales – Función conjunta – Funciones marginales y condicionales – Medias condicionales (líneas de regresión) – Covariancia y coeficiente de correlación – Independencia de variables – Cambio de variable – Casos particulares: suma, resta, producto, cociente y extremos de variables aleatorias**

1. Se tiran simultáneamente un dado y dos monedas. Sean $X$: cantidad de caras obtenidas al tirar las dos monedas, e $Y$: cantidad de ases obtenidos al tirar el dado. Suponer que $X$ e $Y$ son independientes.

   *a*) Hallar la distribución de probabilidad conjunta, las distribuciones de probabilidad marginales y las distribución de probabilidad condicional de $X$ dado $Y$.

   *b*) Hallar la distribución de probabilidad de la suma $S = X + Y$.

   *c*) Verificar que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

2. Se tiran un dado y dos monedas. Considere las variables $X$ e $Y$ del ejercicio anterior. Suponga que la distribución de probabilidad conjunta es:

| | | $y$ | |
|---|---|---|---|
| | | **0** | **1** |
| | **0** | 0,2 | 0 |
| $x$ | **1** | 0,2 | 0,2 |
| | **2** | 0 | 0,4 |

   *a*) Hallar las distribuciones de probabilidad marginales y todas las condicionales.

   *b*) ¿$X$ e $Y$ son independientes?

   *c*) ¿Cuál es el grado de correlación lineal de las variables?

   *d*) Si se obtiene por lo menos una cara al arrojar las monedas y el dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un as?

   *e*) Si se obtiene un as, ¿cuál es la probabilidad de obtener a lo sumo una cara?

   *f*) ¿Cuál es la distribución de probabilidad de la suma $S = X + Y$?

   *g*) Hallar de dos formas diferentes la media de la suma $S$ y su variancia.

   *h*) Suponga un juego en el que en un solo tiro de dado y dos monedas se obtiene una ganancia $G$ dada por la siguiente fórmula: $G = 2\,X + 3\,Y$. Hallar la ganancia media y su variancia resolviendo de dos formas distintas.

3. De un cajón de frutas que contiene 3 naranjas, 2 manzanas y 3 bananas, se seleccionan al azar 4 frutas. Si $X$ es el número de naranjas obtenidas e $Y$ el número de manzanas obtenidas:

   *a*) Hallar la distribución de probabilidad conjunta y las distribuciones de probabilidad marginales.

   *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad total de naranjas y manzanas obtenidas no supere a 2?

4. Dada la función de densidad conjunta $f(x, y) = a(2 - x - 2y)$ para $0 < x < 2$; $0 < y < 1 - x/2$, calcular:

   *a*) La constante $a$.

   *b*) $P(y > 0{,}25 \,/\, x = 1)$

   *c*) $P(y > 0{,}25 \,/\, x < 1)$

Resp: *a*) 1,5 *b*) 0,25 *c*) 13/28

5. Una vinatería cuenta con instalaciones para atender a clientes que llegan en automóvil y a quienes llegan caminando. En un día seleccionado al azar, sean $X$ e $Y$, respectivamente, los períodos de tiempo que se utilizan para cada caso y suponga que la función de densidad conjunta es: $f(x, y) = 2/3(x + 2y)$ para $0 \leq x \leq 1$ ; $0 \leq y \leq 1$; $f(x, y) = 0\ \forall$ otro $(x, y)$.

   *a*) Hallar las distribuciones de probabilidad marginales.

   *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que las instalaciones para quienes lleguen en automóvil se utilicen menos de la mitad del tiempo?

6. Sea $x$ un número al azar en el intervalo $(0; 1)$ e $y$ un número tomado al azar en el intervalo $(x; 1)$. Hallar la densidad incondicional de $y$.

   Resp: $f(y) = -\ln(1 - y)$ para $0 < y < 1$

7. Se elige al azar un punto $P$ en el intervalo $(3; 8)$ del eje $x$ y un punto $Q$ en el intervalo $(2; 5)$ del eje $y$. Calcular la probabilidad de que la longitud del segmento $\overline{PQ}$ sea mayor que 5.

   Resp: 0,8757

8. $X$ e $Y$ representan las duraciones, en años, de dos componentes en un sistema electrónico cuya función de densidad de probabilidad conjunta es: $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ para $x > 0$; $y > 0$; $f(x, y) = 0\ \forall$ otro $(x, y)$. Encontrar la $P(0 < X < 1\ / Y = 2)$

9. La cantidad de querosene, en miles de litros, en un tanque al principio del día es una variable aleatoria $Y$, de la cual una cantidad aleatoria $X$ se vende durante el día. Suponga que el tanque no se rellena durante el día, de tal forma que $X \leq Y$, y suponga que la función de densidad conjunta es $f(x, y) = 2$ para $0 < x < y$; $0 < y < 1$; $f(x, y) = 0\ \forall$ otro $(x, y)$.

   *a*) Determinar si $X$ e $Y$ son independientes.

   *b*) Hallar la $P(1/4 < X < 1/2\ / Y = 3/4)$.

   *c*) Hallar la cantidad media de querosene que queda al final del día.

10. Dada la función de densidad conjunta $f(x, y) = 24x^2y(1 - x)$ para $0 < x < 1$; $0 < y < 1$:

    *a*) Demostrar que las variables $x$ e $y$ son estadísticamente independientes.

    *b*) Calcular la función de regresión de $y$ dado $x$.

    Resp: *b*) $E(y\,/\,x) = E(y) = 2/3$

11. Dada la función de densidad conjunta $f(x, y) = a\,x\,y$ para $y^2 < x < 1$; $0 < y < 1$, hallar:

    *a*) $P(x + y < 1)$

    *b*) $P(y < 0{,}5\,/\,x = 0{,}4)$

    *c*) La variancia condicional de $y$ dado $x$ y compararla con la variancia incondicional de $y$.

    *d*) El coeficiente de correlación entre $x$ e $y$.

    Resp: *a*) 0,18 *b*) 0,625 *c*) $\sigma^2_{y\,/\,x} = x/18$; $\sigma^2_y = 0{,}0485$ *d*) 0,3723

12. Dada la función de densidad conjunta $f(x, y) = a\,x$ para $0 < x < 1$; $x^2 < y < 1$, hallar:

    *a*) La densidad condicional de $y$ dado $x$.

    *b*) La variancia condicional de $y$ dado $x$.

*c*) $P(y > x)$

Resp: *a*) $f(y\,/\,x) = 1/(1 - x^2)$ para $x^2 < y < 1$ *b*) $\sigma^2_{y\,/\,x} = (1 - x^2)^2/12$ *c*) 2/3

13. Dada la función de densidad conjunta $f(x, y) = 0{,}25 + 0{,}25\,x^3 y - 0{,}25\,x\,y^3$ para $-1 < x < 1$; $-1 < y < 1$, probar que el coeficiente de correlación es nulo y sin embargo hay dependencia.

14. Dada la función de densidad conjunta $f(x, y) = x + y$ para $0 < x < 1$; $0 < y < 1$, calcular:

    *a*) $P(y > x)$

    *b*) $P(x\,y < 0{,}5)$

    *c*) El coeficiente de correlación entre $x$ e $y$.

    Resp: *a*) 0,5 *b*) 0,375 *c*) $-0{,}0909$

15. Una variable aleatoria está distribuida uniformemente en el intervalo $(0; 1)$. Se elige un valor al azar y se obtiene un premio en unidades monetarias igual al valor obtenido. Se puede rechazar este premio y optar por una segunda elección, en cuyo caso el premio obtenido es igual a la potencia enésima de este segundo valor. Se desea establecer un valor $C$ correspondiente a la primera elección, tal que si el resultado obtenido en ella es menor que $C$, se opta por la segunda elección, de lo contrario, se retiene el premio $C$. Indicar el valor óptimo de $C$ y el beneficio esperado correspondiente.

    Resp: $C = 1/(n + 1)$; $0{,}5 + 0{,}5/(n + 1)^2$

16. En una familia los gastos porcentuales del esposo $X$ y de la mujer $Y$ se distribuyen según $f(x, y) = k\,x\,y^2$ para $0 < x < 1$; $0 < y < 1 - x$.

    *a*) ¿Cuál es la media de gastos de cada uno?

    *b*) Si el esposo gasta el 50 %, ¿cuál es la $P$ de que la mujer gane más del 40 %?

    *c*) Encuentre la función del ahorro mensual.

    *d*) ¿Son las variables independientes?

    *e*) La covariancia es negativa. Elabore una explicación no formal para el modelo.

17. Dos personas han quedado en encontrarse entre las $t_0$ y las $t_0 + \Delta t$ horas, pero cada uno no esperará al otro más de $a$ minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?

    Resp: $(a/\Delta T)(2 - a/\Delta T)$

18. Se eligen al azar dos puntos: $P$ en el segmento $(0; 15)$ del eje $x$ y $Q$ en el segmento $(0; 10)$ del eje $y$. Calcular la probabilidad de que la superficie del triángulo $OPQ$ sea mayor que 30.

    Resp: 0,2335

19. Las variables $x$ e $y$ tienen la siguiente función de densidad conjunta: $f(x, y) = 8/(1 + x + y)^4$ para $0 < x < 1$; $y > 0$. Hallar la función de densidad de $z = x + y$.

    Resp: $f(z) = 8\,z/(1 + z)^4$ para $0 < z < 1$; $f(z) = 8/(1 + z)^4$ para $z > 1$

20. Las barras provenientes de un tren de laminación tienen sección rectangular y sus lados $x$ e $y$ tienen longitudes variables con distribuciones uniformes independientes entre $a < x < 1{,}1\,a$ y $b < y < 1{,}1\,b$ respectivamente. Determine la probabilidad de que el área de una barra sea superior a $1{,}1\,a\,b$.

    Resp: 0,5159

21. Sean $x$ e $y$ dos variables aleatorias independientes con distribuciones uniformes en los intervalos $0 < x < a$; $0 < y < \pi$. Determine la probabilidad del suceso $x < b \cos y$ siendo $b < a$.

    Resp: $b/(a\,\pi)$

22. Sobre un segmento de longitud $a$ se eligen dos puntos al azar. Calcular la probabilidad de que los segmentos así formados queden ordenados en sentido creciente a partir del origen del segmento.

    Resp: 1/6

23. Se cortan chapas rectangulares. Si llamamos $X$ al lado más largo e $Y$ al otro (ancho), la función de densidad conjunta es: $f(x, y) = k\,x\,y$ para $0 < x < 2$

    *a*) Hallar $k$ y graficar el recinto donde no se anula $f(x, y)$.

    *b*) Calcular el porcentaje de chapas que tienen ancho entre 0,5 y 0,6 y largo entre 0,4 y 0,8.

    *c*) Encontrar las densidades marginales.

    *d*) Si el cliente compra sólo las de largo 1, ¿Cómo serán probabilísticamente los anchos?

    *e*) ¿Qué porcentaje de chapas tienen un ancho menor a 0,5?

    *f*) ¿Cuál es la media del ancho de las chapas de largo 1? ¿Cuál es la media del ancho de las chapas de largo 0,5? ¿Cuál es la media del ancho de las chapas de largo $x$?

    Resp: *a*) 1/2 *b*) 0,0046 *c*) $f(x) = x^3/4$ para $0 < x < 2$; $f(y) = y\,(4 - y^2)/4$ para $0 < y < 2$ *d*) $f(y\,/\,x = 1) = 2\,y$ para $0 < y < 1$ *e*) 0,1211 *f*) 2/3; 1/3; $\mu_{y\,/\,x} = 2\,x/3$

24. Se tienen dos variables independientes $x$ e $y$ con densidades $f(x) = a\,x^2$ para $0 < x < 1$ y $f(y) = b/y$ para $1 < y < 2$. Hallar la función de densidad de la variable $z = x\,y$.

    Resp: $f(z) = (7\,z^2)/(8\,\ln 2)$ para $0 < z < 1$; $f(z) = (8\,z^3)/(8\,z\,\ln 2)$ para $1 < z < 2$

25. Se tienen dos variables independientes $x$ e $y$ con densidades $f(x) = a\sqrt{x}$ para $0 < x < 1$ y $f(y) = b\,y^2$ para $1 < y < 2$. Hallar la función de densidad de la variable $z = x/y$.

    Resp: $f(z) = 3{,}0896\sqrt{z}$ para $0 < z < 1/2$; $f(z) = (z^{-4} - \sqrt{z})/7$ para $1/2 < z < 1$

26. Encontrar $f(z)$ siendo $z = x + 2\,y$ con $f(x) = 1$ para $0 < x < 1$ y $f(y) = 2\,y$ para $0 < y < 1$.

    Resp: $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{4} & 0 < z \leq 1 \\ \frac{z}{2} - \frac{1}{4} & 1 < z \leq 2 \\ -\frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} + \frac{3}{4} & 2 < z \leq 3 \end{cases}$

27. El tiempo de retraso para llegar a una reunión tiene una $f(t) = k\,e^{2\,t}$ para $t < 0$ y $k\,e^{-2\,t}$ para $t \geq 0$. Si deben reunirse 2 personas, ¿cuál es la $f(t_c)$ de la hora de comienzo?

28. Unos circuitos electrónicos están formados por tres componentes cuyo tiempo de vida es $f(t) = (1/1000)\,e^{-t/1000}$ para $t > 0$ si son del proveedor $A$. Si los componentes son del proveedor $B$, su tiempo de vida es $f(t) = (1/1500)\,e^{-t/1500}$ para $t > 0$. Los circuitos fallan si falla alguno de los tres componentes, y se sabe que para cada circuito los tres componentes son del mismo proveedor. Si un circuito está funcionando desde hace 1200 horas, ¿cuál es la $P$ de que sus componentes sean del proveedor $A$?

29. Un proceso consiste en realizar 4 operaciones: la 1 y la 2 comienzan simultáneamente. Cuando *ambas* están terminadas pueden empezar la 3 y la 4. Expresar la $P$ de que el tiempo total de ejecución supere los 10 días, si el tiempo para ejecutar cada operación tiene la siguiente función dendsidad: $f(t) = e^{-t/6}/6$ para $t > 0$.

    Resp: 0,801

# GUIA 4

**Procesos aleatorios – Proceso Bernoulli – Proceso Poisson – Proceso Hipergeométrico**

1. Sea $X$ una variable aleatoria binomial con $E(x) = 1$ y $\sigma_x = 0{,}75$. Hallar la probabilidad de obtener 5 éxitos en la experiencia.

   Resp: $P(X = 5) = 0$

2. Hallar la media y el desvío estándar de la cantidad de ases que ocurren en 10 lanzamientos de un dado no cargado.

   Resp: $E(x) = 1{,}67$; $\sigma_x = 1{,}18$

3. Un agricultor que siembra fruta afirma que 2/3 de su cosecha de duraznos ha sido contaminada por la mosca del mediterráneo. Encontrar la probabilidad de que al inspeccionar 4 duraznos:

   *a*) Los 4 estén contaminados por la mosca del mediterráneo.

   *b*) Cualquier cantidad entre 1 y 3 esté contaminada.

   Resp: *a*) 0,1975 *b*) 0,7901

4. Al probar una cierta clase de neumático para camión en un terreno escabroso se encontró que el 25 % de los camiones terminaban la prueba con pinchaduras.

   *a*) De los siguientes 5 camiones probados, hallar la probabilidad de que menos de 3 tengan pinchaduras.

   *b*) Hallar la P de que más de 2 no tengan pinchaduras.

   *c*) ¿Cuántos de los 5 camiones en promedio pueden sufrir pinchaduras?

   Resp: *a*) 0,8965 *b*) 0,8965 *c*) 1,25

5. El diámetro de las arandelas producidas por una máquina es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad de probabilidad: $f(x) = (x - 6)/4$ para $6 \leq x < 8$; $f(x) = (10 - x)/4$ para $8 \leq x \leq 10$; $f(x) = 0$ $\forall$ otro $x$ (en mm). Si se revisan 100 arandelas, ¿cuál es la probabilidad de que más de una tenga un diámetro inferior a 6,5 mm?

   Resp: 0,8234

6. El control de recepción de una pieza que se recibe en cajas de 10 unidades consiste en elegir dos piezas de cada caja y rechazar la misma si alguna es defectuosa. El "honesto" proveedor coloca en cada caja un número de defectuosas que depende del resultado de arrojar un dado como sigue: Si sale un as, no pone ninguna; si el resultado es 2, 3, 4 ó 5 pone 1 y si es 6, pone 2. Determinar:

   *a*) La distribución del número de defectuosas que hay en las cajas.

   *b*) La distribución del número de defectuosas que se encuentran en cada muestra de 2 unidades.

   *c*) El porcentaje rechazadas.

   Resp: *a*) $P(0) = 1/6$; $P(1) = 4/6$; $P(2) = 1/6$ *b*) $P(0) = 0{,}8037$; $P(1) = 0{,}1926$; $P(2) = 0{,}0037$ *c*) 19,63 %

7. Se trata de que un procese de fabricación de fusibles no produzca más del 1 % de defectuosos. A tal efecto se lo controla periódicamente examinando 10 fusibles y si alguno falla, se detiene el proceso para revisarlo.

*a*) Si realmente está trabajando al 1 %, ¿cuál es la probabilidad de revisarlo innecesariamente?

*b*) ¿Cuántos fusibles deberán probarse (en vez de 10) si se desea que valga 0,95 la probabilidad de revisar el proceso cuando haya un 10 % de defectuosos y cuánto valdría con este tamaño de muestra la probabilidad de revisar el proceso innecesariamente?

Resp: *a*) 0,0956 *b*) 29; 0,2528

8. En un proceso de fabricación que trabaja con un 15 % de defectuosas se producen 10 unidades diarias. Al final del día se hace un control y se separan las defectuosas, pero dado lo dificultoso de esta inspección, hay una probabilidad constante de 0,1 de considerar buena una unidad defectuosa.

   *a*) ¿Cuál es la probabilidad de separar 3 ó más unidades defectuosas al final de un día cualquiera? Comparar esta probabilidad con la que se tendría si la inspección fuera perfecta.

   *b*) ¿Cuál es la media y el desvío estándar del número de defectuosas separadas mensualmente (22 días hábiles)?

   Resp: *a*) 0,1424; 0,1798 *b*) 29,7; 5,069

9. En un tramo de una línea de montaje se realizan las operaciones 1, a cargo de Luis, y 2, a cargo de José, ambos especializados y que producen un 5 % de defectos cada uno. Cuando falta alguno de ellos, y lo hacen aleatoria e independientemente el 8 % de los días, son reemplazados por auxiliares no especializados que trabajan con un 20 % de defectos cada uno. Cada unidad es defectuosa si existe defecto en cualquiera de las operaciones del montaje, que son independientes. Si un día se toma una muestra de 20 unidades y resultan 2 defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que ese día haya faltado alguno de los titulares?

   Resp: 0,0458

10. En una pieza fabricada existen dos tipos de falla, en forma independiente: por abolladura con una probabilidad de 0,1 y por rotura con una probabilidad de 0,2. Hallar la probabilidad de que al tomar 8 piezas:

    *a*) Más de una sea defectuosa sólo por abolladura.

    *b*) Una resulte defectuosa sólo por rotura.

    *c*) A lo sumo una tenga ambos defectos.

    *d*) Menos de 2 tengan algún defecto

    *e*) Por lo menos una no tenga defectos

    *f*) 2 estén abolladas solamente, 3 estén rotas solamente, 1 tenga ambos defectos y el resto sean buenas.

    Resp: *a*) 0,1298 *b*) 0,3589 *c*) 0,9897 *d*) 0,2969 *e*) 0,9278

11. La probabilidad de dar en el blanco de dos tiradores $A$ y $B$ es respectivamente 0,4 y 0,7. Cada uno hace cinco disparos. Si se sabe que juntos acertaron 6 tiros, ¿cuál es la probabilidad de que $A$ haya acertado dos?

12. En una fábrica hay cuatro máquinas $A$, $B$, $C$ y $D$ que producen el 30 %, 20 %, 10 % y 40 % respectivamente de la producción total. Si se sabe que en diez artículos tomados al azar de la producción, exactamente dos provienen de la máquina $A$, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos provenientes de la máquina $B$?

13. En un proceso de control de calidad se efectúa una revisión periódica examinando la cantidad de piezas necesarias hasta encontrar la segunda defectuosa. Si el proceso trabaja con un 20 % de defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de revisar:

    *a*) 8 ó menos?
    *b*) 12 ó más?
    *c*) exactamente 12?

    Resp: *a*) 0,4967 *b*) 0,3221 *c*) 0,0472

14. Si la probabilidad de que un cierto examen dé una reacción positiva es igual a 0,4 y las reacciones son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran menos de cinco reacciones negativas antes de la primera positiva?

15. Suponga que el costo de efectuar un experimento es $1000. Si el experimento falla, se incurre en un costo adicional debido a ciertos cambios que deben efectuarse antes de que se intente un nuevo ensayo. Si la probabilidad de éxito en cualquiera de los ensayos es de 0,2; si los ensayos aislados son independientes y si los experimentos se continúan hasta que se obtiene el primer resultado exitoso, ¿cuál es el costo esperado del procedimiento completo?

16. Si la probabilidad de lograr una combinación telefónica en una llamada es de 0,8:

    *a*) ¿cuál es la probabilidad de lograr más de ocho comunicaciones en diez llamadas?
    *b*) ¿qué probabilidad existe de tener que realizar más de doce llamadas para lograr más de diez comunicaciones?

17. En un computadora fallan en promedio dos transistores por hora según una distribución de Poisson. Mientras menos de siete transistores estén fallados la computadora funciona normalmente, parándose en caso contrario. Hallar la probabilidad de que la computadora pueda desarrollar un cálculo que insume 3 horas.

    Resp: 0,6063

18. Los errores de imprenta de una cierta editorial son en promedio de 2,5 por página, según una distribución de Poisson. Si un cierto libro tiene 50 páginas, ¿cuál es la probabilidad de que en alguna de ellas haya 5 ó más errores?

    Resp: 0,9969

19. El número de buques tanque que llegan en un día a una refinería tiene una distribución de Poisson con $\mu = 2$. Si más de tres buques llegan en un día, los que están en exceso deben enviarse a otro puerto, pues las actuales instalaciones portuarias pueden despachar a lo sumo tres buques al día.

    *a*) ¿Cuál es la probabilidad de tener que hacer salir buques en un día determinado?
    *b*) ¿Cuál es el número esperado de buques que llegan en un día?
    *c*) ¿Cuál es el número más probable de buques que llegan en un día?
    *d*) ¿Cuál es el número esperado de buques atendidos diariamente?
    *e*) ¿Cuál es el número esperado de buques rechazados diariamente?
    *f*) ¿En cuánto deben aumentarse las instalaciones actuales para permitir la atención a todos los buques el 90 % de los días?

    Resp: *a*) 0,8571 *b*) 2 *c*) 1 ó 2 *d*) 1,78 *e*) 0,22

20. Una central tiene 5 centrales automáticas independientes entre sí, donde para cada una de ellas el número de conexiones erróneas por día obedece a una distribución de Poisson con $\mu = 0,01$ conexiones erróneas.

*a*) Calcular la probabilidad de que se produzcan exactamente 3 conexiones erróneas en la ciudad durante un día.

*b*) Un ingeniero quiere aumentar la confiabilidad del sistema modificando el valor de $\mu$. ¿Para qué valor de $\mu$ el ingeniero podrá afirmar que la probabilidad de una o más conexiones erróneas en la ciudad en un día cualquiera es igual a 0,02?

Resp: *a*) $1{,}98 \cdot 10^{-5}$ *b*) 0,004

21. En una ruta hay un dispositivo mecánico para contar el número de vehículos que arriban a dicha ruta. Los vehículos arriban según una ley Poisson a razón de 20 cada media hora en promedio. El dispositivo tiene una probabilidad de fallar del 1 %. ¿Cuál es la probabilidad de que en una hora y media hayan pasado 82 vehículos y se hayan registrado 78?

22. El porcentaje de rollos de tela de 150 metros de longitud que presenta fallas de teñido es del 2 %. Por otra parte tienen una cantidad de fallas de tejido según una distribución Poisson con $\mu = 0{,}01$ fallas/m.

    *a*) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un rollo sin fallas? ¿Qué condición entre sucesos debe presentarse?

    *b*) Si un cliente controla el 10 % de los rollo de una partida de 100 y la rechaza si encuentra uno o más rollos con falla de teñido o más de dos rollos con alguna falla de tejido, ¿cuál es la probabilidad de aceptar la partida?

23. En una tela existen dos tipos de fallas independientes: de hilado y de estampado. La primera ocurre en promedio 1 cada 10 $m^2$. La segunda tiene un promedio de 1 cada 20 $m^2$. ¿Cuál es la probabilidad de:

    *a*) Encontrar una falla de cada tipo en una pieza de 5 $m^2$?

    *b*) Que entre 100 piezas como la descripta haya por lo menos 80 con 1 ó más fallas?

24. Las fallas puntuales de una tela se distribuyen según el modelo de Poisson de tal manera que la probabilidad de no encontrar fallas en tres metros de tela es 0,01. ¿Cuál es la probabilidad de tener que revisar más de un metro de tela para encontrar una falla?

25. La duración de un cierto componente eléctrico es una variable aleatoria exponencial de media 1000 hs.

    *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho componente dure más de 200 hs?

    *b*) Si se sabe que en la hora 1200 estaba funcionando, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de 1400 hs (es decir, más de 200 hs más)?

    *c*) Comparar las probabilidades obtenidas en la parte $a$ y $b$ y obtener una conclusión.

26. La función de densidad de probabilidad de la duración (en minutos) de una llamada telefónica es una exponencial negativa de $\mu = 0{,}2$. Se efectúan 10 llamadas. Hallar la probabilidad de encontrar: a) más de dos llamadas de duración superior a los 15 minutos; b) exactamente dos llamadas de duración superior a los 15 minutos y 3 cuya duración sea inferior a los 15 minutos.

27. El número $X$ de huracanes que azota una zona costera durante un año tiene una distribución Poisson con $\mu = 0{,}5$.

    *a*) ¿Cuál es la distribución de $Y$ siendo $Y$ el número de años que hay que observar hasta encontrar cinco en los cuales se registra más de un huracán en la zona costera?

    *b*) Calcular la media y la variancia de $Y$.

28. La llegada de aviones a un aeropuerto de una determinada ciudad responde a un proceso Poisson con una media de 12 aviones por hora. Un oficial de control llega cada día de la semana y permanece en el aeropuerto el tiempo necesario hasta que llega el décimo avión. Si al cabo de una semana (5 días hábiles) el tiempo que permanece el oficial en el aeropuerto supera las 4 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo semanal de permanencia en el aeropuerto exceda las 5 horas? Suponer que los tiempos de permanencia de dos días diferentes son independientes.

29. Hay unos elementos con duraciones aleatorias cuya distribución es exponencial de $f(t) = 0{,}01\, e^{-0{,}01\, t}$ para $t > 0$ en horas. Si estos elementos se conectan en serie, la duración del circuito es la del elemento de menor duración y si se conectan en paralelo, es la del de mayor duración. Calcular en ambos casos la función de distribución $F(t)$ de la vida del circuito para $n = 10$ elementos.

    Resp: En serie: $F(t) = 1 - e^{-0{,}1\, t}$ En paralelo: $F(t) = (1 - e^{-0{,}01\, x})^{10}$

30. Sean las variables $X$ e $Y$ con distribuciones Gamma independientes entre sí con parámetros $k_1$ y $\lambda_1$ para $X$, y $k_2$ y $\lambda_2$ para $Y$. Calcular:

    *a*) $P(x < y)$
    *b*) $F(z)$ siendo $Z = X/(X + Y)$

31. De los 25 jugadores de fútbol de un club se elige al azar un equipo de 11. Si 8 de los jugadores son federados ¿cuál es la P de que en el equipo haya al menos 4 jugadores federados?

32. Considere una lotería de 25 boletos que ofrece:

    *a*) 6 premios.
    *b*) 3 premios.

    Si se compran 5 boletos, ¿cuál es la probabilidad de ganar algún premio?

33. Se extraen cartas de un mazo de 40 cartas españolas hasta encontrar una de espadas. Hallar la función de probabilidad $P(n)$ de la cantidad de extracciones necesarias.

# GUIA 5

**Variable Normal – Teorema Central del Límite**

1. En una planta industrial el consumo mensual de combustible es una variable aleatoria distribuida normalmente con media 20000 litros y desvío estándar 2500 litros.

   *a*) ¿Qué porcentaje de los meses se consume menos de 24000 litros?

   *b*) Idem con más de 18000 lts.

   *c*) Idem entre 18000 y 24000 lts.

   *d*) ¿Qué capacidad debe tener un tanque para satisfacer el consumo mensual con 95 % de probabilidad?

   *e*) ¿Cuál es el consumo superado en el 90 % de los meses?

   *f*) De los meses que se consume menos de 24000 litros, ¿qué porcentaje se consume más de 18000?

   *g*) De los meses que se consume más de 18000 litros, ¿qué porcentaje se consume menos de 24000?

   *h*) Para el tanque cuya capacidad fue calculada en (*d*), supongamos que es llenado todos los meses; ¿cuál es la probabilidad de que en un año haya algún mes en que no alcance a satisfacer el consumo?

   Resp: *a*) 94,5 % *b*) 78,8 % *c*) 73,3 % *d*) 24112 lts. *e*) 16796 *f*) 52,9 % *g*) 77,6 % *h*) 93,1 % *i*) 0,46

2. En un establecimiento agropecuario, el 10 % de los novillos que salen a venta pesan más de 500 kg. y el 7 % pesa menos de 410 kg. Si la distribución es normal, calcular:

   *a*) El peso superado por el 15 % de los novillos.

   *b*) Un intervalo de confianza al 95 % para el peso de los novillos.

   *c*) La probabilidad de que en una jaula de 25 novillos haya alguno con un peso inferior a 400 kg.

3. Los saldos de cuentas de ahorro de un banco tienen una media de $120, y un desvío estándar de $85.

   *a*) ¿Qué porcentaje de saldos es superior a $140?

   *b*) De los saldos superiores a la media, ¿qué porcentaje supera los $140?

   *c*) ¿Cuál es el saldo superado por el 90 % de las cuentas?

   *d*) ¿Cuál es la mediana de los saldos?

   *e*) Si se eligen cuentas al azar hasta encontrar 2 con saldos superiores a $140, ¿cuál es la probabilidad de lograrlo después de la sexta cuenta?

   Resp: *a*) 28,8 % *b*) 76,7 % *c*) $43,26 *d*) $97,92 *e*) 0,4475

4. En una línea de montaje se arma un mecanismo que tiene un eje que gira dentro de un buje. Un eje y un buje ajustan satisfactoriamente si el diámetro del segundo excede al del primero en no menos de 0,005 y no más de 0,035. Los diámetros de los ejes y los bujes son variables aleatorias con distribuciones uniformes independientes en el intervalo (0,74; 0,76) para los ejes y (0,76; 0,78) para los bujes.

   *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que un eje y un buje tomados al azar ajusten satisfactoriamente?

*b*) Considere ahora que las variables son normales con las mismas medias y desvíos que en (a) y recalcule la misma probabilidad.

Resp: *a*) 0,9375 *b*) 0,934

5. Una conserva se venderá envasada en latas. Las distribuciones de los pesos y sus costos son los siguientes:

| | |
|---|---|
| Peso neto | $X = N(49{,}8\,g; 1{,}2\,g)$ |
| Peso del envase | $Y = N(8{,}2\,g; 0{,}6\,g)$ |
| Costo de la conserva | $C_C = \$0{,}06/g$ |
| Costo del envase | $C_E = \$0{,}008/g$ |

*a*) Calcule la probabilidad de que una unidad terminada tenga un costo inferior a \$30.

*b*) Halle la probabilidad de que el costo del producto terminado supere en más del 2 % al costo del peso neto.

Resp: *a*) 0,229 *b*) 0,879

6. Una carpintería recibe tablas de dos aserraderos $A$ y $B$. En el primero, la longitud de las mismas tiene distribución normal con media 3,8 m y desvío estándar 0,3 m; en el segundo, la distribución también es normal, pero con parámetros 3,9 y 0,35 m respectivamente. Hay una partida en depósito de la cual, por una confusión, se desconoce su origen; en 10 tablas de la misma se encontraron 7 con longitud superior a 3,7 m; ¿cuál es con esta información la probabilidad de que el origen sea $B$?

Resp: 0,5251

7. Una zapatilla puede ser defectuosa por tener raspaduras o por ser insuficiente la adherencia de la capellada a la suela. Para comprobar dicha adherencia se efectúa un ensayo con una carga de 24 kg y si se despega, la zapatilla es defectuosa. La resistencia de la unión es una variable normal de media 25 kg y desvío 0,7 kg. Además, el 4 % de las zapatillas presenta raspaduras. Una zapatilla es defectuosa si presenta cualquiera de los defectos indicados y un par es defectuoso si alguna de sus zapatillas lo es. Calcular:

*a*) El porcentaje de *pares* defectuosos.

*b*) El número esperado de pares a elegir uno a uno hasta encontrar 20 buenos.

8. El lado de un cuadrado es una v.a. $N(1; 0,01)$ cm. El lado de otro cuadrado es una v.a. $N(1,02; 0,01)$ cm independiente del anterior. Hallar el valor medio de la diferencia de las áreas y la variancia de la diferencia entre las diagonales.

Resp: 0,0404; 0,0004

9. Una máquina fabrica bujes cuyos diámetros son una v. a. $N(12; 2)$ mm. Otra máquina fabrica ejes cuyos diámetros son una v.a. $N(11; 3)$ mm.

*a*) Elegidos un eje y un buje al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el eje entre dentro del buje?

*b*) Se supone aceptable un par eje-buje cuando el juego está entre 0,2 mm y 0,5 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un eje y un buje formen un par aceptable?

*c*) Si se extraen 5 pares, ¿cuál es la probabilidad de encontrar por lo menos uno aceptable?

Resp: *a*) 0,6092 *b*) 0,0327 *c*) 0,1532

10. El peso de ovillos de hilo que salen de una máquina se distribuye normalmente con media 120 g y desvío estándar 8 g en condiciones normales de funcionamiento. Los ovillos se empaquetan de a 24 en cajas de cartón cuyo peso al vacío es de 300 g que puede considerar constante. En la inspección final se pesa la caja con los ovillos y se la acepta si su peso es superior a 3120 g. ¿Qué probabilidad hay de rechazar una caja si la máquina funciona correctamente?

    Resp: 0,063

11. Una empresa tiene 3 vendedores, $A$, $B$ y $C$. Las ventas diarias de cada uno son sumamente variables y se conocen sus medias y desvíos pero no sus leyes de distribución. Dichos parámetros valen 100 y 45 para $A$, 120 y 30 para $B$, y 94 y 15 para $C$. Calcular:

    *a*) La probabilidad de que en 40 días hábiles, $B$ y $C$ en conjunto dupliquen al menos las ventas de $A$.

    *b*) La probabilidad de que en 60 días hábiles $B$ venda al menos un 30 % más que $C$.

    *c*) La venta total mínima que, con 95 % de confiabilidad podrá obtenerse con los 3 durante los próximos 60 días hábiles.

    Resp: *a*) 0,8217 *b*) 0,3169 *c*) 18125

12. Una persona usa diariamente su radio portátil un tiempo variable día a día con media 2,4 hs y desvío 0,8 hs. La radio usa una pila especial cuya duración es también variable con media 8 hs y desvío 1,2 hs. Esta persona va a efectuar un viaje de 30 días y si se le agotan las pilas no está seguro de conseguirlas. Calcular cuántas pilas debe llevar para que la probabilidad de dicho evento valga 0,05

    Resp: 11 pilas

13. Un camión transporta cajas cargadas de artículos varios. El peso de estas cajas es una variable muy asimétrica y dispersa con un valor medio de 25 kg y un desvío estándar de 18 kg. De acuerdo con las reglamentaciones vigentes, la carga máxima que puede llevar el camión es de 4000 kg, sin embargo, como el sitio de carga no dispone de báscula, existe el riesgo de superarla en caso de colocar demasiadas cajas. Calcular el número máximo de cajas a cargar en el camión para que la probabilidad de dicho evento sea a lo sumo del 5 %.

    Resp: 145

14. En una máquina se bobinarán carreteles con hilo de título 40 g/1000 m. El carretel lleno no debe poseer más de 500 g y se quiere que la probabilidad de que supere este valor sea 0,01. En el carretel se bobinarán en promedio 10.000 m de hilo, pero debido a la variabilidad en el frenado de la máquina, dicha longitud variará en 2,5 % con probabilidad 0,99. Debe especificarse el peso promedio de los carreteles vacíos de la máquina, sabiendo que por razones de tolerancias constructivas se tendrá un desvío estándar de 3 g.

    Resp: 88,6 g

15. El porcentaje diario de unidades defectuosas en un proceso de manufactura es una variable aleatoria de la cual no se conoce su distribución pero sí su media que vale 10 % y su desvío estándar, 3 %. Se sabe además que por cada unidad defectuosa se genera una pérdida de \$45. Calcular, para un mes de 25 días hábiles en el cual se producen 36 unidades diarias:

    *a*) La media y el desvío estándar de la pérdida ocasionada por las unidades defectuosas.

    *b*) La probabilidad de que dicha pérdida supere los \$430.

Resp: *a*) \$405; \$24,3 *b*) 0,1515

16. En un taller de manufactura, la fracción de unidades defectuosas varía diariamente en forma aleatoria con media 0,1 y desvío estándar 0,03. A su vez, la producción diaria es también variable e independiente de la anterior, con media 500 unidades y desvío 120 unidades. El costo total diario tiene una parte fija de \$0,8 por unidad producida (buena o defectuosa) más \$3,4 por unidad defectuosa. Calcular:

    *a*) El coeficiente de correlación entre la cantidad diaria de unidades producidas y la cantidad de unidades defectuosas.

    *b*) El coeficiente de correlación entre el costo total diario y la cantidad de unidades producidas.

    *c*) El costo total para 90 días superado con 90 % de probabilidad.

    Resp: *a*) 0,614 *b*) 0,9337 *c*) \$58519